УДК 519.2:303.092.5-047.44
JEL Classification: C12, C46
Doi: 10.31767/su. 4(83)2018.04.02

Ф. В. Моцний,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри економіко-математичних дисциплін і інформаційних технологій,
Національна академія статистики, обліку та аудиту,
E-mail: fv.motsnyi@ukr.net; motsnyifv@gmail.com

Аналіз непараметричних і параметричних критеріїв перевірки статистичних гіпотез. Частина І. Критерії узгодження Пірсона і Колмогорова

Розглянуто статистичні критерії узгодження, що використовуються для перевірки гіпотез про закони розподілу генеральної сукупності. З єдиної позиції всебічно проаналізовані відомі непараметричні критерії Пірсона та Колмогорова. З'ясовані особливості їх застосування. Узагальнені результати численних теоретичних і прикладних досліджень. Запропоновані та розв'язані типові задачі.

Ключеві слова: *математична статистика, вибірка, випадкові величини, статистичні гіпотези, число ступенів вільності, критична точка, емпірична частота, теоретична частота, емпірична функція, теоретична функція, закони розподілу, непараметричні критерії, критерій Пірсона, критерій Колмогорова.*

Будь-які припущення чи передбачення того чи іншого закону розподілу випадкових величин завжди є статистичними гіпотезами. Об'єктивні дані про них можна отримати за допомогою спеціальних статистичних правил, які називаються критеріями узгодження. Ця стаття є логічним продовженням попередніх робіт автора [1; 2] і присвячується непараметричним і параметричним критеріям перевірки статистичних гіпотез [3–16], що широко застосовуються в математичній статистиці. Це дає можливість охопити проблему в цілому, оцінити рівень статистичної достовірності між різними показниками, об'єктивно виміряти в межах імовірнісних підходів ступінь ризику, а також з'ясувати, за яких умов гіпотези можна прийняти, а за яких – відхилити.

При статистичній обробці експериментальних результатів надзвичайно важливо знати закони розподілу генеральної сукупності [17]. Оскільки усі припущення щодо законів розподілу є гіпотезами, то їх необхідно перевіряти. Перевірка гіпотез здійснюється за допомогою статистичних критеріїв [7; 17; 18], що поділяють множину їх можливих значень на дві протилежні підмножини A і $\overline{A}$, в одній з яких нульова гіпотеза H_0 приймається, а в іншій – відхиляється. Знання закону розподілу є необхідною умовою використання численних математичних методів. Якщо розбіжність між емпіричним і теоретичним розподілами виявиться випадковою, то дані спостережень (вибірка) узгоджуються з гіпотезою про закон розподілу генеральної сукупності й гіпотеза приймається. Якщо ж розбіжність виявиться суттєвою, то дані спостережень не узгоджуються з гіпотезою і вона відхиляється. Зазначимо також, що критерії узгодження можна розділити на загальні та спеціальні. Перші з них застосовують до гіпотез про узгодження експериментальних даних з будь-яким можливим розподілом, а другі – при перевірці гіпотези щодо конкретного виду розподілу (нормальний, експоненціальний, рівномірний). Для перевірки статистичних гіпотез відомо близько шести десятків різних критеріїв узгодження [19; 20]. З їх допомогою можна отримати об'єктивні дані про те, за яких умов розбіжності між емпіричними і теоретичними розподілами є випадковими (несуттєвими), а за яких – принциповими (суттєвими). Розглянемо найбільш затребувані критерії.

Непараметричні критерії узгодження не включають в розрахунки параметри розподілу ймовірностей і оперують лише з частотами. Вони не дозволяють оцінити безпосередньо математичне сподівання (середнє), дисперсію, середнє квадратичне відхилення та взаємовплив двох і більше факторів на зміну ознаки. У такий спосіб можна виявити як зміни досліджуваної ознаки, так і різницю в її розподілах. Ось чому непараметричні критерії широко використовуються при аналізі емпіричних даних, перевірці моделей надійності, простих і складних гіпотез і займають чільне місце в науці та практиці [7; 16; 17; 19]. До них належать відомі статистичні критерії узгодження Пірсона (K. Pearson), Колмогорова – Смірнова, Кейпера (N. Kuiper), Ватсона (G. Watson), Андерсона – Дарлинга (T. Anderson, D. Darling), Жанга (J. Zhang), Манна – Уітні (Mann – Whitney U-test), Уілкоксона (Wilcoxon signed-rank test) та ін. [19; 20]. Зупинимося на перших двох критеріях, які, на наш погляд, використовуються в математичній статистиці найбільш часто.

Критерій узгодження Пірсона (критерій хі-квадрат) – це статистичний непараметричний критерій, що має розподіл χ^2 і використовується для перевірки нульової гіпотези H_0 про підпорядкованість емпіричного закону розподілу вибірки $F_n^*(x)$ теоретично передбачуваному закону розподілу *F(x)* генеральної сукупності при великих обсягах вибірки ($n \geq 50$). Цей критерій пов'язаний з розрахунком теоретичної частоти, є універсальним і одним із найбільш потужних, оскільки застосовується для довільних теоретичних функцій *F(x)*, включаючи навіть ті, що мають невідомі значення параметрів [21].

Розглянемо вибірку дискретного статистичного ряду обсягом *n*, згруповану в *m* частинних неперетинних інтервалів (x_i, x_{i+1}) за правилом Стерджеса. Нехай для кожного з цих інтервалів отримано емпіричні частоти n_i^e, причому $\sum_{i=1}^{m} n_i^e = n$. Вважатимемо далі, що закон розподілу випадкових величин є нормальним. За допомогою різниці функцій Лапласа [21; 22] знайдемо теоретичні ймовірності p_i^t попадання випадкової величини *x* в частинний інтервал (x_i, x_{i+1}):

$$p_i^t = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i), \qquad (1)$$

де $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^z e^{-t^2/2} \cdot dt$ – функція Лапласа;

$z_i = \frac{1}{\sigma_S^*} \cdot (x_i - \overline{x}_S^*)$; $z_{i+1} = \frac{1}{\sigma_S^*} \cdot (x_{i+1} - \overline{x}_S^*)$;

$\overline{x}_S^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i$; $(\sigma_S^*)^2 = \frac{1}{n} \cdot [\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x}_S^*)^2 \cdot n_i]$;

$\overline{x}_S^*$ – вибіркове середнє; σ_S^* – вибіркове середнє квадратичне відхилення. Пошукові теоретичні частоти попадання випадкової величини *x* в інтервал (x_i, x_{i+1}) дорівнюють [22]:

$$n_i^t = n \cdot p_i^t. \qquad (2)$$

Для перевірки нульової гіпотези H_0 про закон розподілу ознаки генеральної сукупності при заданому рівні значущості α К. Пірсон запропонував використовувати міру розбіжності між емпіричними n_i^e і теоретичними n_i^t частотами, що визначається таким співвідношенням [21–23]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i^e - n_i^t)^2}{n_i^t}. \qquad (3)$$

Зазначимо, що критерій узгодження Пірсона є випадковою величиною, оскільки в різних спостереженнях приймає різні невідомі раніше значення і має розподіл χ^2. Із формули (3) випливає, що чим менше різняться емпіричні та теоретичні частоти, тим менше розрахункова величина χ^2, тобто тим менше розходження між емпіричними і теоретичними частотами. Зокрема, якщо емпіричні й теоретичні частоти є рівними ($n_i^e = n_i^t$), то $\chi^2 = 0$, якщо ж вони не дорівнюють одна одній ($n_i^e \neq n_i^t$), то $\chi^2 > 0$. Оскільки статистика Пірсона визначається розбіжністю між емпіричними і теоретичними частотами, то чим більші статистичні (емпіричні) значення χ_e^2, тим більш вагомі аргументи проти нульової гіпотези H_0 на користь альтернативної гіпотези H_1. Тому критична область для цієї статистики є завжди правобічною $(\chi_{кр}^2, +\infty)$.

З іншого боку, якщо нульова гіпотеза H_0 правильна, то теорема Пірсона [24] стверджує, що для $x>0$ при $n \to \infty$ має місце збіжність:

$$P(\chi^2 < x) \Rightarrow \int_0^x p_{k-1}(t)\,dt, \qquad (4)$$

де $P(\chi^2 < x)$ – імовірність того, що випадкова величина χ^2 прийме значення менше *x*;

$p_{k-1}(t) = \frac{t^{(k-2)/2} \cdot e^{-t/2}}{[2(k-1)/2]\Gamma[(k-1)/2]}$ – густина розподілу.

Величина χ^2 практично не залежить від вигляду гіпотетичної функції *F*(*x*) генеральної сукупності, а залежить лише від числа ступенів вільності *k*, що визначається формулою [21–23]:

$$k = m - s - 1, \qquad (5)$$

де *s* – кількість накладених зв'язків, число показників емпіричного ряду, що зв'язують емпіричні й теоретичні частоти. При цьому необхідно підкреслити, що наявність одиниці у формулі (5) відбиває факт накладення на число *k* ще одного зв'язку, що задається умовою нормування емпіричної ймовірності $\sum_{i=1}^{m} p_i^e = 1$, де $p_i^e = n_i^e / n$. Отже, число ступенів вільності *k* визначається як різниця між кількістю інтервалів групування і кількістю накладених зв'язків. Якщо ж порівнювати далі емпіричні та теоретичні частоти за умови, що математичне сподівання (дисперсія) або математичне сподівання і дисперсія мають певні значення, то слід додати ще один або два зв'язки. Тоді $k = m - 1 - 1 = m - 2$, або $k = m - 1 - 1 - 1 = m - 3$ відповідно. Отже, вирівнювання по кривій нормального розподілу додає два зв'язки (*s*=2, математичне сподівання *a* та середнє квадратичне відхилення σ), тому $k = m - 3$.

Для перевірки нульової гіпотези H_0 при заданому рівні значущості α за критерієм узгодження Пірсона необхідно розрахувати спочатку теоретичні частоти n_i^t, використовуючи формули (2) і (1), а потім емпіричне значення χ_e^2 за формулою (3). За таблицею критичних точок розподілу χ^2 знаходимо критичну точку $\chi_{кр}^2(\alpha; k)$ при заданому рівні значущості α і числі ступенів вільності *k*. Якщо виявиться, що $\chi_e^2 < \chi_{кр}^2(\alpha; k)$, то немає підстав для відхилення нульової гіпотези H_0, якщо ж отримаємо протилежну нерівність, то цю гіпотезу слід відхилити. Наприклад, для *k*=1 і $\chi_{кр}^2 = 5{,}41$ рівень значущості α =0,02, тобто 2%. Отже, можна стверджувати, що ймовірність збігу емпіричного і теоретичного розподілів знаходиться на рівні 98%. Якщо ж взяти кількість ступенів вільності *k*=5, то для забезпечення того самого рівня збігу величина $\chi_{кр}^2$ $(0{,}02; 5)$ має бути не менше 13,39.

Зауваження.

1. Критерій узгодження Пірсона не доводить справедливість нульової гіпотези H_0, а лише встановлює при певному рівні значущості α її узгодженість чи неузгодженість з емпіричними (фактичними) даними. Для підвищення точності розрахунків рекомендується, щоб обсяг вибірки був досить великим (не менше 50), а частоти кожного інтервалу групування містили 5–10 варіант [21].

2. Інтервали групування не повинні перетинатися, мають охоплювати весь діапазон варіант і бути однаковими у всіх розподілах, що порівнюються. Сума частот інтервалів має дорівнювати загальному обсягу частот вибірки *n*.

3. Контроль перевірки правильності розрахунків зручно проводити за такою формулою [21]:

$$\chi_e^2 = [\sum_{i=1}^{m} (n_i^e)^2 / n_i^t] - n, \qquad (6)$$

оскільки вона не потребує обчислення квадратів відхилень.

4. Критерій хі-квадрат використовується для порівняння як емпіричного розподілу ознаки з теоретичним (нормальним, рівномірним чи іншим) розподілом, так і двох, трьох чи більше емпіричних розподілів однієї і тієї самої ознаки.

5. Недоліком критерію узгодження Пірсона є втрата частини вихідної інформації на вибірках з низькочастотними подіями (n<5), що збільшує величину помилок. Точність розрахунку критерію підвищується при використанні корекції Йєтса [25], сутність якої полягає у відхилені низькочастотних подій або об'єднанні їх з іншими подіями.

Продемонструємо застосування критерію Пірсона при розгляді таких двох типових задач.

Приклад 1. Із скриньки, що містить однакову кількість зелених і червоних кульок, навмання виймається 100 кульок. Виявилося, що серед них зелених кульок – 47, а червоних – 53. Треба перевірити при рівні значущості α = 0,05 нульову гіпотезу H_0 про те, що розбіжність між емпіричними і теоретичними частотами є незначною.

Розв'язання. Дано:

$$n=100;\ n_{зел}=47;\ n_{черв}=53;\ m=2;\ k=1;$$

$$\alpha = 0{,}05.\ \chi_e^2 - ?\ \chi_{кр}^2 - ?$$

Відношення кількості зелених і червоних кульок у вибірці сумірне теоретичній частоті всієї генеральної сукупності (50/50). Згідно з формулами (3) і (6) маємо:

$$\chi_e^2 = \frac{(47-50)^2}{50} + \frac{(53-50)^2}{50} = \frac{18}{50} = 0{,}36.$$

Контроль:

$$\chi_e^2 = \frac{47^2}{50} + \frac{53^2}{50} - 100 = 100{,}36 - 100 = 0{,}36.$$

Отже, розрахунки χ_e^2 виконано правильно. За даними таблиці критичних точок розподілу χ^2 для заданої кількості ступенів вільності *k*=1 при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ знаходимо, що $\chi_{кр}^2\ (0{,}05; 1) = 3{,}84$. Оскільки $\chi_e^2 < \chi_{кр}^2\ (0{,}05; 1)$, бо 0,36<3,84, нульова гіпотеза H_0 приймається. Це свідчить, що розбіжність між емпіричними й теоретичними частотами є незначною.

Приклад 2. Емпіричні й теоретичні частоти наведено в табл. 1. Перевірити при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ нульову гіпотезу H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Таблиця 1

Розподіл емпіричних і теоретичних частот

Емпіричні частоти, n_i^e	10	17	42	78	110	89	34	18
Теоретичні частоти, n_i^t	7	18	46	86	103	80	41	17

Розв'язання. Дано:

n=398; $\alpha = 0{,}05$; m=8; s =2. χ_e^2 – ?

Проведемо необхідні розрахунки, враховуючи формули (3) і (6). Отримані результати занесемо в табл. 2.

Отримані дані підставимо у формулу (3) і знайдемо спостережуване значення:

Таблиця 2

Дані для визначення критерію Пірсона

i	n_i^e	n_i^t	$n_i^e - n_i^t$	$(n_i^e - n_i^t)^2$	$\frac{(n_i^e - n_i^t)^2}{n_i^t}$	$(n_i^e)^2$	$\frac{(n_i^e)^2}{n_i^t}$
1	10	7	+3	9	1,29	100	14,29
2	17	18	–1	1	0.06	289	16,06
3	42	46	–4	16	0,35	1764	38,35
4	78	86	–8	64	0,74	6084	70,74
5	110	103	+7	49	0,48	12100	117,48
6	89	80	+9	81	1,01	7921	99,01
7	34	41	–7	49	1,20	1156	28,20
8	18	17	+1	1	0,06	324	19,06
$\sum$	398	398	x	x	$\chi_e^2 = 5{,}19$	x	403,19

$$\chi_e^2 = 1{,}29 + 0{,}06 + 0{,}35 + 0{,}74 + 0{,}48 + \\ + 1{,}01 + 1{,}20 + 0{,}06 = 5{,}19.$$

Контроль:

$$\chi_e^2 = (14{,}29 + 16{,}06 + 38{,}35 + 70{,}74 + 117{,}48 + 99{,}01 + \\ + 28{,}20 + 19{,}06) - 398 = 403{,}19 - 398 = 5{,}19.$$

Отже, розрахунки виконано правильно. Оцінимо далі кількість ступенів вільності:

$$k = m - s - 1 = 8 - 2 - 1 - 1 = 8 - 3 = 5.$$

За даними таблиці критичних точок розподілу χ^2 для заданої кількості ступенів вільності k=5 при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ знаходимо, що $\chi^2_{кр}(0{,}05;5) = 11{,}1$. Оскільки $\chi_e^2 < \chi^2_{кр}(0{,}05;5)$, нульова гіпотеза H_0 приймається, тобто результати досліджень узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Отже, наведене вище переконливо свідчить, що непараметричний критерій узгодження Пірсона є вагомим статистичним критерієм перевірки нульової гіпотези H_0 про встановлення міри розбіжності між емпіричними n_i^e і теоретичними n_i^t частотами при заданому рівні значущості α і числі ступенів вільності k і тому знаходить широке застосування в науці та практиці.

Критерій узгодження Колмогорова (Колмогорова – Смірнова) – це непараметричний статистичний критерій на основі розподілу Колмогорова, що базується на визначенні максимальної розбіжності між емпіричними і теоретичними частотами та використовується для перевірки нульової гіпотези H_0 про підпорядкованість спостережуваної вибірки теоретичному закону розподілу генеральної сукупності. За міру розбіжності між емпіричним і теоретичним законом розподілу незалежних однаково розподілених випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ використовується статистика Колмогорова [26–29]:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| F_n^*(x) - F(x) \right|, \tag{7}$$

де $F_n^*(x)$ – емпірична функція розподілу вибірки, $F(x)$ – теоретична функція розподілу генеральної сукупності з відомими параметрами. Якщо нульова гіпотеза H_0 правильна, то величина D_n є малою, оскільки в протилежному випадку ця гіпотеза відхилялася б. Розподіл випадкової величини $\sqrt{n} \cdot D_n$, як довів А. Колмогоров [28], не залежить від гіпотетичної функції $F(x)$ при необмеженому зростанні кількості незалежних вимірів і рівномірно збігається до розподілу

$$\lim_{n \to \infty} P(\sqrt{n} \cdot D_n < \lambda) = K(\lambda), \tag{8}$$

де $K(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \cdot e^{-2m^2\lambda^2}, \ \lambda \geq 0$ – функція Колмогорова. Якщо нульова гіпотеза H_0 правильна, то згідно з [28; 30] ймовірність

$$P(\sqrt{n} \cdot D_n \geq \lambda) = 1 - K(\lambda) = \alpha \Rightarrow K(\lambda) = 1 - \alpha \ .$$

Якщо задамо рівень значущості α, знайдемо $K(\lambda(\alpha))$. Використаємо далі таблицю математичної статистики [30] і за значеннями функції $P(\sqrt{n} \cdot D_n \geq \lambda)$ знайдемо критичне (табличне) значення $\lambda_{кр} = \lambda(\alpha)$. Якщо $F(\lambda_{кр}) = \alpha$, то $\lambda_{кр} = F^{-1}(\alpha)$ – квантиль на рівні α (будь-яке число, що задовольняє двом умовам: $F(\lambda_{кр}) < \alpha$ і $F(\lambda_{кр} + 0) \geq \alpha$, еквівалентним умовам $P(\sqrt{n} \cdot D_n < \lambda_{кр}) \leq \alpha$ і $P(\sqrt{n} \cdot D_n \geq \lambda_{кр}) \leq 1 - \alpha$, відповідно до [31]). Отже, нульова гіпотеза H_0 приймається, якщо $\sqrt{n} \cdot D_n < \lambda_{кр}$ (тобто статистика Колмогорова

$\sqrt{n}\cdot D_n$ менше квантиля розподілу $F^{-1}(\alpha)$ при заданому рівні значущості α), і відхиляється в протилежному випадку, тобто якщо $\sqrt{n}\cdot D_n \geq \lambda$.

Критичні точки $\lambda_{кр}$ для розподілу Колмогорова при заданих рівнях значущості α представлені в табл. 3 (за даними [30]). Видно, що зі зменшенням α критичні значення $\lambda_{кр}$ зростають.

Таблиця 3

Критичні точки $\lambda_{кр}$ для розподілу Колмогорова

α	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
$\lambda_{кр}$	0,83	0,90	0,97	1,07	1,22	1,36	1,48	1,63	1,73	1,95

Загальна схема перевірки нульової гіпотези H_0 про підпорядкованість емпіричної вибірки теоретичному закону розподілу генеральної сукупності згідно з критерієм узгодження Колмогорова є такою:

1. Будують емпіричну функцію $F_n^*(x)$ і теоретичну $F(x)$ розподілу генеральної сукупності і знаходять статистику D_n як модуль максимальної розбіжності між цими функціями.

2. Обчислюють емпіричне значення $\lambda_e = \sqrt{n}\cdot D_n$.

3. Підсумовують результати статистичного дослідження. Якщо виявиться, що $\lambda_e \geq \lambda_{кр}$, то нульова гіпотеза H_0 про підпорядкованість спостережуваної вибірки теоретичному закону розподілу генеральної сукупності відхиляється. У протилежному випадку немає підстав для відхилення нульової гіпотези H_0, бо вона не суперечить факту розподілу емпіричних даних за заданим законом розподілу.

Імовірність попадання неперервної функції $F(x)$ генеральної сукупності в довірчу область $(-d_\alpha, d_\alpha)$ навколо емпіричної функції $F_n^*(x)$ визначається формулою [29]:

$$P(F_n^*(x) - d_\alpha \leq F_n^*(x) + d_\alpha) = 1-\alpha, \quad (9)$$

де d_α – критичне значення D_α при рівні значущості α. Це свідчить, що теоретична функція $F(x)$ з імовірністю $(1-\alpha)$ знаходиться всередині цієї області. Оскільки згідно з [29]

$$d_\alpha \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{-\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{2}},$$

то легко оцінити обсяг вибірки *n* для апроксимації функції $F(x)$.

Критерій узгодження Колмогорова використовується для перевірки нульової гіпотези H_0 про підпорядкованість досліджуваної вибірки нормальному закону розподілу. За параметри беруть вибіркові середні та дисперсії і враховують додатково модифіковану статистику такого виду:

$$D_n^{**} = D_n(\sqrt{n} - 0{,}01 + 0{,}85/\sqrt{n}). \quad (10)$$

Критичні значення D_n^{**} приведені в табл. 4 (за даними [26; 32]).

Таблиця 4

Критичні значення статистики D_n^{**}

α	0,15	0,10	0,05	0.03	0,01
D_n^{**}	0,775	0,819	0,895	0,995	1,035

Як і слід було очікувати, зменшення α сприяє зростанню D_n^{**}.

Отже, критерій узгодження Колмогорова використовується для зіставлення емпіричного й теоретичного розподілів і дозволяє, що надзвичайно важливо, знайти точку, в якій розбіжність між розподілами є максимальною і статистично достовірною. Аналізований критерій, зокрема, знаходить широке застосування при експериментальній перевірці законів спадковості Менделя [33].

Зауваження.

1. Основною вимогою для застосування критерію Колмогорова – Смірнова є досить значний обсяг вибірки (n>50). При менших обсягах вибірки (25<n<50) рекомендується використовувати статистику з уточненням $D_n^{***} = \sqrt{n}\cdot D_n + 1/(6\cdot\sqrt{n})$ [26; 32], яка за правильної нульової гіпотези H_0 про підпорядкованість спостережуваної вибірки деякому гіпотетичному закону розподілу генеральної сукупності швидко збігається до розподілу Колмогорова і практично не залежить від обсягу вибірки при n>25.

2. У критерії Колмогорова – Смірнова використовуються лише найбільші розбіжності між емпіричною і теоретичною функціями розподілу генеральної сукупності, тому частина інформації, що міститься у вибірці, завідомо губиться.

3. Критерій Колмогорова – Смірнова застосовується при визначених параметрах гіпотетичної функції $F(x)$ розподілу генеральної сукупнос-

ті. Якщо параметри цього розподілу заздалегідь невідомі, використовуються їх вибіркові оцінки, отримані з емпіричних даних. У результаті такої процедури існують певні ризики прийняти нульову гіпотезу H_0 як правильну, хоча в дійсності вона може бути помилковою [34].

4. Критерій Колмогорова – Смірнова відбиває зміни у вибірках і тому може застосовуватися для перевірки нульової гіпотези H_0 про відповідність (невідповідність) емпіричних законів розподілу вибірок одному і тому самому гіпотетичному закону розподілу [39].

5. Якщо застосувати критерії Пірсона і Колмогорова до однієї і тієї самої вибірки з метою перевірки нульової гіпотези H_0 , то результати, отримані за критерієм Пірсона, будуть точнішими, ніж отримані за критерієм Колмогорова, оскільки у першому випадку використовуються практично усі дані спостережень.

6. Виконання лабораторних робіт, присвячених критеріям узгодження Пірсона [35–37] і Колмогорова [38], із урахуванням вимог метрології, стандартизації і сертифікації [17] сприяє глибшому засвоєнню теоретичного матеріалу і кращому розумінню сутності цих критеріїв.

Застосуємо критерії Пірсона і Колмогорова для розв'язання задачі, в основу якої покладені експериментальні дані з роботи [40].

Приклад 3. Розподіл температури в літній період на поверхні води гідрологічної станції в Білому морі близький до симетричного (табл. 5, за даними [40]). Рівень значущості α =0,05. Треба перевірити на основі критеріїв узгодження Пірсона і Колмогорова нульову гіпотезу H_0 про підпорядкованість експериментальних даних нормальному закону розподілу.

Розв'язання. Дано:

$$n=100,\ m=6,\ s=2,\ k=3,\ \chi^2-?\ \ x_\alpha-?$$

1. Перевірка нульової гіпотези на основі критерію узгодження Пірсона.

Аналізуючи результати, наведені в табл. 5, бачимо, що емпіричні частоти першої і останньої варіант менші за п'ять, тому для отримання більш достовірних результатів урахуємо рекомендації Ф. Йєтса [25] і об'єднаємо першу варіанту з другою, сьому з восьмою. Результати таких змін в розподілі частот представлено в табл. 5 у дужках, а саме, 10 і 12 відповідно. Знайдемо величини хі-квадрат за формулою (3) і занесемо отримані результати в табл. 5.

$$\chi_e^2=0{,}758+0{,}682+0{,}344+0{,}441+0{,}035+0{,}014=2{,}274.$$

Контроль: $\chi_e^2=103{,}27-100=3{,}27.$

Таблиця 5

Дані для перевірки нульової гіпотези на основі критерію Пірсона

№ з/п	Інтервали температур, ^{0}C	Емпірична частота, n_i^e	Імовірність теоретична, p_i^t	Теоретична частота, $n_i^t=np_i^t$	$(n_i^e-n_i^t)^2$	$\frac{(n_i^e-n_i^t)^2}{n_i^t}$
1	9,4–10,0	3 (10)	0,017	1,7 (7,6)	5,76	0,758
2	10,0–10,6	7	0,059	5,9		
3	10,6–11,2	11	0,141	14,1	9,61	0,682
4	11,2–11,8	20	0,228	22,8	7,84	0,344
5	11,8–12,4	28	0,247	24,7	10,89	0,441
6	12,4–13,0	19	0,182	18,2	0,64	0,035
7	13,0–13,6	10	0,087	8,7	0,16	0,014
8	13,6–14,2	2 (12)	0,029	2,9(11,6)		
	$\sum$	100	0,990	99,0	x	2,274

Розбіжність в межах одиниці розрахованого значення хі-квадрат 2,274 з контрольним 3,27 вважатимемо випадковою, оскільки частоти першої і восьмої варіант низькі. Це дозволяє стверджувати, що розрахунки виконано правильно. За даними таблиці критичних точок розподілу χ^2 для заданого числа ступенів вільності k=3 при рівні значущості α = 0,05 знаходимо $\chi^2_{кр}(0{,}05;3)$ =7,8. Оскільки $\chi_e^2<\chi^2_{кр}(0{,}05;3)$, то немає підстав для відхилення нульової гіпотези H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності.

2. Перевірка нульової гіпотези на основі критерію узгодження Колмогорова.

Емпірична функція $F_n^*(x)$ і теоретична функція $F(x)$ нормального розподілу температури на поверхні води гідрологічної станції в Білому морі представлені в табл. 6 (за даними [40]).

Таблиця 6

Дані для перевірки нульової гіпотези на основі критерію Колмогорова

$X = x_i$	9,4	10	10,6	11,2	11,8	12,4	13,0	13,16	14,2
$F_n^*(x)$	0,010	0,030	0,100	0,210	0,410	0,690	0,880	0.980	1,000
$F(x)$	0,004	0,021	0,080	0,221	0,449	0,695	0,878	0,964	0,993

Видно, що максимальна розбіжність між цими функціями має місце при температурі t=11,8^{0}С, що відповідає величині $D_n = |0,410 - 0,449| = 0,039$. Тоді $\sqrt{n} \cdot D_n = \sqrt{100} \cdot 0,039 = 0,39$. Якщо тепер звернутися до таблиці критичних чисел Колмогорова – Смірнова, знайдемо, що нерівність $\sqrt{n} \cdot D_n < \lambda$ виконується для будь-якого числа ступенів вільності. Отже, можна вважати, що нульова гіпотеза H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності узгоджується з експериментальними даними і тому немає підстав для її відхилення.

Отже, в роботі проаналізовані з єдиної позиції потужні критерії Пірсона і Колмогорова, що широко застосовуються у сучасній математичній статистиці, сформульовані послідовні кроки їх застосування та наведені формули для розрахунків. Запропоновані та розв'язані типові задачі із застосуванням зазначених критеріїв, що допомагає краще з'ясувати їх сутність. У другій частині роботи відповідне дослідження проведене для параметричних критеріїв.

Список використаних джерел

1. Моцний Ф. В. Сучасний базовий інструментарій математичної статистики. Ч. I, II // Науковий вісник НАСОА. 2015. № 2, С. 16–29. № 3, С. 14–25.
2. Моцний Ф. В. Статистичні розподіли хі-квадрат, Стьюдента, Фішера – Снедекора та їх застосування // Статистика України. 2018. № 31 (80). С. 16–23.
3. Руденко В. М. Математична статистика: навч. посібник. Київ: Центр учбової літератури, 2012. 304 с.
4. Чимитова Е. В., Ведерникова М. А., Галанова Н. С. Непараметрические критерии согласия в задачах проверки адекватности моделей надежности // Вестник ТГУ: Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 115–124.
5. Непараметричні і параметричні критерії. URL: https://www.dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/290179
6. Параметрические и непараметрические критерии. URL: https://www.studopedia.org/1-26663.html
7. Статистичні критерії. Параметричні і непараметричні критерії. URL: https://www.pidruchniki.com/12590605/statistika/statistichni_kriteriyi
8. Параметричні критерії. Непараметричні методи статистичної перевірки гіпотез. URL: https://www.studlib.info/psikhologiya/771366-parametrichni-kriterii-neparametrichni-metodi-statistichnoi-perevirki-gipotez/
9. Холлендер М., Вульф Д. Непараметрические методы статистики. Москва: Финансы и статистика, 1983. 519 с.
10. Лемешко Б. Ю. Непараметрические критерии согласия: рук. по прим. Москва: ИНФРА-М., 2014. 163 с.
11. Грауэр Л. В., Архипова О. В. Лекция 4. Параметрические и непараметрические критерии однородности. URL: https://docplayer.ru/49327029-Lekciya-4-parametricheskie-i-neparametricheskie-kriterii-odnorodnosti.html
12. Choosing Between a Nonparametric Test and a Parametric Test. URL: http://blog.minitab.com/blog/adventures-in-statistics-2/choosing-between-a-nonparametric-test-and-a-parametric-test
13. Прохоров Ю. В., Пономаренко Л. С. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. Москва: МАКС Пресс, 2004. 188 с.
14. Постовалов С. Н. Применение компьютерного моделирования для расширения прикладных возможностей классических методов проверки статистических гипотез: автореф. дис. на соискание уч. степени докт. тех. наук. Новосибирск, 2014. 40 с.
15. Difference Between Parametric and Nonparametric Test. URL: https://keydifferences.com/difference-between-parametric-and-nonparametric-test.html
16. Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим: метод. рекомендации. Ч. II. Непараметрические критерии. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. С. 85.
17. Петров С. И. Метрология, стандартизация и сертификация: учеб. пособие. Омск: ОИВТ (филиал), 2012. 154 с.

18. Буре В. М., Грауэр Л. В. Лекция 6. Критерии согласия. Проверка независимости двух номинальных признаков. URL: https://www.google.com.ua/search?hl=uk

19. Критерии согласия. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Критерии согласия

20. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Москва: Физматлит, 2006. 816 с.

21. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие. Москва: Высшая школа, 1999. 480 с.

22. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.ІІ. Математична статистика: навч.-метод. посібник. Київ: КНЕУ, 2001. 335 с.

23. Snedecor G. W., Cochran W. G. Statistical methods. 6th ed. Iowa: Iowa State University Press, 1967. 593 p.

24. Теорема Пирсона. URL: https://www.studopedia.su/10_94367_teorema-pirsona.html

25. Brown J. D. Questions and answers about language testing statistics: Yates's correction factor // The JALT Testing & Evaluation SIG Newsletter, 2004. № 8 (1). P. 22–27.

26. Критерий Колмогорова – Смирнова. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Критерий...Смирнова

27. Критерий Колмогорова – Смирнова и его применение к построению доверительных границ для неизвестной функции распределения. URL: http://www.stu.sernam.ru/book_stat1.php?id=138

28. Kolmogorov A. N. Sulla Determinazione Empirica di Una Legge di Distribuzione // Giornale dell'Istituto Italiano degly Attuari. 1933. Vol. 4. № 1. P. 83–91. URL: https://www.sciepub.com/reference/1552

29. Критерий согласия Колмогорова – Смирнова – способ оценки распределения совокупности . URL: http://www.medstatistic.ru/theory/kolmogorov.html

30. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. Москва: Наука, 2009. 416 с. URL: http://www.studmed.ru/bolshev-ln-smirnov-nv-tablicy-matematicheskoy-statistiki_ 0a72637edd4.html

31. Квантиль. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title

32. Lilliefors H. W. On the Kolmogorov – Smirnov test for normality with mean and variance unknown // Journal of the American Statistical Association. 1967. Vol. 62. P. 399–402.

33. Критерий Колмогорова и экспериментальная проверка законов наследственности Менделя / Барабашева Ю. М. и др. URL: http://ecology.genebee.msu.ru/3_SOTR/CV_Barabasheva_publ/Kolm-Mend-2008.pdf

34. Третьяк Л. Н. Обработка результатов наблюдений: учеб. пособие для вузов. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. 175 с.

35. Лабораторна робота 8–9. Тема: Критерій узгодженості розподілів χ^2 – Пірсона. URL: http://ito.vspu.net/ENK/obrobka_shahina-konoshevskiy/files/Lab_8-9.htm

36. Лабораторна робота № 3. Критерій узгодженості Пірсона. Побудова кривої Гаусса. URL: http://www.tsatu.edu.ua/kn/wp-content/uploads/sites/16/laboratorna-robota-3.pdf

37. Лабораторна робота № 2. Ідентифікація закону розподілу за критерієм χ^2 (хі-квадрат) Пірсона. URL: http://www.yasholt.vk.vntu.edu.ua/file/MOED/23cad4a7c55cb30ef9714876e1053c33.doc

38. Лабораторная робота № 11. Критерий Колмогорова. URL: http://www.arhiuch.ru/lab11.html

39. Критерии согласия. Проверка гипотез о виде функции распределения. URL: http://termist.com/bibliot/stud/stepnov/081_1.htm

40. Малинин В. Н. Статистические методы анализа гидрометеорологической информации: ученик. СПб.: Изд. РГГМУ, 2008. 408 с. URL: http://www.elib.rshu.ru/files_books/pdf/img-417184359.pdf

References

1. Motsnyi, F. V. (2015). Suchasnyi bazovyi instrumentarii matematychnoi statystyky. Ch. 1, 2 [Advanced Based Tools of Mathematical Statistics. Part 1, 2]. *Naukovyi Visnyk Natsinalnoi akademii statystyky, obliku ta audytu – Scientific Bulletin of the National Academy of Statistics, Accounting and Audit, 2,*16–29, *3,*14–25 (in Ukrainian).

2. Motsnyi, F. V. (2018). Statystychni Rozpodily Chi-kvadrat, Studenta, Fishera – Snedekora ta ikh zastosuvannia [Chi-Square, Student and Fisher – Snedecor Statistical Distributions and Their Application]. *Statystyka Ukrainy – Statistics of Ukraine, 1,* 16–23 (in Ukrainian).

3. Rudenko, V. M. (2012). *Matematychna statystyka [Mathematical Statistics].* Kyiv: Tsentr uchbovoi literatury (in Ukrainian).

4. Chimitova, E. V., Vedernikova, M. A., & Galanova, N. S. (2013). Neparametricheskie criterii soglasiia v zadachakh proverki adekvatnosti modelei nadezhnosti [Nonparametric coordination criteria in task of the

checking the adequacy of reliability models]. *Vestnik TGU: Upravlenie,Vychislitelnaia tekhnika i informatika – Scientific Bulletin of TGU: management, calculation engineering and information, 4 (25),* 115–124 (in Russian).

5. Neparametrychni i parametrychni kryterii [Nonparametric and parametric criteria]. *www.dic.academic.ru*. Retrieved from https://www.dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/290179 (in Ukrainian).

6. Parametricheskie i neparametricheskie kriterii [Parametric and nonparametric criteria]. *www.studopedia.org*. Retrieved from https: //www.studopedia.org/1-26663.html (in Russian).

7. Statystychni kryterii. Parametrychni i neparametrychni kryterii [Statistical criteria. Parametric and nonparametric criteria]. *www.pidruchniki.com*. Retrieved from https://www.pidruchniki.com/12590605/statistika/statistichni_kriteriyi (in Ukrainian).

8. Parametrychni kryterii. Neparametrychni metody statystychnoi perevirky hipotez [Parametric criteria. Nonparametric methods of statistical hypotheses testing]. *www.studlib.info*. Retrieved from https://www.studlib.info/psikhologiya/771366-parametrichni-kriterii-neparametrichni-metodi-statistichnoi-perevirki-gipotez/ (in Ukrainian).

9. Khollender, M., & Vulf, D. (1983) *Neparametricheskie metody statistiki [Nonparametric statistical methods]*. Moskow: Finansy i statistika (in Russian).

10. Lemeshko, B.Yu. (2014). *Neparametricheskie kriterii soglasiia [Nonparametrical coordination criteria]*. Moskow: INFRA-M (in Russian).

11. Grauer, L. V., & Arkhipova, O. V. (2014). Lekciia 4. Parametricheskie i neparametricheskie kriterii odnorodnosti [Lecture 4. Parametrical and nonparametrical homogeneity criteria]. *www.compscicenter.ru,* Retrieved from https://docplayer.ru/49327029-Lekciya-4-parametricheskie-i-neparametricheskie-kriterii-odnorodnosti.html (in Russian).

12. Choosing Between a Nonparametric Test and a Parametric Test. *blog.minitab.com*. Retrieved from http://blog.minitab.com/blog/adventures-in-statistics-2/choosing-between-a-nonparametric-test-and-a-parametric-test (in English).

13. Prokhorov, Yu. V., & Ponomarenko, L. S. (2004*). Lektsii po teorii veroiatnostei i matematicheskoi statistike [Lectures on probability theory and mathematical statistics]*. Moscow: MAKS Press (in Russian).

14. Postovalov, S. N. (2014). Primenenie kompiuternogo modelirovaniia dlia rasshireniia prikladnykh vozmozhnostei klassicheskikh metodov proverki statystycheskikh hipotez [Application of PC modelling for the widening of applied possibilities of classical methods of statistical hypothesis testing]. *Extended abstracts of candidate's thesis*. Novosibirsk (in Russian).

15. Difference Between Parametric and Nonparametric Test. *keydifferences.com*. Retrieved from https://keydifferences.com/difference-between-parametric-and-nonparametric-test.html (in English).

16. Lemeshko, B. Yu., & Postovalov, S. N. (1999). *Prikladnaia statistika. Pravila proverki soglasiia opytnogo raspredeleniia s teoreticheskim. Ch. 2. Neparametricheskie kriterii [Applied Statistics. Rules for verifying compliance of experimental distribution with theoretical]*. Novosibirsk: NSTU (in Russian).

17. Petrov, S. I. (2012). *Metrologiia, standartizatsiia i sertifikatsiia [Metrology, standardization and certification]*. Omsk, OIVT (in Russian).

18. Bure, V. M., & Grauer, L. V. Lekciia 6. Kriterii soglasiia. Proverka nezavisimosti dvukh nominalykh priznakov [Lexture 6. Coordination criteria. Check of independence of two nominal signs]. *www. google.com.ua*. Retrieved from https://www. google.com.ua/search?hl=uk (in Russian).

19. Kriterii soglasiia [Coordination criteria]. *www.machinelearning.ru*. Retrieved from http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Критерии согласия (in Russian).

20. Kobzar, A. I. (2006). *Prikladnaia matematicheskaia statistika [Applied mathematical statistics]*. Moskow: Physmathlit (in Russian).

21. Gmurman, V. E. (1999). *Teoriia veroiatnostei i mathematicheskaia ststistika [Probanility theory and mathematic statistics]*. Moskow: Vysshaia shkola (in Russian).

22. Zhluktenko, V. I., Nakonechnyi, S. I., & Savina, S. S. (2001). *Teoriia imovirnostei i matematychna statystyka. Ch.2. Matematychna statystyka [Probability theory and mathematical statistics. Part 2. Mathematical Statistics]*. Kyiv: KNEU (in Ukrainian).

23. Snedecor, G. W., & Cochran, W. G. (1967). *Statistical methods*. (6th ed.). Iowa: Iowa State University Press (in English).

24. Teorema Pirsona [Pearson theorem]. *www.studopedia.su*. Retrieved from https://www.studopedia.su/10_94367_teorema-pirsona.html *(in Russian)*

25. Brown, J. D. (2004). Questions and answers about language testing statistics: Yates correction factor. *The JALT Testing & Evaluation SIG Newsletter, 8(1),* 22–27 (in English).

26. Kriterii Kolmogorova – Smirnova. *www.machinelearning.ru*. Retrieved from http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Критерий...Смирнова (in Russian).

27. Kriterii Kolmogorova – Smirnova i ego primenenie k postroeniiu doveritelnykh granits dlia neizvestnoi funktsii raspredeleniia [Kolmogorov-Smirnov criterion and its application to building confidence limits for an unknown distribution function]. www. *stu.sernam.ru*. Retrieved from http://www.stu.sernam.ru/book_stat1.php?id=138 (in Russian).

28. Kolmogorov, A. N. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale dell'Istituto Italiano degly Attuari,Vol. 4, № 1,* 83–91. Retrievd from https://www.sciepub.com/reference/1552 *(in Italiano)*

29. Kriterii soglasiia Kolmogorova – Smirnova – sposob otsenki raspredeleniia sovokupnosti [Kolmogorov-Smirnov criterion – method of evaluation of population distribution]. *www.medstatistic.ru*. Retrieved from http://www.medstatistic.ru/theory/kolmogorov.html (in Russian).

30. Bolshev, L. N., & Smirnov, N. V. (2009) *Tablitsy matematicheskoi statistiki [The tables of mathematic statistics]*. Moskow: Nauka. Retrievd from http://www.studmed.ru/bolshev-ln-smirnov-nv-tablicy-matematicheskoy-statistiki_0a72637edd4.html (in Russian).

31. Kvantil [Quantil]. *www.machinelearning.ru*. Retrieved from http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title (in Russian).

32. Lilliefors, H. W. (1967). On the Kolmogorov – Smirnov test for normality with mean and variance unknown. *Journal of the American Statistical Association, Vol. 62,* 399–402 (in English).

33. Barabasheva, Yu. M., Devyatkova, G.N., Tutubalin, B. N., & Uger, E. G. Kriterii Kolmogorova i eksperimentalnaia proverka zakonov nasledsvennosti Mendelia [Kolmogorov criterion and experimental checking of the Mendel heredity laws]. *www.ecology.genebee.msu.ru*. Retrieved from http://ecology.genebee.msu.ru/3_SOTR/CV_Barabasheva_publ/Kolm-Mend-2008.pdf (in Russian).

34. Tretiak, L. N. (2004). *Obrabotka rezultatov nabludenii [Processing of the observations results]*. Orenburg: GOU OGU. Retrieved from https://www.rucont.ru/efd/213178 (in Russian).

35. Laboratorna robota 8–9. Tema: Kryterii uzgodzhennosti rozpodiliv χ^2 – Pirsona [Laboratory work 8-9. Coordination criteria of χ^2 distribution]. *www.ito.vspu.net*. Retrieved from http://www.ito.vspu.net/ENK/obrobka_shahina-konoshevskiy/files/lab_8-9.htm (in Ukrainian).

36. Laboratorna robota № 3. Kryterii uzgodzhenosti Pearsona. Pobudova kryvoi Gausa [Laboratory work № 3. Pearson coordination criteria. Construction of Gauss curve]. *www.tsatu.edu.ua*. Retrieved from http://www.tsatu.edu.ua/kn/wp-content/uploads/sites/16/laboratorna-robota-3.pdf (in Ukrainian).

37. Laboratorna robota № 2. Identyficatsiia zakonu rozpodilu za kryteriiem χ^2 Pirsona [Identification of distribution law for the χ^2 test]. *www.yasholt.vk.vntu.edu.ua*. Retrieved from http://www.yasholt.vk.vntu.edu.ua/file/MOED/23cad4a7c55cb30ef9714876e1053c33.doc

38. Laboratornaia robota № 11. Kriterii Kolmogorova [Kolmogorov criterion]. *www.arhiuch.ru*. Retrieved from http://www.arhiuch.ru/lab11.html (in Russian).

39. Kriterii soglasiia. Proverka gipotez o vide funkcii raspredelenia [Coordination criteria. Testing hypotheses about the form of the distribution function]. *termist.com*. Retrieved from http://termist.com/bibliot/stud/stepnov/081_1.htm (in Russian).

40. Malinin, V. N. (2008). *Statisticheskie metody analiza gidrometerologicheskoi informatsii [Statistical analysis methods of hydrometeorological information]*. SPb: RGGMU. Retrieved from http://www.elib.rshu.ru/files_books/pdf/img-417184359.pdf (in Russian).

Ф. В. Моцный,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры экономико-математических дисциплин
и информационных технологий,
Национальная академия статистики, учета и аудита

Анализ непараметрических и параметрических критериев проверки статистических гипотез.
Часть I. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова

Рассмотрены статистические критерии согласования, используемые для проверки гипотез о законах распределения генеральной совокупности. С единой позиции всесторонне проанализированы известные непараметрические критерии Пирсона и Колмогорова. Выяснены особенности их применения. Обобщены результаты многочисленных теоретических и прикладных исследований. Предложены и решены типовые задачи.

Ключевые слова: *математическая статистика, выборка, случайные величины, статистические гипотезы, число степеней свободы, критическая точка, эмпирическая частота, теоретическая частота, эмпирическая функция, теоретическая функция, законы распределения, непараметрические критерии, критерий Пирсона, критерий Колмогорова.*

F. V. Motsnyi,
DSc in Physics & Mathematics, Professor,
Professor of Department of Economics and Mathematical disciplines and IT,
National Academy of Statistics, Accounting and Audit

Analysis of Nonparametric and Parametric Criteria for Statistical Hypotheses Testing. Chapter 1. Agreement Criteria of Pearson and Kolmogorov

In the statistical analysis of experimental results it is extremely important to know the distribution laws of the general population. Because of all assumptions about the distribution laws are statistical hypotheses, they should be tested. Testing hypotheses are carried out by using the statistical criteria that divided the multitude in two subsets: null and alternative. The null hypothesis is accepted in subset null and is rejected in alternative subset. Knowledge of the distribution law is a prerequisite for the use of numerical mathematical methods. The hypothesis is accepted if the divergence between empirical and theoretical distributions will be random. The hypothesis is rejected if the divergence between empirical and theoretical distributions will be essential.

There is a number of different agreement criteria for the statistical hypotheses testing. The paper continues ideas of the author's works, devoted to advanced based tools of the mathematical statistics. This part of the paper is devoted to nonparametric agreement criteria.

Nonparametric tests don't allow us to include in calculations the parameters of the probability distribution and to operate with frequency only, as well as to assume directly that the experimental data have a specific distribution. Nonparametric criteria are widely used in analysis of the empirical data, in the testing of the simple and complex statistical hypotheses etc. They include the well known criteria of K. Pearson, A. Kolmogorov, N. H. Kuiper, G. S. Watson, T. W. Anderson, D. A. Darling, J. Zhang, Mann – Whitney U-test, Wilcoxon signed-rank test and so on. Pearson and Kolmogorov criteria are most frequently used in mathematical statistics.

Pearson criterion (χ^2-criterion) is the universal statistical nonparametric criterion which has χ^2 -distribution. It is used for the testing of the null hypothesis about subordination of the distribution of sample empirical to theory of general population at large amounts of sample (n>50). Pearson criterion is connected with calculation of theoretical frequency. Kolmogorov criterion is used for comparing empirical and theoretical distributions and permits to find the point in which the difference between these distributions is maximum and statistically reliable. Kolmogorov criterion is used at large amounts of sample too. It should be noted, that the results obtained by using Pearson criterion are more precise because practically all experimental data are used.

The peculiarities of Pearson and Kolmogorov criteria are found out. The formulas for calculations are given. The typical tasks are suggested and solved that help us to understand more deeply the essence of Pearson and Kolmogorov criteria.

Key words: *mathematical statistics, sample, random values, statistical hypotheses, degrees of freedom, critical point, empirical frequency, theoretical frequency, experimental function, theoretical function, distribution laws, nonparametric tests, Pearson criterion, Kolmogorov criterion.*

Бібліографічний опис для цитування:

Моцний Ф. В. Аналіз непараметричних і параметричних критеріїв перевірки статистичних гіпотез. Частина І. Критерії узгодження Пірсона і Колмогорова // Статистика України. 2018. № 4. С. 14–24.