

УДК 539.3

**УТОЧНЕНИЙ РОЗРАХУНОК ПІДСИЛЕНИХ БАЛОК
МЕТОДОМ ПРИВЕДЕНИХ ПЕРЕРІЗІВ**

**Повідомлення 2. Уточнений розрахунок пакету балок
за неklasичною моделлю коротких балок**

**REFINED CALCULATION OF REINFORCED BEAMS
BY THE METHOD OF CONDITIONAL CROSS SECTIONS**

**Message 2. Refined calculation of the package of beams
for a non-classical model of short beams**

**Шваб'юк В.І., д.т.н., проф., Ротко В.О., магістр, Ротко С. В., к.т.н.,
доц. (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)**

**Shvabyuk V.I., Doctor of Engineering, Professor, Rotko V.O., master,
Rotko S.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor (Lutsk National
Technical University, Lutsk)**

Досліджується можливість застосування уточненого розрахунку жорсткого з'єднання підсиленних балок методом приведених поперечних перерізів за допомогою рівнянь неklasичної теорії згину коротких балок. Уточнено числовий розрахунок дерев'яного прогону, підсиленого металевою смугою. Показано, що допустиме навантаження на таку балку можна збільшити в 1,77 рази, із одночасним збільшенням її жорсткості в 1,58 рази.

In the first report on the calculation of a package of beams or strips, made from different materials and rigidly interconnected, the method of reduced sections was applied. The calculation was based on the hypothesis of the classical theory of beams, which greatly reduces its accuracy.

In this paper, the possibility of applying the refined calculation of the reinforced beams rigid conjunction by the combined cross sections method is studied using the nonclassical theory equations of short beams bending. A numerical calculation's example of a wooden stringer reinforced by a metal strip is given. It is shown that the permissible load on such beam can be increased by 1,77 times, with a simultaneous increase in its firmness by 1,58 times.

Ключові слова: короткі балки, неklasична теорія згину, метод приведених поперечних перерізів, уточнений розрахунок пакету балок.

Keywords: short beams, non-classical theory of bending, method of conditional cross-sections, refined calculation of the package of beams.

У першому повідомленні про розрахунок пакету балок або смуг, виготовлених із різних матеріалів і жорстко з'єднаних між собою, було застосовано метод приведених перерізів [3].

За допомогою цього методу розраховано напружено-деформований стан дерев'яної балки, жорстко підсиленої тонкою металевою смугою і таким чином значно підвищено допустиме навантаження на дану конструкцію. Разом із тим, цей розрахунок проводився на базі гіпотез класичної теорії балок, що значно знижує його точність[1]. Тому, для розрахунку даної конструкції буде використана уточнена теорія згину трансропних балок середньої товщини, що враховує деформації поперечного зсуву та обтиснення [2,4].

Згідно з гіпотезами уточненої теорії згину трансропних балок вирази для напружень σ_x^i , σ_y^i та переміщень $U^i(x, y_i)$, $W^i(x, y_i)$ у довільному елементі пакету (рис.1) мають вигляд [2,4]:

$$\sigma_x^i = \frac{N_x^i}{2h_i} + \frac{M_x^i}{I_i} y_i + \frac{y_i \alpha^2}{3I_i} (y_i^2 - 0,6h_i^2) \left(q_2^i - 0,5q_2'' h_i^2 \frac{G'}{E'} \right);$$

$$\sigma_y^i = q_1^i + \frac{1}{4} \left(3 \frac{y_i}{h_i} - \frac{y_i^3}{h_i^3} \right) \cdot q_2^i; \quad (1)$$

$$U^i(x, y_i) = u^i(x) + y_i \gamma_x^i - \frac{5\varepsilon_2}{3h_i^2} \left(\frac{dw_\tau}{dx} + \frac{3h_i}{8E'} \frac{dq_2^i}{dx} \right) (y_i^2 - 0,6h_i^2) y_i;$$

$$W^i(x, y_i) = w^i(x) + \left(q_1^i - \frac{\nu' N_x^i}{2h_i} \right) \cdot \frac{y_i}{E'} + \nu'' \frac{d^2 w^i}{dx^2} \cdot \frac{y_i^2}{2} + \frac{B(y_i) q_2^i}{8E' h_i},$$

$$\text{де } \gamma_x^i = (1 - \varepsilon_2) \frac{dw_\tau^i}{dx} - \frac{d\tilde{w}^i}{dx}; B(y) = y_i^2 (6A_2 - A_3 \frac{y_i^2}{h_i^2});$$

$$I_i = \frac{2}{3} h_i^3, q_1^i = \frac{1}{2} (q_i^+ - q_i^-), q_2^i = (q_i^+ + q_i^-); \alpha^2 = \frac{E}{2G'} - \nu'';$$

$$\alpha_0 = 0,5(1 - \nu' \cdot \nu''), A_2 = \alpha_0 + \frac{A'E'}{2G'}; A_3 = A_2 - 0,5\nu'\nu'';$$

$$K_i' = 4G'h_i/3; \varepsilon_1 = 0,1(4E/G' - 3\nu''); \varepsilon_2 = 0,2(1 - \nu'E'/G');$$

$$M_x^i = \int_{-h_i}^{h_i} y \sigma_x^i dy = -EI_i \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} - \varepsilon_1 h_i^2 q_2^i, Q_x^i = K_i' \frac{dw_\tau^i}{dx},$$

$$N_x^i = \int_{-h_i}^{h_i} \sigma_x^i dy = 2Eh_i \frac{du^i}{dx} + 2h_i \nu'' q_1^i - \text{згинальний момент,}$$

поперечна та поздовжня сили у брусі; u^i, w^i — відповідно тангенціальне та вертикальне переміщення середньої лінії елемента пакету у напрямку осей x та y ; E, G, E', G' — модулі пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу балки у поздовжньому та поперечному (зі штрихами) напрямках; $q^+ = 0$; $q^- = q$ — розподілене зовнішнє навантаження, прикладене до верхньої грані пакету балок; w_τ^i — зсувна складова вертикального переміщення середньої лінії відповідного бруса.

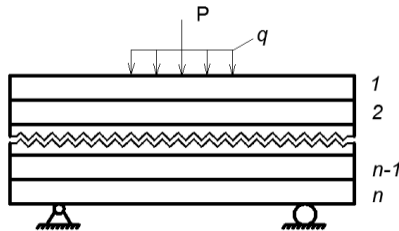


Рис. 1. Схема навантаження пакету балок

Початок системи координат розміщується посередині верхнього бруса на його середній лінії, де вісь y - ів напрямлена вниз.

Розрахункові диференціальні рівняння відносно переміщень $u^i(x)$, $w^i(x)$ та $w_\tau^i(x)$ мають вигляд [2,4]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^i}{dx^2} &= -\frac{v'}{E'} \frac{dq_1^i}{dx}; & K_i' \frac{dw_\tau^i}{dx^2} &= -q_2^i; \\ \frac{d^4 w^i}{dx^4} &= \frac{q_2^i}{EI_i} - \frac{\varepsilon_1 h_i^2}{EI_i} \cdot \frac{d^2 q_2^i}{dx^2} - \frac{\varepsilon_2 h_i^4}{4E'I_i} \frac{d^4 q_2^i}{dx^4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (2), який визначає остаточний вигляд формул для переміщень і напружень кожної точки системи елементів пакету, повинен задовольняти трьом граничним умовам на кожному з їх країв. Якщо ці краї $x = \pm l$ оперті, то такі умови мають вигляд:

$$N_x^i = 0; \quad M_x^i = 0; \quad w^i = 0. \quad (3)$$

Для випадку розподілених по поверхні брусів сталих нормальних навантажень $q_i^\pm = const$ рівняння (2), гранично спрощуються — зникають похідні від розподіленого навантаження. Із одержаних таким чином рівнянь рівноваги випливає, що за сталого навантаження ортотропія матеріалу на базову систему диференціальних рівнянь не впливає і вони відповідають (за винятком другого рівняння (2), де потрібно покласти $w_\tau^i \equiv 0$) класичній теорії тонких стрижнів Бернуллі-Ейлера, яка не враховує деформацій поперечного зсуву та обтиснення.

Розв'язок рівняння (2), за граничних умов (3), дозволяє записати узагальнений вираз для нормальних напружень у довільному елементі пакету —

$$\sigma_x^i = \frac{q_2^i y_i}{2I_i} [(l^2 - x^2) + \alpha^2 (\frac{2}{3} y_i^2 - \frac{2}{5} h_i^2)]. \quad (4)$$

Друга складова цієї формули враховує вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення. Величина цього впливу досліджена в роботах [2,3,5].

У попередньому повідомленні розраховувався дерев'яний прогін перерізом 12×20 см, жорстко підсилений металевою смугою товщиною $t = 5$ мм, що вільно обпирається на опори (рис.2), відстань між якими $2l = 2$ м. Модулі пружності цих матеріалів відповідно дорівнюють: $E_1 = 1,05 \times 10^4$ МПа та $E_2 = 2,1 \times 10^5$ МПа.

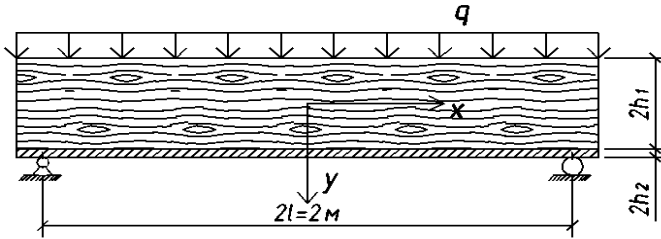


Рис. 2. Розрахункова схема підсиленої балки

Модуль зсуву у поперечному напрямі дорівнює $G' = 350 \text{ МПа}$. Приведений переріз складався із незмінної першої частини ($b_1 = 12 \text{ см}$) та зміненої нижньої частини, ширина якої множиться на коефіцієнт $n = E_2 / E_1 = 20$, тобто $b_2 = 20 \cdot b_1 = 240 \text{ см}$. Прогін був навантажений розподіленим навантаженням інтенсивністю q , яке викликає максимальний згинальний момент $M = q \cdot l^2 / 2$. Необхідно було знайти величину допустимого навантаження $[q]$ на дану балку із підкріпленням та без нього за допустимого напруження на стиск $[\sigma]_c = 35 \text{ МПа}$.

Згідно проведених розрахунків *методом приведених перерізів* було визначено момент інерції приведенного перерізу $I_{np} = 2,051 I_1 = 16408,4 \text{ см}^4$, який більш, ніж удвічі перевищує момент інерції перерізу балки без підсилення ($I_1 = b_1 h_1^3 / 12 = 8000 \text{ см}^4$), знайдено максимальні нормальні напруження у верхній та нижній точках центрального перерізу непідсиленої дерев'яної балки — $\sigma_x = \pm M h_1 / 2 I_1 = \pm 6,25 q \cdot \text{см}^{-1}$. Визначено напруження у крайніх точках поверхонь підсиленої дерев'яної балки:

$\sigma_{x1}^{(e)} = M y_1 / I_{np} = -4,09 q / \text{см}$. $\sigma_{x1}^{(e)} = M y_2 / I_{np} = 2,00 \cdot q / \text{см}$,
а також у металевій смузі:

$$\sigma_{x2}^{(e)} = 40,0 \cdot q / \text{см} \text{ і } \sigma_{x2}^{(n)} = 43,2 \cdot q / \text{см}.$$

Одночасно, за уточненою теорією, максимальне нормальне напруження у середньому перерізі балки ($x=0$) можна підраховувати за точнішою формулою (4):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \pm \frac{ql^2 h_1}{2I_1} \left(1 + \alpha^2 \frac{4}{15} \frac{h_1^2}{l^2}\right) = \\ &= \pm 6,25(1 + 0,157)q / \text{см} = \pm 7,23q \cdot \text{см},\end{aligned}$$

$$\text{де } \alpha^2 = \frac{E}{2G'} - \nu'' = 14,7.$$

Тобто, за уточненою теорією, у непідсиленій металевій смугою дерев'яній балці діє ще більше максимальне нормальне напруження (на 15,7%) від того, яке визначається за класичною теорією. Отже, реальна несуча здатність непідсиленої балки зменшується у 1,77 рази порівняно з підсиленою.

Наведені приклади розрахунку для непідсиленої балки підтверджують необхідність застосування уточненої методики і для підсиленої балки, а формулу (4) для даного випадку можна записати у такому вигляді:

$$\sigma_{xi} = \frac{q \cdot y_i}{2I_{np}} \left[(l^2 - x^2) + \alpha^2 \left(\frac{2}{3} y_i^2 - \frac{2}{5} \frac{H^2}{4} \right) \right].$$

У зв'язку з тим, що відношення довжини металевій смуги до її товщини є дуже великим ($2l/t=400$) і вплив поперечного зсуву для таких довжин є практично нульовим, то цю формулу будемо застосовувати лише до дерев'яної частини балки. Отже, максимальні значення напружень на зовнішніх гранях ($y = -y_1 = -13,42$, $y = y_2$) дерев'яної балки будуть такими:

$$\sigma_{x1}^e = \frac{ql^2 y_1}{2I_{np}} \left[1 + \alpha^2 \frac{2}{3} \frac{y_1^2}{l^2} \left(1 - \frac{3}{20} \frac{H^2}{y_1^2} \right) \right] = -4,56q / \text{см} = -456q / \text{м}.$$

$$\sigma_{x2}^n = \frac{ql^2 y_2}{2I_{np}} \left[1 + \alpha^2 \frac{2}{3} \frac{y_2^2}{l^2} \left(1 - \frac{3}{20} \frac{H^2}{y_2^2} \right) \right] = 1,96q / \text{см} = 196q / \text{м}.$$

Вважаючи, що металева смуга впливає тільки на згинальну жорсткість балки, уточнену формулу для максимального прогину підкріпленої балки можна записати у вигляді

$$w_{\max} = \frac{5ql^4}{24E_1I_{np}} (1 + 0,24(4\frac{E}{G'} - 3\nu'') \frac{H^2}{(2l)^2}).$$

Підставивши у цю формулу значення пружних характеристик дерева, момент інерції приведенного перерізу та значення параметра $H/2l$, одержимо значення максимального прогину

$$w_{\max} = \frac{5ql^4}{24E_1I_1} \frac{(1+0,3)}{2,051} = 0,633 \cdot \frac{5ql^4}{24E_1I_1}.$$

Отже, підсилення балки призведе до зменшення прогину тільки на 37% (за уточненою формулою), замість 51% (за класичною формулою).

Для визначення допустимого навантаження на підсилену балку скористаємося умовою міцності на стиск для нормальних напружень:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_c \text{ або } 456q = 40\text{МПа}.$$

Звідки знаходимо: $[q] = \frac{40}{456} = 87,7\text{кН} / \text{м}$, а без уточнення —

$$[q] = \frac{40}{409} = 97,8\text{кН} / \text{м}.$$

Тобто, у даному випадку класична теорія дає на 11,5% завищені значення для допустимого навантаження на підсилену балку, що може призвести до передчасного руйнування конструкції. Якщо ж металева смуга не прикріплена жорстко до дерев'яної балки, то тоді, згідно формул [1,3] для визначення контактних тисків між різномодульними матеріалами, тиск, що передається на металеву смугу, дорівнює:

$$p = q \left(1 + \frac{E_1 h_1^3}{E_2 h_2^3} \right)^{-1} = q / 3201 = 3,1 \cdot 10^{-4} \cdot q.$$

Такий тиск є практично нульовим і зовнішнє навантаження сприймається тільки дерев'яною балкою, а металева смуга може працювати лише на розтяг або стиск. Допустиме навантаження для такої балки дорівнюватиме $[q] = 55,3\text{кН} / \text{м}$, тобто зменшиться у 1,77 рази порівняно із підсиленою.

Таким чином, на основі числових підрахунків, можна стверджувати, що уточнене визначення напружень як у підсиленних

балках, так і у невідсилених, дозволяє дослідити розподіл зовнішнього навантаження на кожен із елементів пакету балок, вплив поперечної анізотропії на загальну міцність кожного елемента балки, надати точніші розрахунки міцності балки, а також точніше визначити гранично допустиме навантаження для таких балок.

1. Аналіз одержаних формул для екстремальних напружень у кожному елементі бруса та максимального прогину його середньої лінії свідчить, що міцність і жорсткість пакету незв'язаних елементів бруса значно знижується порівняно із суцільним брусом.

2. Вплив ортотропії матеріалу на величини нормальних напружень у невідсиленій дерев'яній балці сягає 15,7%. Вплив ортотропії матеріалу на величини переміщень є удвічі вищим і дорівнює 30%. Похибка буде ще більшою для коротших балок.

3. Допустиме навантаження на балку, підсилену 5-ти міліметровою металеву смугою, можна збільшити у 1,77 рази.

4. Жорсткість підсиленої балки за уточненою теорією збільшується у 1,58 разів, тоді як за класичною теорією вона ніби-то мала зрости у 2,05 рази.

1. Ротко С.В., Шваб'юк В.І., Ротко В.О., Матіяшук А.В. До проблеми розробки нових неklasичних теорій згину оболонки, пластин і балок (огляд) Повідомлення 1. Проблеми та принципи побудови класичної та уточнених деформаційних теорій першого рівня для ізотропних пластин і стрижнів / Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві: Збірник наукових праць. – Випуск 5. – Луцьк: Луцький НТУ. 2016 – С. 158 – 165. (0,5 друк. арк.)

2. Ротко В.О., Шваб'юк В.І. Уточнена модель згину короткої ортотропної балки з композитного матеріалу // Матеріали X Міжнародної науково-практичної конференції «Наука і світ» (27.12.2013 - 5.01.2014) – Випуск 5. – «Будівництво та архітектура». – Прага: Видавничий дім «Освіта і наука», 2014. – С.18-21.

3. Тимошенко С.П., Дж. Гере. Механіка матеріалів. Изд.-во «Мир» — М. 1976. С. 610.

4. Шваб'юк В.І. К теорії изгиба коротких трансверсально-изотропных балок // Расчет пространственных строительных конструкций. Куйбышев: КуйИСИ, 1981, в.9, с.86-91.

5. Шваб'юк В.І. Опір матеріалів: підручник — К.: Знання, 2016. — 407 с.