

**ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНОГО ІМПУЛЬСУ З ЕЛІПТИЧНИМ  
ОТВОРОМ У ПРУЖНІЙ ПЛАСТИНЦІ**

**INTERACTION OF ELASTIC IMPULSE WITH ELLIPTIC  
HOLE IN ELASTIC PLATE**

**Мікуліч О.А., к.т.н., доц., Шваб'юк В.І., д.т.н., проф. (Луцький національний технічний університет)**

**Mikulich O.A., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Shvabjuk V.I., Doctor of Engineering, Professor. (Lutsk National Technical University)**

У роботі на основі модифікованого методу граничних інтегральних рівнянь досліджено динамічний напружений стан пружної пластинки, послабленої еліптичним отвором. У області Фур'є-зображень побудовані інтегральні рівняння задачі, ядра яких містять особливості типу Коші. У роботі отримані аналітичні залежності для розрахунку динамічних напружень. Проведено числовий розрахунок кільцевих напружень на границі еліптичного отвору у пластинці.

In the paper the dynamic stress state of an elastic plate with elliptic holes is studied. For the solving of the problem the boundary integral equation method is modified. Using the Fourier transform for time variable for the solving the non-stationary problem allows reducing this problem to the solving of the system of time-harmonic problems. Applying the weighted residual approach and the collocation method the potential transforms for displacements for a given load and boundary is constructed. In the paper, based on the proposed method, fundamental functions of influence for displacements are obtained. Fourier transforms of the integral equations of the problem with Cauchy type singularity are constructed. For the numerical solution of the obtained integral equations the effective algorithm is proposed. This algorithm bases on the use of the mechanical quadratures method. For calculating the dynamic hoop stresses, analytical dependencies are constructed. For determination of the dynamic stresses originals, the discrete Fourier transform is used. In

the work, the numerical calculations, on the basis of the Kuley-Tukey algorithm are implemented. On the basis of the developed method, the distribution of dynamic stresses on the boundary of the elliptic hole under the action of elastic impulse is investigated.

Ключові слова: плоска динамічна задача, еліптичний отвір, пружний імпульс

Keywords: dynamic plane problem, elliptic hole, elastic impulse

**Вступ.** Нестационарні задачі динаміки твердих деформівних тіл з дефектами у вигляді отворів та порожнин є одним з найбільш складних у механіці. Це пояснюється необхідністю застосування часових перетворень з поряд методами механіки деформівного тіла для їх розв'язання. Розрахунок на міцність тіл, що послаблені отворами чи порожнинами довільної форми необхідно проводити з урахуванням повної просторово-часової картини напруженого стану, що виникає за нестационарного навантаження.

**Аналіз останніх досліджень.** У роботах Chen Y.M., Shahani A.R., Zhang J. Y. та ін. за використання прямих числових методів скінчених різниць і скінчених елементів проведено дослідження динамічного напруженого стану у обмежених тілах з отворами та тріщинами.

До основних переваг застосування таких методів можна віднести можливість розрахунку тіл з довільною межею і дефектами довільної форми. Проте, недоліком прямих числових методів є необхідність дискретизації рівнянь руху в усій області тіла. Оскільки при динамічному навантаженні напружений стан описується швидкозмінними функціями, то за числових розрахунків цей факт вимагає згущення сітки дискретизації для забезпечення необхідної точності.

У роботах Гузя О.М., Зозулі В.В., Кубенка В.Д. [1] побудовані аналітичних розв'язків деяких класів динамічних задач. Сумісне застосування часового перетворення Лапласа та методу рядів дало можливість отримати аналітичний розв'язок задачі про вплив осесиметричного тиску, спричиненого пружним імпульсом, на динамічний напружений стан нескінченної пружної пластинки з круговим отвором.

У роботах Онишко Л.І. та ін. [2] шляхом сумісного застосування методу кінцевих різниць за часом та рядів Фур'є

відносно кутової змінної отримано розв'язок задачі про дослідження впливу довільного несиметрично-розподіленого навантаження вздовж границі кругового отвору на динамічний напружений стан пластинок.

Слід відмітити, що використання аналітичних методів дає можливість отримати розв'язки задач лише для випадку областей, що послаблених отворами кругової форми.

Тому актуальним є питання розробки аналітико-числових методів дослідження динамічного напруженого стану багатозв'язних пластинок з отворами довільної форми.

**Постановка мети і задач досліджень.** Метою роботи є побудова аналітико-числового методу дослідження динамічного напруженого стану тіл дії нестационарного навантаження на основі сумісного застосування перетворення Фур'є за часом та методу граничних інтегральних рівнянь.

Розглянемо однорідну ізотропну пластинку з модулем Юнга  $E$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ , послаблену еліптичним отвором. Позначимо через  $L$  граничний контур отвору. Декартову систему координат  $x_1 O x_2$  розмістимо у центрі ваги пластинки (рис. 1).

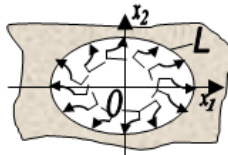


Рис. 1. Модель пружної пластинки

Дослідимо розподіл динамічних кільцевих напружень на границі отвору за осесиметричного тиску, спричиненого дією пружного імпульсу.

Граничні умови задачі записуються у вигляді [1]:

$$\sigma_n|_L = -\sigma_0\phi(t), \tau_{sn}|_L = 0, \quad (1)$$

де  $\phi(t)$ — функція зміни інтенсивності динамічного навантаження з часом  $t$ ,  $\sigma_0$  — стала, що залежить від інтенсивності навантаження. За числових розрахунків зміну інтенсивності імпульсу з часом представимо у вигляді [3]:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ p_1 t^{n_1} e^{-\alpha_1 t} H(t), & 0 \leq t \leq 1/\alpha; \\ H(t), & 1/\alpha \leq t \leq \alpha; \\ p_2 t^{n_2} e^{-\alpha_2 t} H(t), & t > \alpha, \end{cases} \quad (2)$$

де  $p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, n_1, n_2$  — сталі.

**Методика досліджень.** Застосовуючи перетворення Фур'є [4] до рівнянь руху класичної теорії пружності [5] отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{mj}}{\partial x_m} + \hat{b}_j + \omega^2 \rho \hat{u}_j = 0, \quad (3)$$

де  $\hat{\sigma}_{mj}, \hat{b}_j, \hat{u}_j$  — Фур'є-зображення напружень, об'ємних сил та переміщень. Рівняння (3) еквівалентні до рівнянь усталених коливань з циклічною частотою  $\omega$  [6].

Застосовуючи до рівнянь (3) основні принципи зваженого залишкового підходу [7] та методу колокації [7], для випадку заданих на границі напружень потенціальне зображення для переміщень записується у вигляді:

$$\hat{u}_k = \int_L p_j \cdot U_{kj}^* dL, \quad (4)$$

де  $\hat{u}_k$  — зображення переміщення у  $k$ -му напрямку,  $U_{kj}^*$  — фундаментальні функції, що відповідають переміщенню у  $k$ -му напрямку, які зумовлені дією одиничних сил у  $j$ -му напрямку,  $p_j$  — невідомі потенціальні функції,  $k, j = 1, 2$  для випадку плоскої деформації.

Використовуючи основні принципи методу граничних елементів [7], функції  $U_{ij}^*$ , що побудовані з урахуванням умов Зоммерфельда [5], записуються у вигляді [8]:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{2\pi\mu} \left( K_0(\kappa_2 r) \delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{\kappa_2^2} (K_0(\kappa_1 r) - K_0(\kappa_2 r)) \right), \quad (5)$$

де  $\kappa_1 = i\omega/c_l, \kappa_2 = i\omega/c_t$  — хвильові числа,  $c_l, c_t$  — швидкості хвиль розширення та зсуву:  $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, c_t = \sqrt{\mu/\rho}, \lambda, \mu$

— сталі Ляме,  $K_0(r)$  — модифікована функція Бесселя третього роду (функція Макдональда),  $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$  — відстань.

Підставляючи потенціальне зображення (4) з урахуванням представлень (5) у формули для визначення напружень [4], отримаємо інтегральні залежності:

$$\tilde{\sigma}_n = \int_L f_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j ds; \quad \tilde{\tau}_{sn} = \int_L g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j ds, \quad (6)$$

де  $f_j, g_j, j = 1, 2$  — відомі функції [8].

Для задоволення у області Фур'є-зображень граничних умов (1) виділимо нерегулярні складові у підінтегральних функціях та застосуємо формули Племеля-Сохоцького [5] при граничному переході. Отримаємо систему інтегральних рівнянь виду:

$$\frac{\operatorname{Re} q}{2} + \mathbf{v.p.} \int_L \left( f_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta} \right) = -\sigma_0 \hat{\phi}(\omega); \quad (7)$$

$$\frac{\operatorname{Im} q}{2} + \mathbf{v.p.} \int_L \left( g_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + g_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta} \right) = 0;$$

де  $p ds = -i q dt$ ,  $p = p_1 + ip_2$  — невідома функція,  $\hat{\phi}(\omega)$  — Фур'є-зображення функції зміни інтенсивності навантаження (2). Тут інтеграли розуміються у сенсі їх головного значення.

Система інтегральних рівнянь (7) розв'язувалася числово на основі підходу [9], що ґрунтується на методі механічних квадратур. При цьому, для інтегралів, що містять особливості типу Коші, використано уточнені квадратурні формули [10]. Використовуючи алгоритм, запропонований у [9], система інтегральних рівнянь (7) зводиться до систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих на границі функцій.

Для визначення зображень кільцевих напружень на границі отвору, підставимо потенціальне зображення для переміщень (4) у формули [5]. Отримаємо інтегральні залежності у аналітичному вигляді виду:

$$\hat{\sigma}_\theta = \frac{g}{4} \operatorname{Re} q + \mathbf{v.p.} \int_L \left( h_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + h_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta} \right); \quad (8)$$

де  $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$  — відомі функції [8],  $\mathcal{Q} = \nu/4$  для випадку плоского напруженого стану.

Розрахунок оригіналів отриманих на основі формули (8) кільцевих напружень здійснювався за використання дискретного оберненого перетворення Фур'є [4], причому за числових розрахунків було використано алгоритм Кулі-Тьюкі [11] при  $K = 2^k$ , де  $k$  — ціле додатне число.

**Результати дослідження.** Однією з переваг запропонованого модифікованого у роботі методу є використання загальних підходів до дослідження динамічного напруженого стану тіл з отворами (плоский напружений стан) чи порожнинами (плоска деформація) практично довільної форми. Для випадку отворів кругового перерізу розподіл динамічних напружень вздовж границі є сталим. Проте для отворів еліптичної, прямокутної та іншої форми розподіл кільцевих напружень змінюється вздовж границі, тому використання аналітичних методів до розв'язання такого класу задач вимагає побудови нових уточнених розв'язків.

Дослідимо розподіл динамічних кільцевих напружень на границі еліптичного отвору пружної пластинки за дії осесиметричного навантаження, заданого у вигляді (2) при наступних значеннях сталих:  $p_1 = 272$ ;  $p_2 = 0,272$ ;  $\alpha_1 = 10$ ;  $\alpha_2 = 0,1$ ;  $n_1 = n_2 = 2$ .

Числові розрахунки проводилися для 120 вузлових точок на границі та 1024 елементів дискретної вибірки у оберненому перетворенні Фур'є. Значення відносних кільцевих напружень на границі еліптичного отвору з відношенням півосей 2 (суцільні криві) та відношенням півосей 5 (штрихові лінії) наведені на рис. 2. Величини відносних кільцевих напружень визначені у п'яти точках границі:  $\theta = 0$  (крива 1),  $\theta = 30^\circ$  (крива 2),  $\theta = 30^\circ$  (крива 3),  $\theta = 60^\circ$  (крива 4),  $\theta = 90^\circ$  (крива 5).

При розрахунках приймалися наступні значення пружних характеристик матеріалу пластинки: модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, густина  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,27$ .

При розрахунках приймалося  $\sigma_0 = 1$  ГПа,  $\hat{t} = t \cdot c_1 / a$  — безрозмірний часовий параметр,  $a$  — деякий характерний розмір.

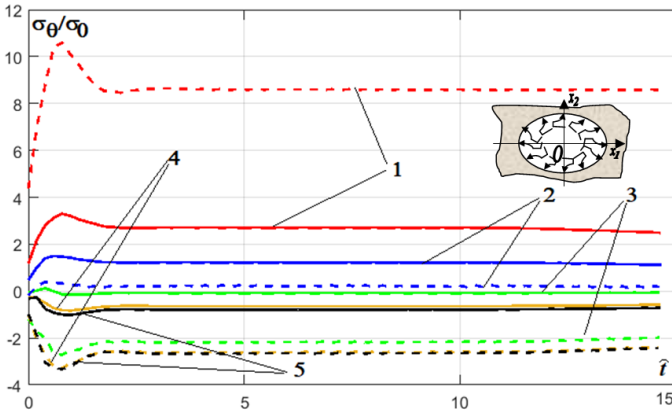


Рис. 2. Розподіл динамічних напружень у пластинці з еліптичним отвором

З рис. 2 видно, що для отворів еліптичної форми відбувається істотне зростання динамічних кільцевих напружень у точках великої півосі: максимальні значення напружень для еліптичного отвору з відношенням півосей 2 становлять  $3,3 \sigma_0$ , а для випадку відношення півосей 5 —  $10,6 \sigma_0$ . Також для отворів еліптичної форми характерна наявність стискувальних напружень у околі точок малої півосі, що не є характерним для кругових отворів.

Повну картину зміни динамічних напружень з часом вздовж границі отвору можна дослідити, побудувавши часові зрізи полів напружень у певні моменти часу. Результати цих розрахунків наведені на рис. 3 для еліптичного отвору з відношенням півосей 2 при  $\hat{t} = 0,2$  (крива 1),  $\hat{t} = 0,4$  (крива 2),  $\hat{t} = 0,8$  (крива 3).

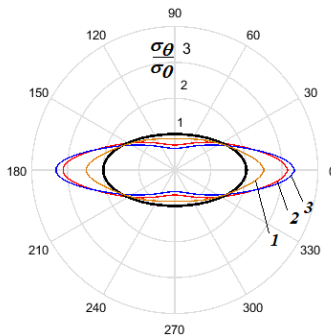


Рис. 3. Часові зрізи динамічних напружень на границі еліптичного отвору з відношення півосей 2

З рис. 3 видно, що за дії динамічного навантаження у вигляді осесиметричного тиску, який виникає від пружного ударного імпульсу, прикладеного до границі еліптичного отвору, знак відносних кільцевих напружень у точках малої півосі протилежний до знаку напружень у точках великої півосі. Тобто, кільцеві напруження вздовж границі еліптичного отвору мають знакозмінний характер.

**Висновки.** Використання розробленого методу на основі застосування перетворення Фур'є та модифікації методу граничних інтегральних рівнянь дає можливість виявити певні особливості розподілів динамічних напружень на границі отворів некругової форми. Перевагою запропонованого методу є можливість дослідження зміни динамічних напружень з часом не тільки у певних точках, а і побудова часових зрізів полів напружень вздовж границі отвору.

**1.** Kubenko V.D. Nonstationary contact of a rigid body with an elastic medium: Plane problem (Review). // *Int. Appl. Mech.* — 2012. — Vol. 48, No. 5. — pp.-121-129. **2.** Onyshko L.I., Senyuk M.M., Onyshko O.E. Dynamic stress concentration factors in a plane with circular hole under the action of impact nonaxisymmetric loads // *Materials Science.* — 2015. — Vol. 50, No. 5. — PP. — 745-761. **3.** Шваб'юк В.І., Мікуліч О.А., Шваб'юк В.В. Напружений стан пінистих середовищ із тунельними порожнинами при нестационарному динамічному навантаженні // *Проблеми прочності.* — 2017. — 6. — С. 99-110. **4.** Salih M.S. Fourier Transform - Signal Processing and Physical Sciences / M.S. Salih. — London: InTech, 2015. — 222 pp. **5.** Божидарнік В.В. Елементи теорії пружності / В.В. Божидарнік, Г.Т. Сулим. — Л.: Світ, 1994. — 560с. **6.** Савин Н.Г. Распределение напряжений около отверстий. — К.: Наукова думка, 1968. — 888 с. **7.** Banerjee P.K. Boundary element method in engineering science, McGraw Hill, New York, London, 1994. — PP. 65 – 82. **8.** Mikulich O.A., Shab'yuk V.I. Interaction of weak shock waves with rectangular meshes in plate // *Odes'kyi Poliethnichnyi Universytet. PRASTI.* — 2016. — Vol. 2(49). — pp. 104-110. **9.** V. Shvabyuk, H. Sulym, O. Mikulich Stress state of plate with incisions under the action of oscillating concentrated forces. // *Acta Mechanica et Automatica.* — 2015.— Vol. 9, No. 3. — pp. 140-144. **10.** Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — К.: Наук. думка, 1981. — 324 с. **11.** Т.В. Сидорова, Т. В. Зыкова, К. В. Сафонов. О модификации быстрого одномерного преобразования Фурье по алгоритму Кули–Тьюки. // *Вестник СибГАУ.* — 2015. — Т. 16, № 2. — С. 360–363.