

УДК 539.3

**РОЗПОДІЛ ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ У
ПЛАСТИНАТИХ ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ З
ОТВОРАМИ ЗА ДІЇ НЕРІВНОМІРНОГО ІМПУЛЬСНОГО
НАВАНТАЖЕННЯ**

**DISTRIBUTION OF THE DYNAMIC STRESSES AT PLATE
ELEMENTS OF CONSTRUCTIONS WITH HOLES UNDER THE
ACTION OF UNSTEADY IMPULSE LOADS**

**Мікуліч О.А., к.т.н., доц., (Луцький національний технічний
університет)**

**Mikulich O.A., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, (Lutsk
National Technical University)**

У роботі запропонована методика дослідження динамічного напруженого стану пластинчатих елементів конструкції з отворами за дії нерівномірного імпульсного навантаження, що прикладене до границі отвору.

The paper develops the dynamic stress state of plate elements of constructions with holes under the actions of unsteady impulse loads research technique. It is based on the Fourier transforms, boundary integral equation method and theory of complex variable function. The accuracy of the proposed method is ensured using of the discrete Fourier transform only for the search of the originals of dynamic stresses. The calculation of dynamic hoop stresses concentrations at the boundary of the plate elements and radial stresses in the plate element under the action of impulse load have been made. The method can be used for distribution of dynamic stresses at the plates with rivet connections research.

Ключові слова: плоска динамічна задача, нескінченна пластинка, отвір, нерівномірне імпульсне навантаження.

Keywords: dynamic plane problem, infinite plate, hole, unsteady impulse loads.

При розрахунку на міцність пластинчатих елементів конструкцій слід враховувати нерівномірність розподілу навантаження, що виникає на границі отвору. За дії динамічних навантажень, а особливо імпульсних, у таких елементах конструкцій концентрація напружень істотно відрізнятиметься від тих, що виникають за умов квазістатичного деформування.

Задача дослідження впливу довільного несиметрично-розподіленого вздовж границі отвору навантаження на динамічний напружений стан пластинок за дії ударного навантаження у [1] була розв'язана за допомогою методу кінцевих різниць за часом та рядів Фур'є відносно кутової змінної.

Проте, запропонований підхід не може бути використаний до дослідження напруженого стану пластинок за дії імпульсного навантаження, а також його безпосередньо не можна використовувати для випадків, коли пластинки послаблені отворами довільної форми.

У [2] запропонована методика дослідження динамічного розподілу напружень у пластинках з отворами за дії падаючої пружної слабкої ударної хвилі, що ґрунтується на сумісному використанні перетворення Фур'є за часом та методу граничних інтегральних рівнянь. На основі розробленого підходу у [1] досліджено розподіл динамічних кільцевих напружень у пластинках, послаблених круговими та еліптичними отворами.

У [3] запропоновану методику адаптовано до дослідження динамічного напруженого стану пластинок з прямокутними отворами. Числова реалізація запропонованого підходу здійснювалася на основі методу механічних квадратур та колокації із використанням конформного відображення для опису границі отвору. Такий підхід виявився ефективним при розрахунку динамічної концентрації напружень у пластинках, послаблених отворами складної форми.

Метою роботи є розробка методики дослідження динамічного напруженого стану пластинчатих елементів конструкцій, послаблених отворами довільної форми, за дії нерівномірного імпульсного навантаження, що прикладене до їх границі.

Розглянемо нескінченну ізотропну пружну пластинку, яка послаблена отвором, до границі якого прикладене нерівномірне навантаження, що змінюється з часом (рис. 1). Позначимо через L її

граничний контур. Віднесемо пружну пластинку до декартової системи координат Ox_1x_2 , яку розмістимо у її центрі ваги.

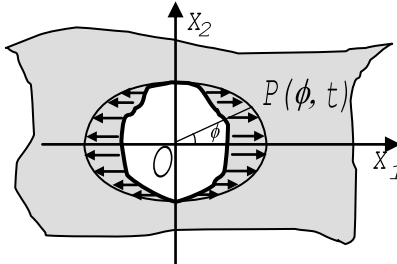


Рис. 1. Схема навантаження пластинки

Динамічне навантаження, що прикладене до границі отвору пластинки подамо у вигляді:

$$P(\phi, t) = \mathcal{A}(\phi) \cdot \varphi(t), \quad (1)$$

де $\mathcal{A}(\phi)$ — функція, що описує зміну навантаження вздовж границі, $\varphi(t)$ — функція, що описує зміну інтенсивності навантаження з часом.

Граничні умови задачі записуються так:

$$\sigma_n|_L = P(\phi, t), \quad \tau_{sn}|_L = 0.$$

Рівняння руху ізотропної пластинки у переміщеннях за відсутності масових сил мають вигляд [4]:

$$(\lambda + \mu)u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (2)$$

де $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_j(\mathbf{x}, t)\}$, $j = 1, 2$ — вектор переміщень довільної точки $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$; λ, μ — сталі Ляме; ρ — густина матеріалу, $(\cdot)_{,j}$ означає диференціювання по x_j .

Використовуючи перетворення Фур'є за часом [5] до (2), отримає рівняння, що еквівалентні до рівнянь усталених коливань з циклічною частотою ω [2, 3].

Подальші дослідження будемо проводити у області Фур'є-зображень, де граничні умови задачі записуються у вигляді:

$$\tilde{\sigma}_n|_L = \tilde{P}(\phi, \omega), \quad \tilde{\tau}_{sn}|_L = 0, \quad (3)$$

причому $\tilde{P}(\phi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\phi, t) e^{-i\omega t} dt$.

Для розв'язання поставленої задачі у області Фур'є-зображень використаємо метод граничних інтегральних рівнянь, відповідно до якого потенціальне зображення загального розв'язку для переміщень у випадку першої основної задачі виберемо у вигляді [6]:

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \omega) = \int_L p_j(\mathbf{x}^0, \omega) \cdot U_{ji}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0, \omega) ds,$$

де p_1, p_2 — невідомі комплексні потенціальні функції; U_{ij}^* — функції впливу, що вибрані з врахуванням умов Зоммерфельда [4] у вигляді [2, 3]. Інтегрування вздовж границі проводиться за змінними x_1^0, x_2^0 , причому $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, x_2^0\}$.

Розрахувавши напруження в пластинці за формулами [4] та задовольнивши граничні умови (3), отримаємо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомої на границі функції $p = p_1 + ip_2$:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(i \frac{p}{g'(\phi)} \right) |g'(\phi)| + \int_L f_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p ds + \int_L f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{p} ds = \tilde{P}(\phi, \omega);$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(i \frac{p}{g'(\phi)} \right) |g'(\phi)| + \int_L f_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p ds + \int_L f_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{p} ds = 0;$$

де $g(\phi)$ — параметричне задання границі області, $f_i, i = \overline{1, 4}$ — відомі функції. Відмітимо, що позаінтегральні члени у системі (4) отримані за граничного переходу на основі формул Племеля-Сохоцького [4].

Отриману систему інтегральних рівнянь розв'яжемо числово методами механічних квадратур та колокації [7], використовуючи при цьому для інтегралів з особливістю типу Коші уточнені квадратурні формули [7].

Після визначення невідомих на границі функцій, числовий розрахунок кільцевих динамічних напружень на границі отвору та радіальних напружень у пластинці проводився на основі залежностей:

$$\tilde{\sigma}_\theta = \frac{\nu}{2} \operatorname{Re} \left(i \frac{p}{g'(\phi)} \right) |g'(\phi)| + \int_L f_5(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p ds + \int_L f_6(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{p} ds; \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}_r = \int_L f_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p ds + \int_L f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{p} ds;$$

де f_5, f_6 — відомі функції.

Визначення оригіналів напружень (4) здійснювалося на основі оберненого перетворення Фур'є [5]:

$$\sigma(\phi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}(\phi, \omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

що за числового розрахунку напружень реалізовано на основі дискретного перетворення Фур'є [2, 3].

Використовуючи розроблену методику дослідимо розподіл динамічних кільцевих напружень на границі еліптичного отвору пружної ізотропної пластинки та зміну радіальних напружень у пластинці. Числові розрахунки проведемо для випадку отвору еліптичної форми з півосями $0,5 a$ та a .

Числові розрахунки виконаємо для випадку модуляції імпульсу за часом у формі слабкої ударної хвилі [2, 3]:

$$\varphi(\tau) = p_* \tau^{n_*} e^{-\alpha_* \tau}, \quad \tau > 0, \quad n_* \geq 0,$$

де p_*, n_*, α_* — сталі, τ — безрозмірний часовий параметр: $\tau = t \cdot c_1 / a$, a — деякий характерний розмір. Функція зміни навантаження вздовж границі задавалася у вигляді:

$$\mathcal{A}(\phi) = (1 + \cos(2\phi)) / 2.$$

Числові дослідження проведено для сталевієї пластини з густиною $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа та коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,27$. Отримані значення динамічних напружень віднесені до $\sigma_0 = 10^3$ МПа. При розрахунках приймалося $p_* = 185$; $n_* = 2$; $\alpha_* = 10$; $a = 1$, $\tau = 8$ [3].

На рис. 2 наведено результати розрахунків зміни з часом відносних кільцевих динамічних напружень на границі еліптичного отвору у точках $\phi = 0^\circ, \phi = 30^\circ, \phi = 45^\circ, \phi = 60^\circ$ та $\phi = 90^\circ$.

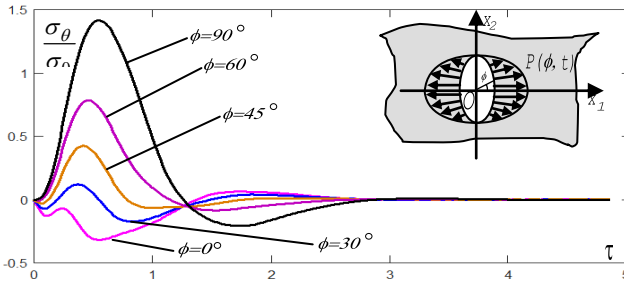


Рис. 2. Розподіл відносних динамічних кільцевих напружень на границі еліптичного отвору

Для дослідження затухання радіальних напружень визначено їх значення у перерізах пластинки, віддалених на відстань $\delta = a$ (крива 1), $\delta = 2a$ (крива 2), $\delta = 4a$ (крива 3), $\delta = 5a$ (крива 4) від центру отвору в точках на осі Ox_1 (рис, 3, а) та Ox_2 (рис, 3, б).

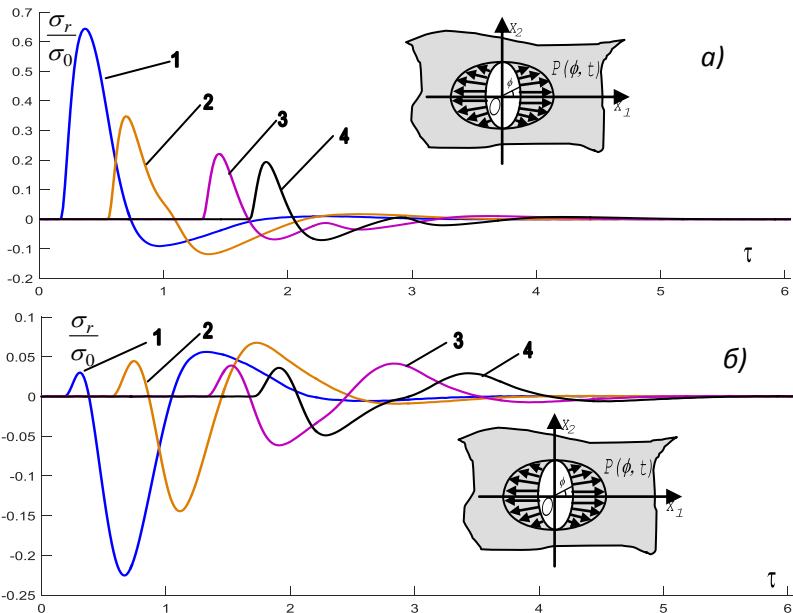


Рис. 3. Розподіл відносних динамічних радіальних напружень у пластинці з еліптичним отвором у перерізах, віддалених на відстань $\delta = a$ (крива 1), $\delta = 2a$ (крива 2), $\delta = 4a$ (крива 3), $\delta = 5a$ (крива 4) від центру отвору в точках на осі Ox_1 (а) та Ox_2 (б)

З рис. 2 видно, що найбільші значення динамічних кільцевих напружень на границі отвору виникають у точках великої півосі. Вони у 1,42 рази перевищують максимальне значення прикладеного до границі навантаження.

З рис. 3 видно, що у перерізах, віддалених на відстань $5a$ від центру отвору, значення динамічних радіальних напружень становить 20% від максимального значення прикладеного навантаження.

Додатковою достовірністю розробленої методики є узгодження отриманих результатів з основними принципами хвильової механіки: значення радіальних напружень є нульовими до досягнення хвилею відповідного перерізу.

При статичних навантаженнях у тріщино подібних дефектах виникає істотна концентрація напружень у околі вершини тріщини. Для можливості застосування розробленої методики до дослідження динамічної концентрації напружень у пластинках з тріщино-подібними дефектами проведено розрахунок динамічного напруженого стану та визначено максимальні значення відносних кільцевих напружень на границі еліптичного отвору у точках великої півосі. Результати числових розрахунків наведено у таблиці 1. Також для порівняння наведено значення відносних кільцевих напружень у пластинці з тріщино-подібним отвором за статичного нерівномірного навантаження [4] та величини динамічного коефіцієнта концентрації напружень k_D .

Таблиця 1.

Максимальні динамічні відносні напруження на еліптичному отворі

| Відношення півосей еліпса | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 |
|-------------------------------------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| $\sigma_{\theta}^{дин} / \sigma_0$ | 0,7376 | 1,414 | 3,693 | 7,628 | 15,401 |
| $\sigma_{\theta}^{стат} / \sigma_0$ | 0,6549 | 1,1312 | 2,829 | 5,152 | 10,16 |
| k_D | 1,126 | 1,25 | 1,305 | 1,459 | 1,516 |

Отримані результати узгоджуються з відомими даними теорії тріщин, що свідчить про достовірність розробленої методики.

Розвинута методика на основі використання перетворення Фур'є та методу граничних інтегральних рівнянь дає можливість досліджувати не тільки розподіл динамічних кільцевих напружень на границі отвору, а і радіальних напружень у пластинчастих елементах за дії імпульсних навантажень. Висока точність запропонованого підходу забезпечується використанням дискретного перетворення лише на етапі пошуку оригіналів динамічних напружень та узгодженням отриманих числових результатів з основними принципами хвильової механіки.

1. Onyshko L.I., Senyuk M.M., Onyshko O.E. Dynamic stress concentration factors in a plane with circular hole under the action of impact nonaxisymmetric loads // *Materials Science*. — 2015. — Vol. 50, No. 5. — PP. — 745-761.
2. Мікуліч О.А. Динамічна концентрація напружень біля отворів у нескінченних пластинках за дії слабкої ударної хвилі // *Наукові нотатки*. — Луцьк, ЛНТУ, 2016. Випуск 53. — С. 102-107.
3. Mikulich O.A., Shab'yuk V.I. Interaction of weak shock waves with rectangular meshes in plate // *Odes'kyi Poliethnichnyi Universytet. PRASTI*. — 2016. — Vol. 2(49). — pp. 104-110.
4. Савин Н.Г. Распределение напряжений около отверстий. — К.: Наукова думка, 1968. — 888 с.
5. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. — Москва: Мир, 1974. — 464 с.
6. Banerjee P.K. Boundary element method in engineering science, McGraw Hill, New York, London, 1994. — PP. 65 – 82.
7. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — К.: Наук. думка, 1981. — 324 с.