учета в деформационных математических моделях / Г.П. Коломийчук // Вісник ОДАБА, Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2007. –Вип. 24. – С. 133 – 138.

18. Дорофеев В.С. Трещинообразование в пологих железобетонных оболочках двоякой кривизны / В.С. Дорофеев, Г.П. Коломийчук // Вісник ОДАБА, Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2006. – Вип. 23. – С. 77 – 81.

19. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами / Н.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.

20. Карпенко Н.И. О расчете железобетонных оболочек покрытий и емкостей / Н.И. Карпенко // Прогрессивные конструкции элеваторов и совершенствование методов их расчета. – М.: Стройиздат, 1984. – С. 3–14.

УДК 691;620.191.33;539.3

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РОЗКЛАДАННЯ ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І ДЕФОРМАЦІЙ БІЛЯ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ В ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТАХ, ЩО ЗГИНАЮТЬСЯ

APPLICATION OF THE EIGENFUNCTION EXPANSION METHOD FOR RESEARCH TENSIONS AND DEFORMATIONS NEAR A MODE I CRACK TIP IN REINFORCED CONCRETE BENDING ELEMENTS

Майстренко О.Ф., к.т.н., доцент, Зінченко Г.В., аспірантка, (Одеська державна академія будівництва та архітектури, м Одеса)

Maystrenko O.F,, Ph.D., senior lecturer, Zinchenko H.V, doktoral student, (Odessa State Academy of Building and Architecture, Odessa)

У статті наведено асимптотичний аналіз напружено-деформованого стану біля вершини тріщини нормального відриву в середовищі з пошкодженістю. Описано побудову асимптотичного рішення задачі, заснованого на методі розкладання за власними функціями.

For the rational reinforced concrete constructions and their structures design it is necessary to improve calculation method, that

entails more detailed study of concrete properties and reinforced concrete constructions' work under load. Solid items structural failure is caused by macroscopic cracks formation and development. The question to determine "local" tensioning near considerable changes of body surface form is marked in a separate problem: the problem of tensioning concentration.

Thus, one of the concrete's features that has been identified recently, is its damage by technological cracks. Theses breaches are the most brittle structural to elements of material because of a specific capability to concentrate tensioning at its outfall. Their presence in the substance causes structural changes under the exploitation outer forces effects.

The subject of our research is an asymptotic analysis of field stress and deformations in the limits of a crack top in a bending elements. The search is done with the help of eigenfunction expansion method. Today asymptotic methods are widely used in modern non-linear dynamics and mechanics of a stressed solid body. It is shown that the eigenfunction expansion method results in the nonlinear eigenvalue problem. The numerical solution of the nonlinear eigenvalue problem for all the values of the mixity parameter and for all practically important values of the strain hardening (or creep) exponent is obtained.

Asymptotic analysis of singular fields of stress and deformation near the concentrators of stress has generated and continues to generate the great interest and draws the attention of many researches in the field of mechanics of a stressed solid body.

In the article asymptotic analysis of a stressed-deformed state near a mode I crack tip in the medium with the damage. The composition of asymptotic task solution, based on the eigenfunction expansion method is given.

Ключові слова: пошкодженість, асимптотичний аналіз, композиційні будівельні матеріали, напруження, деформації, метод розкладання за власними функціями.

Keywords: damaging, asymptotic analysis, composition building materials,, tensions, deformation, eigenfunction expansion method.

Вступ. Аналіз розподілів напружень, деформацій і переміщень біля вершини тріщини є однією із фундаментальних задач механіки тріщин, що представляє інтерес з теоретичної, експериментальної та обчислювальної точок зору. В даний час багато питань, пов'язаних із визначенням напружено-деформованого стану поблизу вершини дефекту, залишаються відкритими. Зараз у механіці тріщин та в цілому в механіці руйнування склалося розуміння процесу руйнування як процесу багатомасштабного та багаторівневого, для опису основних закономірностей якого слід використовувати багатомасштабні моделі. В рамках багаторівневого підходу процес руйнування моделюється за допомогою різних визначальних співвідношень на різних відстанях від вершини тріщини за допомогою введення полів напруги з різною асимптотичною поведінкою біля вершини тріщини. При побудові рішення задачі відмічається, що поля напруги, що працюють на різних відстанях від кінчика тріщини, зрощуються в зонах, де справедливі асимптотики сусідніх областей. Одним з найбільш поширених математичних методів побудови розподілів напружень, деформацій і переміщень біля кінчика тріщини є асимптотичний аналіз, який базується на підходах, розвинутих в асимптотичній теорії [2].

Аналіз досліджень. Нижче розглядаються основні рівняння і поняття механіки руйнування, запропоновані в [1], що дозволяють за допомогою методу розкладання за власними функціями описати напружено-деформований стан біля вершини тріщини в пружному середовищі.

Слід зазначити, що найбільш актуальною проблемою, яка виникає при розрахунку та конструюванні інженерних споруд, є необхідність врахування нелінійностей різного виду і сингулярностей, викликаних частковим руйнуванням біля концентраторів напружень у вигляді тріщин, гострих кутів та вирізів [3].

Ціль дослідження. Застосувати математичний апарат механіки руйнування для опису напруженно-деформованого стану біля вершини тріщини в залізобетонних елементах, що згинаються.

Методика та результати дослідження. Особливість будівельних матеріалів полягає в їх яскраво вираженій гетерогенності.

Однією з основних завдань сучасного будівельного матеріалознавства є створення багатокомпонентних матеріалів із наперед заданими властивостями. Багатокомпонентні матеріали, властивості яких відрізняються від властивостей вихідних складових, відносяться до композиційних будівельних матеріалів (КБМ) [4, 5, 6, 7].

КБМ представляють собою штучні матеріали складних структур, що складаються із двох та більше компонентів і набувають у результаті такого поєднання комплексу нових властивостей, які не притаманні вихідним складовим [7, 8, 9, 10].

Відомо, що номенклатура КБМ включає бетони, які згідно поліструктурної теорії [9, 11] представляються матеріалами типу "структура у структурі". Це зумовлено тим, що в процесі організації структури складно сформованих матеріалів спонтанно утворюються структурні дискретні елементи масштабного різного рівня з утворенням внутрішніх поверхонь розділу. Останні можна представити як тріщини, що здатні до розвитку та укрупнення, віднесені до технологічних (залишкових, спадкових) [12].

Як сказано в [13] магістральна тріщина проходить по межах розділу структурних блоків, які повторюють конфігурацію технологічних тріщин, та розділяє конструкцію на самостійні частини. Аналіз поверхні руйнування показав, що переважний розвиток має магістральна тріщина. Звертає на себе увагу мікротраєкторія магістральної тріщини – при збереженні загального напрямку вона зростає по технологічним поверхневим дефектам. Це дає підставу припустити, що керуючи технологічною пошкодженістю, можна змінювати умови, кінетику росту та мікротраєкторію магістральних тріщин.

Так, одним із важливих практичних застосувань механіки тріщин є можливість прогнозування тривалості зростання дефектів від вихідних розмірів до критичних або розрахунок залишкового ресурсу елемента конструкції на основі комплексних моделей, заснованих на теоретичних обгрунтуваннях та експериментальних даних.

На думку Голишева О.Б., виникнення тріщин у залізобетонних конструкціях пов'язане з умовами твердіння бетону та силовими, деформаційними впливами середовища (зовнішнім навантаженням, осадкою опор, зміною температури). Тріщини від перерахованих факторів найчастіше з'являються в розтягнутій частині конструкції [14].

Використання механіки руйнування в момент оцінювання КБМ не змінює уявлень про матеріал як про безперервне середовище.

Проведений аналіз методів розрахунку будівельних конструкцій не дозволив визначити методи, що враховують гетерогенність матеріалу та її вплив на загальний та локальний напружено-деформований стан конструкції [15].

Таким чином, структуру конструкції можна уявити різними моделями, вид яких залежить від поставлених цілей та вивчення її поведінки при дії експлуатаційних навантажень, а також причин, що пояснюють його.

Перейдемо до методів, що дозволяють досліджувати НДС біля вершини технологічних тріщин у залізобетонних згинальних елементах, які переходять у тріщини експлуатаційні. Відомо, що тріщини – це несуцільності матеріалу, які здатні концентрувати в місцях змикання деформації та напруги, що значно відрізняються від середніх значень в обсязі матеріалу. Тому вивчення питання НДС біля вершини технологічної тріщини є, на нашу думку, особливо важливим.

У [16] приведена схема трансформації тріщини у внутрішні поверхні розділу (ВПР), рис.1. Розкриємо поняття ВПР та опишемо коротко рис. 1 (а).

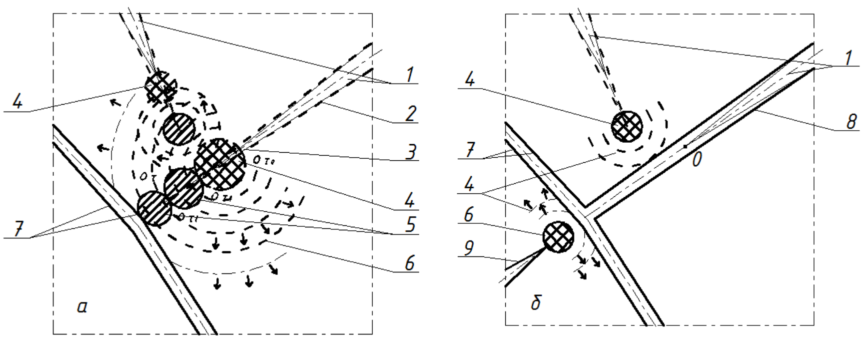

Рис. 1. Схема трансформації тріщини у ВПР:
а – ріст технологічної тріщини; б – модель структури після переходу ТТ у ВПР; 1 – ТТ; 2 – берега ТТ; 3 – гирло ТТ; 4 – зона концентрації деформацій та напруг; 5 – просування зони концентрації деформацій та напруг; 6 – деформаційні хвилі у матеріалі; 7 – берега ВПР; 8 – підростаюча ТТ.

Під внутрішніми поверхнями розділу розуміють поверхні розділу між матричним матеріалом та поверхнею заповнювачів та інших елементів (включень, арматури тощо). Це несуцільності матеріалу, які утворилися при розвитку тріщин до їх виходу на поверхню берегів інших тріщин або внутрішніх поверхонь розділу [16].

Перетворення технологічної тріщини (ТТ) в експлуатаційну тріщину (ЕТ) змінює структуру матеріалу, але при цьому не веде до встановлення рівноваги в системі (співіснування різних за видом, якісному, кількісному складу та призначенню підсистем забезпечують цілісність та призначення конструкції як системи). Релаксація локального напружено-деформованого стану відбувається при виході ЕТ на берега ВПР. У цьому випадку тріщина втрачає свій основний елемент – гирло. Енергія, яку тріщина підвела до кордону розділу, витрачається на збільшення ширини розкриття колишньої тріщини в зоні її виходу на берег ПР.

У системі відбулися якісні зміни, пов'язані з перетворенням експлуатаційної тріщини в нову для системи поверхню розділу. Аналогічні процеси відбуваються при виклинюванні однієї тріщини на береги іншої тріщини, що одну тріщину перетворює у ВПР, а зростання іншої може призупинитися за рахунок порушення цілісності одного з берегів. Завершальний цикл перетворення тріщини в межу розділу представлений на рис. 1 (б).

Для дослідження напружень і переміщень в лінійно пружних тілах в даний час зазвичай використовуються три методи: метод комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі [17], метод інтегральних перетворень [18] та метод розкладання за власними функціями [19].

Як зазначено в [1], метод розкладання за власними функціями має більш широку область застосування, ніж лінійна теорія пружності (відомі додатки цього методу до аналізу напружень і деформацій біля вершини тріщини в тілах, що зміцнюються, та в умовах повзучості, в тому числі і з урахуванням поля розсіяних пошкоджень).

Скористаємося схемою, наведеною в [19] для дослідження сингулярного поля біля вершини тріщини нормального відриву, яка розвивалася по траєкторії технологічної тріщини в залізобетонному згинальному елементі.

Як зазначено в [1], комплексний вигляд переміщень і напружень у полярній системі координат $z = re^{i\theta}$ такий:

$$2G(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{x'(z)}\right]$$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right],$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta}\left[\bar{z}\varphi''(z) + x''(z)\right] \tag{1}$$

Поблизу вершини тріщини комплексні потенціали необхідно розкласти в ряди [1]:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n z^{\lambda_n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n z^{\lambda_n + 1}, \tag{2}$$

де λ_n – це речові числа, що мають сенс власних значень.

Гранична умова на берегах тріщини сформульована таким чином:

$$\sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta} = 0 \quad (\theta = \pm\pi), \tag{3}$$

Підставляючи розкладання комплексних потенціалів в граничні умови, знаходимо (4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n r^{\lambda_n - 1} \left\{ \begin{aligned} &\lambda_n e^{i(\lambda_n - 1)\theta} \mathrm{A}_n + \\ &+ e^{-i(\lambda_n - 1)\theta} \overline{\mathrm{A}_n} + (\lambda_n + 1) e^{i(\lambda_n + 1)\theta} \mathrm{B}_n \end{aligned} \right\} = 0$$

$$(\theta = \pm\pi). \tag{4}$$

Характеристичне рівняння (5):

$$\sin 2\pi\lambda_n = 0 \tag{5}$$

приводить до низки власних значень (характеристичних чисел): $\lambda_n = n/2 \ (n = 1,2,...)$.

Від'ємні λ_n не підходять, оскільки призводять до нескінченних переміщень у разі $r \to 0$.

Значення $\lambda_n = 0$ також не підходить, оскільки в цьому випадку напруження та деформації при $r \to 0$ порядку r^{-1} і тому пружна енергія будь-якої області, що примикає до вершини тріщини, буде мати нескінченно велике значення, що не є реалістичним.

Отже, найменше власне значення є $\lambda_1 = 1/2$.

Так як

$$\lambda_n \mathrm{A}_n + (-1)^n \overline{\mathrm{A}_n} + (\lambda_n + 1)\mathrm{B}_n = 0 \quad (n = 1,2,...) \,, \tag{6}$$

то при $n = 1$ и $\lambda_1 = 1/2$ знаходимо асимптотики (7):

$$\varphi(z) = \mathrm{A}_1 z^{1/2}, \quad x(z) = \mathrm{B}_1 z^{3/2} \tag{7}$$

де $3\mathrm{B}_1 = 2\overline{\mathrm{A}_1} - \mathrm{A}_1$.

Таким чином, напруження і переміщення поблизу вершини тріщини визначаються у вигляді (8...12):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{4\sqrt{r}}\left[a_1\left(5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right) + a_2\left(-5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right], \tag{8}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4\sqrt{r}}\begin{bmatrix} a_1\left(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right) + \\ + a_2\left(-3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{4\sqrt{r}}\left[a_2\left(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2}\right) + a_1\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right)\right]; \quad (10$$

$$u_r = \frac{\sqrt{r}}{4G}\begin{bmatrix} a_1\left[(2\kappa - 1)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right] + \\ + a_2\left[-(2\kappa - 1)\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2}\right] \end{bmatrix} \quad (11$$

$$u_\theta = \frac{\sqrt{r}}{4G}\left[\begin{array}{l} a_1\left[-(2\kappa+1)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right]+ \\ +a_2\left[-(2\kappa+1)\cos\frac{\theta}{2}+3\sin\frac{3\theta}{2}\right]\end{array}\right] \qquad (12$$

де $\mathrm{A}_1 = a_1 - ia_2$.

Виділяючи симетричні та антисиметричні (по відношенню до осі x_1) члени та позначаючи $\mathrm{K_I} - i\mathrm{K_{II}} = \sqrt{2\pi}(a_1 - ia_2)$, отримаємо асимптотики для тріщин типів I (нормальний відрив) та II (поперечний зсув (детальний опис див. [1])).

Розпишемо асимптотику для тріщин нормального відриву (13 ...17):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\mathrm{K_I}\left(5\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right), \qquad (13$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\mathrm{K_I}\left(3\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (14$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\mathrm{K_I}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (15$$

$$u_r = \frac{\sqrt{r}}{4G\sqrt{2\pi}}\mathrm{K_I}\left[(2\kappa-1)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (16$$

$$u_\theta = \frac{\sqrt{r}}{4G\sqrt{2\pi}}\mathrm{K_I}\left[-(2\kappa+1)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (17$$

В [1] автор зазначає, що члени розкладів, що відповідають власним числам λ = 1,3/2,2,... , дають кінцеві при $r \to 0$ вклади в напруження.

Таким чином, за допомогою методу розкладання за власними функціями можуть бути знайдені всі наступні (несингулярні) члени розкладів напруг і переміщень біля вершини тріщини.

Висновки. У статті наведено асимптотики напружено-деформованого стану біля вершини тріщини нормального відриву в залізобетонному елементі, що згинається (в середовищі з пошкодженням), отримані за допомогою методу розкладання за власними функціями. При використанні даного методу можуть бути знайдені усі наступні (несингулярні) члени розкладів напруг і переміщень біля вершини тріщини.

Список використаних джерел

1. Астафьев В.А. Нелинейная механика разрушения / В.А. Астафьев, Ю.Н. Радаев., Л.В. Степанова. – Самара: Издательство «Самарский университет», 2001. – 20 с.

2. Яковлева Е.М. Краевые задачи о смешанном нагружении тел с разрезами с учетом накопления рассеянных повреждений в связанной постановке: Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. – Самара , 2016. - 3 с.

3. Степанова Л .В. Математические методы механики разрушения / Л .В. Степанова. – М.: Физмалит, 2009. – 336 с.

4. Ван Флек Л. Теоретическое и прикладное материаловедение / Л. Ван Флек. – М.: Атомиздат, 1975. – 472 с.

5. Дорофеев В.С. Пути снижения материалоемкости строительных материалов и конструкций: Уч. Пособие / В.С. Дорофеев, В.Н. Выровой, В.И. Соломатов. – К.: УМК ВО УССР, 1989. – 79 с.

6. Ениколонян Н.С. Композиционные материалы – материалы будущего / Н.С. Ениколонян // Журн. Всесоюз. хим. о-ва им. Д.И. Менделеева. – 1978. – т. 23. – С.243-245.

8. Неупругие свойства композиционных материалов / Под ред. К.Н. Геракович. – М.: Мир, 1978. – 295 с.

9. Соломатов В.И. Полиструктурные композиционные материалы в строительстве / В.И. Соломатов, А.Н. Бобрышев, К.Г. Химмлер; под ред. В.И. Соломатова. – М.: Стройиздат, 1988. – 312 с.

10. Соломатов В.И. Композиционные строительные материалы и конструкции пониженной материалоемкости / В.И. Соломатов, В.С. Дорофеев, В.Н. Выровой, А.В. Сиренко. – К.: Будівельник, 1991. – 144 с.

11. Соломатов В.И. Развитие полиструктурной теории композиционных строительных материалов / В.И. Соломатов // Изв. Вузов. Строительство и архитектура. – 1985. – № 8. – С. 58-54.

12. Ахвердов И.Н.Основы физики бетона / И.Н. Ахвердов – М.: Стройиздат, 1981. – 464 с.

13. Выровой В.Н. Композиционнные строительные материалы и конструкции: Структура, самоорганизация, свойства / В.Н Выровой., В.С.

Дорофеев, В.Г. Суханов; под ред. В.Н. Вырового. – Одесса: 2010. – 91 с.

14. Голышев А.Б. Сопротивление железобетона / А.Б. Голышев, В.И. Колчунов. – Киев: Логос, 2009. – С. 104-167.

15. Дорофеев В. С., Выровой В. Н. Технологическая поврежденность строительных материалов и конструкций: Моногр. / В.С. Дорофеев, В.Н. Выровой. – Одесса: Город мастеров, 1998.– 19 с.

16. Выровой В.Н. Композиционнные строительные материалы и конструкции: Структура, самоорганизация, свойства / В.Н Выровой., В.С. Дорофеев, В.Г. Суханов; под ред. В.Н. Вырового. – Одесса: 2010. – С. 133-135.

17. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – 648 с.

18. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука. Ленингр. отд., 1967. – 402 с.

19. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack / M. L. Williams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – V. 24. – P. 109-114.