УДК 539.3

ДО ПРОБЛЕМИ РОЗРОБКИ НОВИХ НЕКЛАСИЧНИХ ТЕОРІЙ ЗГИНУ ОБОЛОНОК, ПЛАСТИН ТА БАЛОК (огляд)
Повідомлення 3. Ітераційні та прямі методи приведення тривимірних рівнянь теорії пружності до двовимірних рівнянь теорії товстих плит

TO THE PROBLEM OF DEVELOPING NEW NON-KLASSICAL THEORIES OF BENDING OF SHELS, PLATES AND BEAMS (review)
Message 3. Iterative and direct methods of bringing data three-dimensional equations of theory of elasticity to two-dimensional equations of theory of thick plates

Шваб'юк В.І., д.т.н., проф., Ротко С. В., к.т.н., доц., Шваб'юк В.В., к.т.н., доц. (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Shvabyuk V.I., Doctor of Engineering, Professor, Rotko S.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Shvabyuk V.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, (Lutsk National Technical University, Lutsk)

Робота є продовженням статей, викладених у повідомленнях 1, 2 попереднього видання (№ 5, 2016), де розглядалися принципи побудови класичної та уточнених деформаційних теорій першого та вищого рівнів для оболонок, пластин і балок. У даній статті виконується огляд робіт, у яких застосовуються ітераційні та прямі методи зведення тривимірних рівнянь теорії пружності до двовимірних рівнянь теорії товстих плит і теорій плит середньої товщини, а також способи оцінки точності таких досліджень.

The work is a continuation of the articles contained in the messages 1, 2 of the previous edition (No. 5, 2016), which addressed the principles of classical and refined theories of deformation of the first and highest levels for shells, plates and beams. This article is a survey of works that use iterative and direct methods data three-dimensional equations of theory of elasticity to two-dimensional equations of theory of thick plates and the theory of plates of medium thickness, as well as ways to assess the accuracy of these studies.

Ключові слова: ітераційні та прямі методи, теорії товстих плит і оболонок, напівобернений метод.

Keywords: iterative and direct methods, theory of plates of medium thickness, semi-inverse method.

1. Ітераційні методи приведення тривимірних рівнянь теорії пружності до двовимірних рівнянь теорій плит середньої товщини

Ітераційними методами, за допомогою яких можна здійснювати певну кількість наближень для побудови більш точних моделей оболонок і пластин, користалося багато авторів, наприклад, [1-8]. Вибираючи за початкові вирази для переміщень (деформацій) чи напружень (залежно від того, який метод вибирався за початковий — метод гіпотез, чи напівобернений метод) та використовуючи відповідні співвідношення класичної теорії Кірхгофа – Лява або теорії Рейсснера і застовуючи рівняння закону Гука та рівняння рівноваги Нав'є, або один із варіаційних принципів, автори отримували нові уточнені залежності теорій згину оболонок і пластин. Далі, уже знайдені уточнені величини, знову "пропускалися" через згадані вище рівняння теорії пружності до тих пір, доки їх точність не наближалася до певних значень відповідних величин у тестових задачах тривимірної теорії пружності.

Такою методологією (сукупно із напівоберненим методом) користувалися С.О, Амбарцумян [1], А.В.Колос [2] та інші дослідники [3-8] для побудови теорій оболонок і пластин другого та вищих наближень. Пізніше, В.В.Пікуль [3] та В.А. Родіонова [4] для цієї мети застосували ітераційний метод, але вже із додатковим використанням методу зважених нев'язок. Останній можна вважати мірою точності кожного наступного наближення порівняно із просторовою задачею. Ними були розроблені нові моделі оболонок і пластин, які дозволяють сформулювати енергетично узгоджені статичні та кінематичні гіпотези, використовуючи різні способи мінімізації нев'язок.

Ітераційний метод був використаний також і О.О. Рассказо-вим [5], В.Г. Піскуновим [6] та їх учнями [7]. Ними побудована теорія однорідних і шаруватих орторопних оболонок другого наближення. Зокрема, В.Г. Піскуновим [6] була розроблена статична та динамічна теорії для шаруватих трансверсально-ізотропних оболонок і пластин. Згідно цих теорій компоненти вектора переміщень у загальному вигляді поліномів п'ятого степеня для тангенціальних переміщень і четвертого — для нормального за координатою z. Коефіцієнти біля доданків таких поліномів є функції навантаження на лицевих поверхнях плити, а також невідомі функції.

Розрахункові рівняння, граничні умови та співвідношення пружності в запропонованій моделі отримуються із варіаційного принципу Лагранжа. Загальний порядок системи диференціальних рівнянь для оболонки складає 16, а в частковому випадку пластини цей порядок знижується до 12.

Ітераційний метод був поширений також О.В. Гориком, В.Г. Піскуновим та В.М. Чередніченком [7] на розробку нових зсувних моделей дискретно-неоднорідних композитних брусів. Структура рівнянь, кількість яких залежить від кількості кроків в ітераційному процесі, дозволяє аналізувати задачі згину та зсуву, уточнюючи НДС самозрівноваженими напруженими станами.

В.І. Зубком та В.М. Шопою, у рамках побудованої ітераційної моделі [8], розроблені методики розрахунку напружено-деформованого стану пакетів трансверсально-ізотропних пластин із урахуванням зон зчеплення, проковзування та відлипання, де враховано обтиснення та вплив дотичних напружень на поверхнях пластин.

Проблемі коректності розвитку компонент вектора переміщень у ряди за функціями від координати z присвячена робота В.В.Васильєва та С.А. Лур'є [9]. Ними виведені умови коректності, через узгодження чисел наближень у заданих рядах для тангенціальних і вертикальної компонент вектора переміщень, як для пластин, так і для оболонок.

2. Прямі методи приведення тривимірних рівнянь теорії пружності до двовимірних рівнянь теорій товстих плит

Поширеними методами зведення тримірних рівнянь теорії пружності до двовимірних рівнянь теорії товстих плит є методи безпосереднього інтегрування рівнянь тривимірної задачі теорії пружності. Такими є асимптотичні методи, методи розкладу за товщинною координатою і символічний метод, які базуються на однорідних розв'язках.

Асимптотичний метод інтегрування тримірної задачі був використаний та описаний у роботах І.І. Воровича [10], А.Л. Гольденвейзера [11], Л.А. Агаловяна [12], О.К. Аксентян і Ю.А. Устінова [13] та їх учнів. В основу цього методу покладено розвинення у ряди за степенями деякого малого параметра, який залежить в основному від відносної товщини та пружних властивостей у поперечному напрямку пластини чи оболонки.

Зокрема, Л.А. Агаловяном [12] досліджено вплив фізичних характеристик ортотропного матеріалу на розрахункові рівняння та крайові умови, а також можливі похибки класичної і прикладних теорій, де стосовно кожного з наближень мають формуватися також і відповідні граничні умови.

О.С. Космодаміанським та В.А. Шалдирваном [14] були отримані розв'язки задач напружено-деформованого стану товстих трасверсально-ізотропних плит (також і багатозв'язних), при симетричному та кососиметричному навантаженні. Зокрема, В.А. Шалдирваном [15] використані представлення для компонент вектора переміщень у вигляді рядів за поперечною координатою, де коефіцієнтами є певні функції, що виражаються через деяку потенціальну функцію, яку у першому наближенні можна вважати за нормальне переміщення серединної поверхні плити. Першим наближенням такої теорії є теорія С.О. Амбарцумяна із сумарним шостим порядком диференціальних рівнянь рівноваги. Наступне наближення має вже 12 порядок диференціальних рівнянь і вимагає задоволення шести граничним умовам. Ще вище наближення має 18 порядок і т.д.

Запропонований у сорокових роках І.М. Векуа [16] метод зведення задач теорії пружності до двомірних задач для пружних плит полягає у розкладанні переміщень і напружень у пластинах та оболонках у ряди за поліномами Лежандра. Цей метод дістав значний розвиток (у різних варіантах) у роботах В.В. Понятовського [17], А.П. Прусакова [18] А.В. Плеханова [19], В.І. Гуляєва, В.А. Баженова, П.П. Лізунова [20], Б.Л. Пелеха і М.А. Сухорольського [21], В.А. Сало [22], І.Ю. Хоми [23], В.К. Чибірякова [24] та інших. В.В. Понятовський [25], використавши для основних напружень $\sigma_x,\ \sigma_y, \tau_{xy}$ метод розвинення їх у нескінченні ряди за поліномами Лежандра та застосувавши варіаційний принцип Кастиліано, отримав розрахункові рівняння, де першим наближенням (з точністю до членів із множниками $(h/a)^2$) є теорія Е.Рейсснера.

Узагальнення даного методу для трансверсально - ізотропних та ортотропних оболонок і пластин з отворами та тріщинами для силових і температурних навантажень можна знайти у працях І.Ю. Хоми [23] при дослідженні напружень в околі отворів у товстих плитах і плитах змінної товщини. В.І. Гуляєв, В.А. Баженов та П.П. Лізунов [20], використовуючи рівняння некласичної моделі пластин і оболонок, знайшли їх застосування для розв’язання низки інженерних задач.

І.Ю. Хомою [23] на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського побудовано лінійні та геометрично нелінійні рівняння руху та рівняння статики анізотропних оболонок і пластин, де компоненти вектора переміщень і тензора напружень записуються у вигляді рядів Фур’є - Лежандра. Загальні розв’язки для трансверсально-ізотропних оболонок і пластин складаються із трьох типів розв’язків: бігармонічного, потенціального та вихрового.

Необхідно при цьому зауважити, що врахування у розкладах компонент напружено-деформованого стану поліномів Лежандра високих порядків $(n \geq 3)$ здійснено А.П. Прусаковим [18] та А.В. Плехановим [19] за допомогою енерго-асимптотичного методу при розробці ітераційної моделі високої точності для однорідних трансверсально-ізотропних оболонок і пластин. За допомогою змішаного варіаційного принципу Е. Геллінґера-Пранґе-Рейсснера побудовані рівняння рівноваги та записані відповідні граничні умови та співвідношення пружності. Дана теорія враховує деформації поперечного зсуву, стискання і нелінійність зміни НДС за товщиною пакету шарів.

В.А. Сало у монографії [22] запропонував і чисельно реалізував метод розв’язання крайових задач статично навантажених ортотропних пластин з отворами довільної форми та розмірів, що базується на загальних рівняннях теорії пружності, змішаному варіаційному принципі Геллінґера-Пранґе-Рейсснера, а також методі І.М. Векуа та теорії R-функцій. У працях А.Г. Зеленського [26] використано метод взаємозв’язаних рівнянь А.П. Прусакова для транстропних пластин у побудові розрахункових рівнянь оболонок з урахуванням наближень вищих порядків поліномів Лежандра. В.К. Чибіряков [24] розвинув цей метод для товстих пластин, зокрема і неоднорідних, а також побудував числово-аналітичні процедури їх розрахунку.

Ще один метод, у якому розв'язками рівнянь рівноваги Ляме у переміщеннях самі компоненти вектора переміщення розвинені у ряди добутків поліномів Лежандра за кожною з трьох координат, є *метод визначувальних станів*, розроблений Б.М. Лісіциним [27]. Невідомими у цих рядах є тільки числові коефіцієнти. Для визначення цих коефіцієнтів будуються три системи так званих «визначувальних станів», які піддаються програмуванню і можуть бути використані для розв'язування другої та змішаної задач теорії пружності для товстих плит і плит середньої товщини.

Символічний метод переходу до двовимірних рівнянь теорії пластин та оболонок розроблений у роботах А.І. Лур'є [28], С.Г. Лехніцького [29], В.К. Прокопова [30], Ю.А. Груздьова [31] та інших. Синтез символічного методу А.І. Лур'є з методом розкладу функцій напружень у ряди М.Є. Ващенка-Захарченка, що дістав назву методу неоднорідних розв'язків, розвивається у роботах В.М. Максимовича та автора [32, 33]. Побудований метод дозволяє розв'язувати просторові задачі теорії пружності для ізотропного шару, навантаженого жорсткими штампами та зосередженими силами, шляхом використання уточнених рівнянь некласичних моделей пластин середньої товщини.

Поширеним методом зведення просторової задачі теорії пружності до двомірної теорії товстих плит та оболонок є *метод початкових функцій* В.З. Власова [34] та В.В. Власова [35]. Суттю методу є розвинення трьох компонент вектора переміщень: u, v, w та трьох напружень: $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ у вигляді рядів Маклорена за поперечною координатою z із одночасним використанням *символічного методу*. Останній дозволяє до операцій диференціювання у вихідних рівняннях застосовувати методи лінійної алгебри. В.Г. Бабаджаняном [36] символічний метод застосовано до розрахунку прямокутної ортотропної плити. У згаданому методі, якщо за нульове наближення взяти теорію Кірхгофа – Лява, то перше наближення співпадає із прикладною теорією пластинок С.О. Амбарцумяна. Методом *початкових функцій* розв'язана низка задач як для товстих плит сталої та змінної товщини, так і для плит (у тому числі багатошарових), що лежать на пружній основі.

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.– М.: Наука, 1987. – 360 с. **2.** Колос А.В. Об области применения приближенных теорий изгиба пластин типа теории Рейсснера. // Труды VI Всес. конф. по теории и оболочек и пластинок. Днепр-ск; 1966, М.: Наука, 1966.– С.549-553. **3.** Пикуль В.В. Физически корректные модели материала упругих оболочек. // Механика твердого тела. – 1995. - № 2. - С. 103-108. **4.** Родионова В.А. Теория тонких анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия. -Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.– 116 с. **5.** Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. — К.: Вища шк. 1986. —191с. **6.** Пискунов В.Г., Рассказов А.А. Сдвиговая теория второго приближения для многослойных пологих оболочек и пластин // Механика композитных материалов. 1998. Т.34. №3.– С.363-370. **7.** Горик О. В., Піскунов В.Г., Чередніченко В.М. Механіка деформування композитних брусів. Монографія. — Полтава – Київ: Полтавська державна аграрна академія, Національний транспортний університет, 2008. – 404 с. **8.** Зубко В.І., Шопа В.М. Згин пакетів трансверсално-ізотропних пластин.— Факел, 2001. — 265 с. **9.** Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек. // Механика твёрдого тела. – 1990. - № 6. - С.139-146. **10.** Ворович И.И., Малкина О.С. Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.:Баку, 1966. – С.251-254. **11.** Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера // Механика твердого тела. – 1990. - № 6. – С. 124-138. **12.** Агаловян Л.А. О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий // Доклады АН Арм.ССР, 1979. – Т.69. В.3. – С.151-156. **13.** Аксетян О.К., Устинов Ю.А. Построение уточненных краевых теорий для плиты на основе уравнений теории упругости // Прикл. матем. и механика, 1972, т.36, вып.2. – С.272-281. **14.** Космодамианский А.С. Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. Думка. 1973. – 237 с. **15.** Шалдырван В.А. Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43. – №2. – С. 45–69. **16.** Векуа И.Н. Вариационные принципы построения теории оболочек.- Тбилиси: Изд-во Тбилисского Ун-та, 1970. – 15с. **17.** Понятовский В.В. К теории пластин средней толщины //Прикл. матем. и механика, 1962, Т.26. В.2. – С.335-341. **18.** Прусаков А.П. О построении теории изгиба пластин средней толщины энерго-асимптотическим методом // Прикл.

механика, 1975. Т.XI, В.10. 1975. – С.44-51. **19.** Плеханов А.В., Прусаков А.П. Об одном асимптотическом методе построения теории пластин средней толщины // Изв. АН СССР.Механика твердого тела.1976. № 3.– С.84-90. **20.** Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и её приложение к решению задач инженерных. - Львов: Изд.-во при Львов. ун-те, 1978. – 193 с. **21.** Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – К.: Наукова думка, 1980. – 216с. **22.** Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с товерстиями. – Харьков: НТУ”ХПИ”, 2003. – 216 с. **23.** Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – К.: Наукова думка, 1986. – 170 с. **24.** Чибиряков В.К. Уравнения напряженно-деформированного состояния толстых плит несимметричной структуры // Сопр. материалов и теория сооружений. – 1978. – Вып. 32. – С.82-87. **25.** Понятовский В.В. К теории пластин средней толщины // Прикл.матем. и механика, 1962, Т.26. В.2. – С.335-341. **26.** Зеленський А.Г., Прусаков О.П., Вовченко М.Г. Варіант некласичної теорії згину трансверсально-ізотропних пластин і пологих оболонок // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.- 1999.-Т.2., №2. – С.58-65. **27.** Лисицын Б.М. Об одном методе решения задач теории упругости // Прикл. механика, 1967. Т.3. № 4. – С.85-88. **28.** Лурье А.И. Пространственніе задачи терии упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. 492 с. **29.** Лехницкий С.Г. К теории анизотропных толстых плит. Изв. АН ССР, ОТН, мех. и машстр., 1959. № 2. – С.141-145. **30.** Прокопов В.К. Применение символического метода к выводу уравнений теории плит // Прикл.матем. и механика, 1965. Т.29. В.5.– С.902-918. **31.** Груздев Ю.А. Полимоментная теория равновесия плит // Труды VII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Днепропетровск; 1969, М.: Наука, 1970.– С.211-215. **32.** Шваб’юк В.І., Максимович В.М. Порівняльний аналіз точності некласичних теорій згину пластин при локалізованих навантаженнях. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1999, вип. 2. **33.** Шваб’юк В.І. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини / В.І. Шваб’юк, С.В. Ротко // Монографія. – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2015. – 264 с. **34.** Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, пластины и оболочки на упругом основании. – М.: Госфизматлит, 1960. – 491 с. **35.** Власов В.В. Метод навчальних функций в задачах теории упругости и строительной механике. – М.: Строй издат.1975.– 223 с. **36.** Бабаджанян В.Г. Применение метода начальных функций в задаче об изгибе ортотропной плиты // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973, вып.10.– С. 63-71.