УДК 624.042.5

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ГІПАРА ПРИ ДІЇ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

RESEARCH OF HYPAR STABILITY UNDER THE DISTRIBUTION OF LOAD

Пасічник Р.В., к.т.н., доцент, Пасічник О.С., к. арх., доцент, Ротко С.В., к.т.н., доцент, Матвійчук П.П., магістр (Луцький НТУ, м. Луцьк)

Pasichnyk R.V. Candidate of technical science, associate professor, Pasichnyk O.S. Candidate Architecture, associate professor, Rotko S.V. Candidate of technical science, associate professor, Matviychuk P.P., master (Lutsk national technical university)

У статті досліджується стійкість пологої оболонки типу гіперболічного параболоїда за дії рівномірно розподіленого по усій поверхні навантаження. В якості початкового в докритичній стадії приймається безмоментний напружений стан. Задача розв’язується в лінійній постановці, варіаційним методом.

The article investigates the stability of a tight shell of the type of hyperbolic paraboloid under the action of a uniformly distributed throughout the surface of the load. As an initial in the subcritical stage, a momentary stressful state is taken. The problem is solved in linear formulation, by the variational method.

The stress function is distributed along the contour according to the linear law and in the general case is not zero. To solve the problem we use the variational equation of the mixed form in which the external transverse load is replaced by the additional projection of the shift effort on the direction of the normal to the curvilinear surface

The resulted solution indicates the presence of the bifurcation point in the course of deformation of the shells. However, the upper critical load found on the basis of the solution of the problem in the nonlinear formulation is always found to be lower bifurcation due to the shear sensitivity to various kinds of imperfections. Because of this, the loading

corresponds to the shell for a ratio of f / t = 100. Dispersion here is only 3%, and the lower critical load is less than the upper of approximately 9%.

The nonlinear problem was solved by the Bubnov-Galerkin method with 11 variables for the function ω and φ. The above comparisons indicate a non-essential difference for a shell of the type of hyperbolic paraboloid bifurcation and upper critical loading.

The resulting study allows the graph to determine the upper critical value of the transverse load for a square shell with different values of the ratio f / t with an acceptable accuracy for practical calculations. The obtained results can be used in determining the upper critical value of the load of the coatings of the structures.

Ключові слова: стійкість, оболонка, гіперболічний параболоїд, варіаційний метод.

Keywords: stability, shell, hyperbolic paraboloid, variation method.

Розглянемо деформацію пологої тонкої пружної оболонки типу гіперболічного параболоїда (рис. 1) від дії поперечного навантаження (q=const) при граничних умовах, що забезпечують безмоментний напружений стан:

$$N_x=v=0\ (x=0,\ a);\ N_y=u=0\ (y=0,\ b) \tag{1}$$

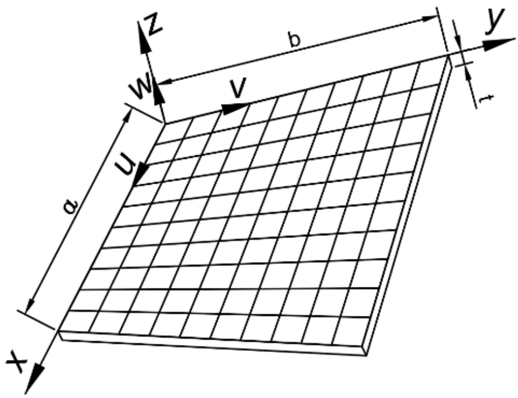

Рис. 1. Полога тонка пружна оболонка типу гіперболічного параболоїда

При цьому напружений стан характеризується зусиллями $N_x=N_y=0$, $S_{xy}=q/2k_{xy}=const$. Таким чином, дія поперечного навантаження еквівалентна дії постійного зусилля зсуву. Прогини оболонки постійні і визначаються формулою $\omega =q(1+\mu)/2Etk^2_{xy}$. В даній формулі $k_{xy}=d^2z/dxdy=f/ab$ – кривина кручення оболонки; Z(x,y) – рівняння поверхні.

Приймаючи безмоментний напружений стан за початковий, будемо рахувати, що в момент втрати стійкості оболонка має такі умови на контурі

$$W=M_x=N_x=v=0\ (x=0,\ a);\ \omega =M_y=N_y=u=0\ (y=0,\ b) \qquad (2)$$

Умови (2) відрізняються від (1) лише моментними зв'язками, що накладаються на контурі в момент втрати стійкості оболонки. Граничні умови (2) формулюються через функції прогинів *w* і напружень φ наступним чином:

$$\omega = \omega_{xx}=\varphi_{xx}=0\ (x=0,\ a);\ \omega = \omega_{yy}=\varphi_{yy}=0\ (x=0,\ b);$$

Крім цього, функція напружень розподілена вздовж контура за лінійним законом і в загальному випадку не дорівнює нулю. З точністю до лінійного доданку приймемо, що на контурі функція напружень лінійно залежить тільки від φ_k, яка, в свою чергу, залежить від величини перекосу контура оболонки. Для розв'язання задачі використаємо варіаційне рівняння змішаного виду [1], в якому зовнішнє поперечне навантаження замінено додатковою проекцією зусилля зсуву на напрям нормалі до криволінійної поверхні.

Граничні умови можна задовільнити , прийнявши

$$\omega = \sum_{m,n=1,2,\dots} A_{mn} \sin\left(m\,\pi \frac{x}{a}\right) \sin(n\,\pi\, y/b);$$
$$\varphi = \sum_{m,n=1,2,\dots} B_{mn} \sin\left[\frac{(m+1)\pi x}{a}\right] \sin\left[\frac{(n+1)\pi y}{b}\right] + \varphi xy/ab \qquad (3)$$

Аргументи при синусах у функції ω і φ відрізняються на одиницю згідно з характером деформації оболонки при поперечному навантаженні.

Ці функції задовільняють варіаційні рівняння, за виключенням інтегралів, що залежать від варіації $\delta\varphi_k$. Цій варіації відповідає наступне рівняння:

$$\begin{gathered}\iint_F \left(\frac{1}{Et}\nabla^2\nabla^2\varphi - \nabla_k^2\,\omega\right)\frac{xy}{ab}\,dxdy + \\ + \int_0^a \Big\{-\frac{1}{Et}\left[\varphi_{,yyy} + (2+\mu)\varphi_{,xxy}\right] + k_x\,\omega_{,y} - \\ -2k_{xy}\,\omega_{,x} - \vartheta_{,xx}\Big\}_{y=b}\frac{x}{a}\,dx + \\ + \int_0^b\Big\{-\frac{1}{Et}\left[\varphi_{,xxx} + (2+\mu)\varphi_{,xyy}\right] + k_y\,\omega_{,x} - \\ -2k_{xy}\,\omega_{,y} - u_{,yy}\Big\}_{x=a} y b^{-1}\,dy + \\ +\left[u_{,y} + \vartheta_{,x} + 2k_{xy}\,\omega + \left[\frac{2(1+\mu)}{Et}\right]\varphi_{,xy}\right]_{\substack{x=a\\y=b}} = 0\end{gathered} \tag{4}$$

E, μ - фізичні константи матеріалу.

Підставляючи в рівняння (4) функції (3) і інтегруючи отримані вирази, отримаємо

$$\frac{2(1+\mu)\varphi_k}{Etab} + 2k_{xy}\,\pi^{-2}\sum A_{mn}\,(mn)^{-1}[(-1)^m - 1][(-1)^n - 1] =$$
$$= -\frac{\vartheta}{a}\Big|_{\substack{x=a\\x=0}}\Big|_{y=b} - \frac{u}{b}\Big|_{\substack{y=b\\y=0}}\Big|_{x=a} \tag{5}$$

З правої частини рівняння (5) робимо висновок, що воно визначає перекіс оболонки в плані. При граничних умовах (2) перекіс неможливий, тобто права частина дорівнює нулю. Через те варіації $\delta\varphi_k$ відповідає геометричне рівняння (5), що визначає контурне значення функції напруження $\varphi_к$ через A_{mn}. При виконанні умови (5) усі контурні інтеграли варіаційних рівнянь перетворюються на нуль, і в подальшому задача зводиться до розв'язання системи рівнянь методу Бубнова-Гальоркіна, де невідомими є A_{mn} і B_{mn}:

$$\begin{cases} \iint_F \left(D\nabla^2\nabla^2\omega + \nabla_k^2\varphi + S_{xy}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right)\sin\frac{q\pi x}{a}\sin\frac{r\pi y}{b}dxdy = 0 \\ \iint_F \left(\frac{1}{Et}\nabla^2\nabla^2\varphi - \nabla_k^2\omega\right)\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}dxdy = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Із другого рівняння (6), підставляючи функції (3), визначимо

$$B_{mn} = -\frac{32k_{xy}Etik}{\pi^4 ab\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2\right]^2}\sum_{i,j} A_{i,j}lj\frac{1}{i^2-l^2}\frac{1}{k^2-j^2}, \quad (7)$$

$i = m+1\,; k = n+1.$

Суми індексів $i+1$ та $k+1$ мають бути тільки непарними. Члени ряду з парними сумами вказаних індексів перетворюються на нуль. Рівняння (7) дає змогу виразити усі невідомі значення коефіцієнтів B_{mn} через A_{mn}. Розв'язок першого рівняння (6) подамо також в загальному вигляді:

$$D\pi^2\left(\frac{q^2}{a^2}+\frac{r^2}{b^2}\right)^2 A_{qr} + \left(\frac{2k_{xy}}{qr\pi^2}\right)\varphi_k[(-1)^q-1][(-1)^r-1] +$$

$$+2S_{xy}\sum_{m,n} A_{mn}mn\left[\frac{qr}{(q^2-m^2)(r^2-n^2)}\right]\times\times[(-1)^{m+n}-1][(-1)^{n+r}-1] -$$

$$-2k_{xy}\sum_{m,n} B_{mn}(m+1)(n+1)\left[\frac{q}{q^2-(m+1)^2}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{r}{r^2-(n+1)^2}\right][1+(-1)^{m+q}][1+(-1)^{n+r}] = 0. \quad (8)$$

Подальший хід розв'язання задачі полягає в наступному. Розписуємо систему алгебраїчних рівнянь (8), де кожному фіксованому значенню пари індексів q , r відповідає одне рівняння. Використовуючи вираз (7), визначаємо усі невідомі значення $B_{m,n}$. Значення φ_k знаходимо з рівняння (5). Виключаючи з системи алгебраїчних рівнянь (8) B_{mn} і φ_k , отримуємо однорідну систему рівнянь, невідомими в якій є коефіцієнти A_{mn}. Прирівнюючи до нуля її визначник, знаходимо критичне значення зусиль зсуву S_{xy} .

Відзначимо також, що отриманий визначник системи алгебраїчних рівнянь розпадається на два: один з них відповідає парній сумі індексів $n+m$, други – непарній. Критичне значення зусилля зсуву, знайдені з другого визначника, вище, ніж зусилля, знайдені з першого.

Тому в подальшому форму втрати стійкості будемо визначати функціями (3) з парною сумою індексів.

Розглянемо розв'язок задачі, коли індекси n,m приймають значення 1, 2, 3, 4, що відповідає 17 варійованим параметрам A_{mn}, B_{mn}, φ_k з парною сумою індексів $n+m$.

Матриця системи рівнянь (8) восьмого порядку з виключеними значеннями B_{mn} і φ_k для квадратної в плані оболонки залежить від величин

$$\delta = \frac{12\,(1-\mu^2)f^2}{\pi^8 t^2};\ \bar{S} = \frac{abS_{xy}}{D\pi^4}\ ;\ \beta = \frac{a}{b}\ ;\mu = 0.25.$$

Однак критичні значення безрозмірного параметра $\bar{S}$ залежать лише від δ, тобто від відношення стріли підйому оболонки до її товщини f/t.

Прирівнюючи визначник матриці до нуля, визначаємо критичне значення параметра S для різноманітних значень коефіцієнта δ. Результати представлені у вигляді графіків на рис. 2. (крива 1).

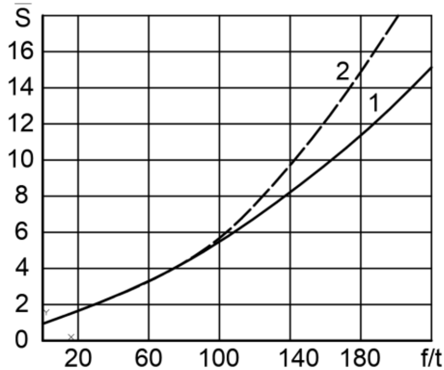

Рис. 2.Критичне значення розподіленого навантаження залежно від відношення стріли підйому до товщини оболонки:

1-при 17 варіаційних параметрах;

2-при 11 варіаційних параметрах

Визначник може бути зведений до полінома шостого порядку відносно $\bar{S}$, який має шість дійсних коренів, симетричних попарно відносно нуля навантаження. Крива 2 (рис. 2) відповідає розв'язку тої самої задачі, але з меншим числом варійованих параметрів, коли індекси m, n проходять значення 1, 2, 3 (11 варійованих параметрів).

Розв’язки несуттєво відрізняються один від одного при $f/t \leq 100$. Для більш тонких і вигнутих оболонок розходження збільшуються разом із ростом f/t і, наприклад, для оболонки $f/t=200$ складає 35%. Розв’язок першого наближення не показується через його низьку точність. При $f/t=0$ розв’язок залишається коректним і відповідає критичному значенню зусилля у плиті при зсуві [2]. За допомогою знайдених критичних значень параметра $\bar{S}$ визначається критичне значення погонного зусилля зсуву $S_{xy} = \frac{D\pi^4 \bar{S}}{ab}$. Критичне значення поперечного навантаження визначається залежністю $q_{кр} = 2\pi^4 D\, k_{xy} \bar{S} / \beta\, b^2$.

Приведений розв’язок вказує на присутність точки біфуркації у процесі деформації оболонок. Проте верхнє критичне навантаження, знайдене на основі розв’язку задачі в нелінійній постановці, завжди виявляється нижчим від біфуркаційного внаслідок чутливості оболонки до різного роду недосконалостей. Через це співставним вказані навантаження для оболонки з відношенням $f/t=100$. Розбіжність тут складають лише 3%, а нижнє критичне навантаження менше від верхнього приблизно на 9%. Нелінійна задача при цьому розв’язувалась методом Бубнова-Гальоркіна з 11 варійованими параметрами для функції ω та φ . У функціях (3) індекси m, n приймали значення 1, 2, 3 при парній їх сумі.

Наведені порівняння вказують на несуттєву відмінність для оболонки типу гіперболічного параболоїда біфуркаційного і верхнього критичного навантаження.

Таким чином, наведений графік (рис. 2, крива 1) дозволяє визначити верхнє критичне значення поперечного навантаження для квадратної оболонки з різними значеннями відношення f/t з прийнятною для практичних розрахунків точністю. Отримані результати можуть бути використані при визначенні верхнього критичного значення навантаження покриття споруд.

1. Самольянов И. И. Прочность, устойчивость и колебания гиперболического параболоида / И.И. Самольянов. — Луцк, Луцкий индустриальный институт. 1993. — 316 с.

2. Пасічник Р.В., Гоцуляк Є.О. Стійкість чотирьохпелюсткового гіпара / Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник – Випуск 78. – Київ: КНУБА. 2006 – С. 33-45.