УДК 519.2:303.092.5-047.44 **Doi: 10.31767/su. 1(84)2019.01.02**
JEL Classification: C12, C46

Ф. В.Моцний,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри економіко-математичних дисциплін і інформаційних технологій,
Національна академія статистики, обліку та аудиту,
E-mail: fv.motsnyi@ukr.net; motsnyifv@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6377-3188

Аналіз непараметричних і параметричних критеріїв перевірки статистичних гіпотез. Частина ІІ. Критерії узгодження Романовського, Стьюдента і Фішера

Будь-які припущення чи передбачення того чи іншого закону розподілу випадкових величин є завжди статистичними гіпотезами. Об'єктивні дані про них можна отримати за допомогою спеціальних статистичних правил, які називаються критеріями узгодження. Відомі критерії узгодження двох видів: непараметричні та параметричні. Непараметричні критерії узгодження не включають в розрахунки параметри розподілу ймовірностей, оперують лишень з частотами і не передбачають, що експериментальні дані мають особливий розподіл. Ці критерії широко використовуються при аналізі емпіричних даних, перевірці моделей надійності, простих і складних статистичних гіпотез і займають чільне місце в науці та практиці.

Параметричні критерії містять параметри розподілу ймовірностей і використовуються для вибірок з нормальним законом розподілу. Ці критерії дозволяють перевірити статистичні гіпотези про нормальний закон розподілу ознак генеральної сукупності, отриманих на підставі обробки вибірок; виключити грубі похибки спостережень; оцінити безпосередньо параметри генеральних сукупностей, різницю середніх і відмінності дисперсій. Тому параметричні критерії також широко застосовуються в математичній статистиці.

Пропонована стаття продовжує розвивати ідеї робіт автора [1; 2], присвячених інструментарію математичної статистики. Мета роботи полягає у тому, щоб узагальнити відомі теоретичні й експериментальні результати про статистичні критерії перевірки гіпотез. У роботі з єдиної позиції проаналізовані параметричні критерії (Романовського, Стьюдента, Фішера). З'ясовані особливості їх застосування для перевірки статистичних гіпотез. Запропоновані і розв'язані типові задачі. Усе це дозволило з єдиної позиції охопити широту і сутність проблеми в цілому й оцінити безпосередньо її актуальність.

Ключові слова: *статистичні гіпотези; рівень статистичної значущості; число ступенів вільності; критична точка; закони розподілу; емпірична частота; теоретична частота; математичне сподівання (середнє); дисперсія; середнє квадратичне відхилення; грубі похибки; параметричні критерії; критерій Романовського, критерій Стьюдента, критерій Фішера.*

У частині І статті автора (Статистика України, 2019, № 4, doi: 10.31767/su.4(83)2018.04.09) розпочато аналіз критеріїв перевірки статистичних гіпотез. Розглянуті непараметричні критерії Пірсона та Колмогорова і з'ясовані особливості їх застосування. Продовжимо виклад результатів аналізу, при цьому зазначимо, що формули, таблиці та використані джерела пронумеровано у продовження попередньої статті.

Параметричні критерії містять параметри розподілу і використовуються для вибірок з нормальним законом розподілу. Ці критерії дозволяють перевірити статистичні гіпотези про нормальний закон розподілу ознак генеральної сукупності, отриманих на підставі обробки вибірок; виключити грубі похибки спостережень; оцінити безпосередньо параметри генеральних сукупностей, різницю середніх і відмінності дисперсій, взаємовплив двох і більше факторів на зміну ознаки тощо [17; 19; 23]. До них належать, зокрема, класичні статистичні критерії Романовського [41; 42], Стьюдента [23; 43; 44] і Фішера [23; 45].

При постановці та проведенні експериментальних досліджень за невеликої кількості вимірювань $(5 \le n \le 20)$ необхідно приділяти постійну увагу виключенню грубих похибок, що можуть суттєво викривлювати результати вимірювань і спотворювати параметри вибіркових оцінок. Відома ціла низка критеріїв для виявлення і відсіву грубих похибок при обробці даних малого обсягу, а саме: 3σ, Граббса, Романовського, Шовене, Діксона, Львовського, Шарльє, Тітьєна-Мура та ін. [46–48]. Зупинимося на найбільш простому і зручному для розрахунків критерії, запропонованому В. Романовським [42; 49–54] і заснованому на критерії Пірсона.

Критерій узгодження Романовського – це параметричний критерій, що використовується для оцінки на грубу похибку одного підозрілого значення вибірки з нормально розподіленої випадкової величини. При використанні критерію Романовського розраховується його емпіричне значення [46]

$$\beta_e = \frac{\bar{x}_{S^*} - x_R}{s^*}, \qquad (12)$$

де x_R – підозріле значення вибірки, $\bar{x}_{S^*}$ – середнє значення вибірки (центр розподілу); s^* – приведене вибіркове середнє квадратичне відхилення (дві останні величини обчислені без урахування x_R). Знайдене значення β_e порівнюється з табличним (відсотковою точкою) $\beta(\alpha;\ n)$, наведеним у табл. 7 (за даними [46]) при заданому рівні значущості α і кількості вимірювань n, що не включають підозрілу складову. Якщо $\beta_e \geq \beta(\alpha;n)$, то підозріле значення x_R вибірки вважається грубою похибкою (промахом) і відхиляється.

Таблиця 7

Відсоткові точки критерію Романовського $\beta(\alpha;\ n)$

Рівень значущості, α \ **Кількість вимірювань, n**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**15**	**20**
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Метод розрахунку відсоткових точок критерію Романовського описаний у [54].

Критерій узгодження Романовського K_R використовується також для оцінки наближення експериментальних частот до теоретичних [19; 42; 51–54]. Він обчислюється як

$$K_R = \frac{\left|\chi_e^2 - k\right|}{\sqrt{2k}}, \qquad (13)$$

де χ_e^2 – розрахункове значення критерію Пірсона, k – число ступенів вільності. Якщо $K_R < 3$, то нульова гіпотеза H_0 про підпорядкованість емпіричних частот теоретичним для генеральної сукупності приймається, тобто розподіл емпіричних частот близький до закону розподілу теоретичних або збігається з ним. Якщо ж $K_R < 3$, то нульова гіпотеза H_0 відхиляється. І як наслідок, теоретичний закон розподілу частот генеральної сукупності не може бути використаний як модель для досліджуваного емпіричного розподілу.

Зауваження.

1. Критерій Романовського рекомендується використовувати при обсягах вимірювань не менше 20, оскільки при їх зменшенні зростає кількість похибок I роду [46].

2. Критерій Романовського вважається менш надійним, ніж критерії Пірсона і Колмогорова. Однак, що важливо, цей критерій доповнює критерій Пірсона і дає можливість виключити грубі похибки [17; 46–51; 54], які суттєво перевищують очікувані за цих умов спостережень і погіршують у такий спосіб достовірність отриманих результатів.

3. До процедури виключення грубих похибок треба завжди ставитися досить обережно і відповідально, оскільки це може привести до необґрунтованого покращення результатів досліджень.

Розглянемо дві типові задачі на застосування критерію Романовського.

Приклад 4. При 21 замірі витрат бензину марки Smart автомобілем "Ланос 1.6" на 100 км були зареєстровані такі результати: 7; 6,5; 7,5; 7; 7; 6,5; 7; 6,5; 7,5; 7; 7; 6,5; 7; 6,5; 7,5; 7; 7; 6,5; 7; 8; 7 л. Передостанній результат викликає підозру. $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання.

Дано: $n = 20$; $\alpha = 0{,}05$. $\beta_e - ?$ $\beta(a;n) - ?$

$$\bar{x}_{S^*} = \sum_{i=1}^{20} x_i / n = 138{,}5 / 20 \approx 6{,}9 \text{ л } / 100 \text{ км}.$$

$$s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x}_{S^*})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2{,}15}{19}} = \sqrt{0{,}113} \approx 0{,}34 \text{ л}/100 \text{ км}.$$

$$\beta_e = \frac{\left|\bar{x}_{S^*} - x_R\right|}{s^*} = \frac{|6{,}9-8|}{0{,}34} \approx 3{,}24.$$

Згідно з критерієм Романовського, за даними табл. 7, при $\alpha = 0{,}05$ і $n = 20$ $\beta(0{,}05;20) = 2{,}78$. Отже, $\beta_e > \beta(0{,}05;20)$, а це означає, що витрати бензину автомобілем "Ланос 1.6" обсягом 8 л / 100 км є дійсно підозрілими.

Приклад 5. За допомогою критерію узгодження Романовського перевірити нульову гіпотезу H_0 про підпорядкованість експериментальних даних нормальному закону розподілу генеральної сукупності, використавши результати, наведені у прикладі 3.

Розв'язання. Дано: $k=3$; $\chi_e^2=2{,}274$. K_R - ?

Використаємо формулу (13), отримаємо:

$$K_R=\frac{|2{,}274-3|}{\sqrt{2\cdot 3}}\approx\frac{0{,}726}{2{,}449}\approx 0{,}296.$$

Оскільки значення $K_R\approx 0{,}296$ менше за 3,0, то згідно з критерієм Романовського немає підстав для відхилення нульової гіпотези H_0 про підпорядкованість експериментальних даних нормальному закону розподілу генеральної сукупності. Отже, висновки, отримані як за критеріями Пірсона і Колмогорова, так і за критерієм Романовського, збігаються, підтверджуючи справедливість прийняття нульової гіпотези H_0.

Критерій узгодження Стьюдента, або t-критерій, – це загальна назва класу параметричних критеріїв для перевірки на засадах розподілу Стьюдента статистичних гіпотез про розбіжність середніх значень вибірок, що, як передбачається, мають нормальний закон розподілу. Цей критерій знаходить широке застосування для порівняння середніх арифметичних однієї вибірки [55–59], двох незалежних (незв'язаних) вибірок або двох залежних (зв'язаних) [58–60]. При порівнянні вибірок важливою характеристикою є параметр залежності [61]. Якщо одному елементу з вибірки x відповідає один і лише один елемент з вибірки y і навпаки, то такі вибірки називаються залежними (чоловік – жінка, близнята, виміри ознаки до і після дії). Якщо ж такий зв'язок між вибірками x і y відсутній, тобто їх варіанти не утворюють кореляційні парні ознаки, то ці вибірки вважаються незалежними (чоловіки і жінки, фізики і лірики, психологи і біологи).

Одновибірковий t-критерій – це параметричний критерій, що використовується для перевірки нульової гіпотези H_0 про рівність вибіркового середнього $\bar{x}_{s^*}$ нормально розподіленої випадкової величини x заданому нормативному показнику Z. Статистика одновибіркового t-критерію [55–59]

$$T_e=\frac{\left|\bar{x}_{s^*}-Z\right|}{s/\sqrt{n}} \qquad (14)$$

має розподіл Стьюдента з $k=n-1$ ступенями вільності, де n – обсяг вибірки, s – виправлене середнє квадратичне відхилення однієї вибірки, що визначається за формулою

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_{s^*})^2}{n-1}}\ . \qquad (15)$$

Розраховане емпіричне значення T_e порівнюється з критичним значенням $t_{кр}$, знайденим за числом ступенів вільності $k=n-1$ при заданому рівні значущості α в таблиці критичних точок розподілу Стьюдента. Якщо $T_e<t_{кр}$, то немає підстав для відхилення нульової гіпотези H_0 про рівність $\bar{x}_{s^*}=Z$ при заданому рівні значущості α і її слід прийняти. Якщо $T_e>t_{кр}$, то середнє вибіркове $\bar{x}_{s^*}$ і нормативний показник Z мають при тому самому рівні значущості α значні розбіжності $(\bar{x}_{s^*}\neq Z)$, і тому нульова гіпотеза H_0 відхиляється.

На практиці одновибірковий t-критерій використовується при аналізі комерційної діяльності підприємств, торгових фірм, посередницьких агентств тощо, оскільки ефективність їх роботи супроводжується відхиленнями від заданого рівня рентабельності.

Продемонструємо застосування одновибіркового t-критерію безпосередньо на практиці.

Приклад 6. Визначено IQ випадково відібраних 30 студентів, що навчалися за спеціальною програмою. Результати досліджень занесені в табл. 8. Рівень значущості $\alpha=0{,}05$. З'ясувати, чи відрізняється інтелект цих студентів від нормативного показника $Z=100$?

Розв'язання.

Дано:

$n=30$, $k=29$, $Z=100$, $\alpha=0{,}05$. T_e –? $t_{кр}$ –?

Використаємо критерій Стьюдента для однієї вибірки (в умові задачі мова йде про відхилення середнього арифметичного вибірки $\bar{x}_{s^*}$ (інтелект студентів) від нормативного показника інтелекту $Z=100$).

Таблиця 8

Результати дослідження *IQ* студентів

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i=IQ$	100	111	112	105	105	104	94	89	113	125
№ з/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_i=IQ$	96	100	98	124	121	116	95	92	118	96
№ з/п	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$x_i=IQ$	94	117	130	90	114	119	120	100	96	102

$$\bar{x}_{S^*} = \frac{\sum_{i=1} x_i}{n} = 3197:30=106,57.$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{S^*})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{30}(x_i - 106,57)^2}{29}} = \sqrt{\frac{4025,60}{29}} \approx \sqrt{138,81} \approx 11,78.$$

$$T_e = \frac{\left|\bar{x}_{S^*} - Z\right|}{s/\sqrt{n}} = \frac{|106,57-100|}{11,78/\sqrt{30}} = \frac{6,57}{11,78/5,48} \approx 3,06.$$

Для знайденого емпіричного значення $T_e \approx 3,06$ визначаємо рівень значущості α, використовуючи таблицю критичних точок розподілу Стьюдента (двобічна критична область, бо можлива альтернативна гіпотеза $\bar{x}_{S^*} \neq Z$). У рядку, що відповідає ступеню вільності k = 29, шукаємо $T_e \approx 3,06$. Це значення попадає між критичними точками $t_{кр} = 2,76$ ($\alpha = 0,01$) і $t_{кр} = 3,66$ ($\alpha = 0,001$), а отже, $\alpha < 0,01$. Це свідчить, що при заданому рівні значущості $\alpha = 0,05$ середні вибіркові значення *IQ* і нормативний показник *Z* значно відрізняються ($\bar{x}_{S^*} \neq Z$), тому нульова гіпотеза H_0 відхиляється. Тобто інтелект студентів, що займаються за спеціальною програмою, статистично достовірно перевищує нормативний показник інтелекту *Z*=100.

Двовибірковий *t*-критерій для незалежних нормально розподілених вибірок *x* і *y* – це параметричний критерій, що використовується для перевірки статистичної гіпотези про розбіжність їх середніх вибіркових $\bar{x}_{S^*}$ і $\bar{y}_{S^*}$. Статистика двовибіркового *t*-критерію [58; 59]

$$T_e = \frac{\left|\bar{x}_{S^*} - \bar{y}_{S^*}\right|}{S_d \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad (16)$$

має розподіл Стьюдента з $k = n_1 + n_2 - 2$ ступенем вільності, де n_1 і n_2 – обсяги першої і другої вибірок відповідно; S_d – виправлене середнє квадратичне відхилення розбіжності обох вибірок має вигляд [58]:

$$S_d = \sqrt{\frac{(n_1-1)\cdot s_x^2 + (n_2-1)\cdot s_y^2}{n_1+n_2-2}}, \qquad (17)$$

де s_x^2 і s_y^2 – виправлені дисперсії вибірок *x* і *y* відповідно.

Дві вибірки можуть бути як нерівної чисельності, коли їх обсяги не збігаються ($n_1 \neq n_2$), так і рівночисельними, коли їх обсяги збігаються ($n_1 = n_2 = n$). Якщо вибірки нерівночисельні, то після підстановки у формулу (17) величин s_x^2 і s_y^2, визначених співвідношенням (15), отримаємо виправлене середнє квадратичне відхилення розбіжності обох вибірок у такому вигляді:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{S^*})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_{S^*})^2}{n_1+n_2-2}}. \qquad (18)$$

Якщо ж вибірки рівночисельні, то формула (18) записується так:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{S^*})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_{S^*})^2}{2(n-1)}}. \qquad (19)$$

Зауваження.

1. Оскільки $s_x^2 = \sigma_x^2 \cdot \frac{n_1}{n_1-1}$, $s_y^2 = \sigma_y^2 \cdot \frac{n_2}{n_2-1}$, де σ_x^2 і σ_y^2 – дисперсії вибірок *x* і *y*, то формула (19) для виправленого середнього квадратичного відхилення розбіжностей обох вибірок набуває вигляд:

а) якщо $n_1 \neq n_2$, $S_d = \sqrt{\frac{n_1 \cdot \sigma_x^2 + n_2 \cdot \sigma_y^2}{n_1+n_2-2}}$, (20)

б) якщо $n_1 = n_2 = n$, $S_d = \sqrt{\frac{n \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{2 \cdot (n-1)}}$. (21)

Тоді формула (16) задається, відповідно, такими рівностями:

а) якщо $n_1 \neq n_2$,

$$T_e = \frac{\left|\bar{x}_{S^*} - \bar{y}_{S^*}\right|}{\sqrt{\frac{(n_1 \cdot \sigma_x^2 + n_2 \cdot \sigma_y^2)}{n_1+n_2-2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \qquad (22)$$

б) якщо $n_1 = n_2 = n$, $T_e = \frac{\left|\bar{x}_{S^*} - \bar{y}_{S^*}\right|}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{n\cdot(n-1)}}}$ (23)

Алгоритм прийняття (відхилення) нульової гіпотези H_0 про рівність середніх арифметичних $\bar{x}_{S^*}$ і $\bar{y}_{S^*}$ у двох незалежних вибірках *x* і *y* відповідає розглянутому вище. Зокрема, якщо вибіркові середні дорівнюють одна одній $\bar{x}_{S^*} = \bar{y}_{S^*}$, то нульова гіпотеза H_0 приймається. Якщо ж $\bar{x}_{S^*} > \bar{y}_{S^*}$ або $\bar{x}_{S^*} < \bar{y}_{S^*}$, то вона відхиляється.

Розглянемо задачу на застосування двовибіркового *t*-критерію.

Приклад 7. Дві напівпровідникові лабораторії в Україні виготовляють лазерні указки. Для контролю відібрали n_1 = 27 лазерних указок першої лабораторії і n_2 = 33 – другої. Обидві партії указок перевірили на термін роботи. Результати перевірки занесені в табл. 9. З'ясувати, чи виконується при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ нульова гіпотеза H_0 про рівність середніх вибіркових $\bar{x}_{S^*}$ і $\bar{y}_{S^*}$ двох незалежних вибірок x і y.

Таблиця 9

Терміни роботи (одиниці часу) напівпровідникових лазерних указок, виготовлених у двох лабораторіях

Варіанти, x_i	46	50	53	56	59	65
Обсяги, n_{1i}	2	4	8	10	2	1
Варіанти, y_i	40	42	44	46	48	50
Обсяги, n_{2i}	3	4	15	6	3	2

Розв'язання. Дано: $n_1 = 27$; $n_2 = 33$; $k = 58$; $\sigma_x = 53$; $\sigma_y = 55$; $\alpha = 0{,}01$. T_e – ? $t_{кр}$ – ?

$\bar{x}_{S^*} = (46\cdot2+50\cdot4+53\cdot8+56\cdot10+59\cdot2+65\cdot1):27 \approx 54{,}04$;

$\bar{y}_{S^*} = (40\cdot3+42\cdot4+44\cdot15+46\cdot6+48\cdot3+50\cdot2):33 \approx 44{,}48$.

Отже, $\bar{x}_{S^*} > \bar{y}_{S^*}$ (54,04>44,48).

$$s_x^2 = \sigma_x^2 \cdot \frac{n_1}{n_1 - 1} = 53^2 \cdot \frac{27}{26} \approx 2817{,}04;$$

$$s_y^2 = \sigma_y^2 \cdot \frac{n_2}{n_2 - 1} = 55^2 \cdot \frac{33}{32} \approx 3119{,}53.$$

$$S = \sqrt{\frac{(n_1-1)\cdot s_x^2 + (n_2-1)\cdot s_y^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{26\cdot2917{,}04+32\cdot3119{,}53}{58}} \approx 55{,}03.$$

$$T_e = \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{S\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{|55{,}04-44{,}48|}{55{,}03\cdot\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{33}}} = \frac{|10{,}56|}{55{,}03\cdot0{,}26} \approx 0{,}74.$$

У таблиці критичних точок розподілу Стьюдента (двобічна критична область) за ступенем вільності $k = 58$ при рівні значущості α = 0,05, знаходимо: $t_{кр} = 2{,}00$. Оскільки $T_e \approx 0{,}74$ не попадає в допустиму область (–2,00; 2,00), то нульова гіпотеза H_0 про рівність середніх вибіркових $\bar{x}_{S^*}$ і $\bar{y}_{S^*}$ відхиляється ($\bar{x}_{S^*} \approx 54{,}04$; $\bar{y}_{S^*} \approx 44{,}48$).

Парний t-критерій для залежних нормально розподілених вибірок x_1 і x_2 – це параметричний критерій, що дозволяє перевірити статистичну гіпотезу про рівність їх середніх вибіркових $\bar{x}_{1S^*}$ і $\bar{x}_{2S^*}$.

Залежність вибірок означає, що одна і та сама вибірка x обсягом n оцінюється двічі: один раз – до впливу, x_1, а другий раз – після впливу, x_2 (наприклад, економічна ефективність підприємства до і після реконструкції; результати вимірювання розмірів деталей одним приладом, а потім другим у тому самому порядку; стан хворого до і після лікування; середня частота пульсу хворого до і після прийняття антиаритмічного препарату; властивості напівпровідникових структур до і після опромінення нейтронами; дослідження фотолюмінесценції квантових ям двома лабораторіями тощо), тобто варіанти цих вибірок попарно залежні та добре корелюють між собою. Одиницею аналізу розбіжності зв'язаних вибірок є різниця значень ознаки для кожної з n пар спостережень, тобто $d_i = x_{1i} - x_{2i}$. Статистика парного t-критерію [58]

$$T_e = \frac{\left|\bar{x}_{1S^*} - \bar{x}_{2S^*}\right|}{s_x/\sqrt{n}} \qquad (24)$$

має розподіл Стьюдента з числом ступенів вільності $k = n - 1$, де

$$\bar{x}_{1S^*} - \bar{x}_{2S^*} = \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i})$$

$\bar{d}$ – різниця середніх арифметичних вибірки до і після впливу відповідно; s_x – виправлене середнє квадратичне відхилення вибірки, що визначається формулою

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}\,. \qquad (25)$$

Після піднесення під коренем виразу до квадрата і нескладних арифметичних перетворень отримаємо:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2\right)}\,. \qquad (26)$$

Тоді формула (24) запишеться як

$$T_e = \left|\bar{x}_{1S^*} - \bar{x}_{2S^*}\right| \Big/ \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2} \qquad (27)$$

або $$T_e = \left|\bar{d}\right| \Big/ \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2\right)}\,. \qquad (28)$$

Якщо $\bar{x}_{1S^*} = \bar{x}_{2S^*}$, то немає підстав для відхилення нульової гіпотези H_0, оскільки результати спостережень збігаються. Якщо ж $\bar{x}_{1S^*} > \bar{x}_{2S^*}$ або $\bar{x}_{1S^*} < \bar{x}_{2S^*}$, то нульова гіпотеза H_0 відхиляється і приймається альтернативна гіпотеза H_1.

Розглянемо тепер задачу на застосування парного t-критерію.

Приклад 8. Із сукупності нормально розподілених кульок відібрано 10 для контролю ваги. Результати їх зважування в одному і тому ж порядку двома лабораторіями наведені в табл.10. З'ясувати при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$, суттєво чи не суттєво відрізняються результати вимірювань.

Розв'язання. Дано: n=10, k=9, $\alpha = 0{,}05$.

$T_e - ?\ t_{кр} - ?$

Маємо класичний приклад залежних вибірок. Знаходимо емпіричне значення критерію Стьюдента згідно з формулами (24) і (25). Результати розрахунків заносимо в табл.10.

$$\overline{d} = \overline{x}_{1S^*} - \overline{x}_{2S^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{4{,}4}{9}} \approx \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

Таблиця 10

Результати зважування 10 кульок двома лабораторіями і дані розрахунків для кожної пари

№ з/п	x_{1i}, мг	x_{2i}, мг	d_i, мг	$d_i - \overline{d}$, мг	$(d_i - \overline{d})^2$, мг^2
1	7	6	1	0,6	0,36
2	8	7	1	0.6	0,36
3	7	7	0	–0,4	0,16
4	6	6	0	–0,4	0,16
5	7	8	–1	–1,4	1,96
6	8	7	1	0,6	0,36
7	7	7	0	–0,4	0,16
8	6	6	0	–0,4	0,16
9	8	7	1	0.6	0,36
10	8	7	1	0,6	0,36
$\sum$	72	68	4	0	4,4

$$T_e = \frac{\left|\overline{d}\right|}{s_x/\sqrt{n}} = \frac{4/10}{0{,}7/\sqrt{10}} = \frac{0{,}4\cdot\sqrt{10}}{0{,}7} \approx \frac{0{,}4\cdot 3{,}2}{0{,}7} \approx \frac{1{,}28}{0{,}7} \approx 1{,}83.$$

Користуючись таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (двобічна критична область) при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ і числі ступенів вільності k=9, знаходимо критичне значенням $t_{кр}$=2,26. Оскільки $T_e < t_{кр}$ (1,83<2,26), то немає підстав для відхилення гіпотези про рівність середніх арифметичних значень в розглянутих залежних вибірках, тобто результати зважування кульок відрізняються не суттєво.

Критерій узгодження Фішера, або F-тест – це статистичний параметричний критерій перевірки правильності нульової гіпотези H_0 про рівність дисперсій двох незалежних нормально розподілених вибірок. Статистика F-тесту [45; 62–68]

$$F_e = \frac{s_x{}^2}{s_y{}^2} \tag{29}$$

має розподіл Фішера – Снедекора з двома ступенями вільності $k_1 = n_1 - 1$ для чисельника і $k_2 = n_2 - 1$ для знаменника; n_1 і n_2 – обсяги вибірок x і y відповідно, що реалізовані, як передбачається, з двох нормально розподілених генеральних сукупностей з ознаками X і Y; $s_x{}^2$ і $s_y{}^2$ – виправлені дисперсії цих вибірок, причому $s_x{}^2 \geq s_y{}^2$. Критичне значення критерію $f_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$ при заданому рівні значущості α і числі ступенів вільності k_1 і k_2 знаходиться із таблиці критичних точок розподілу Фішера – Снедекора. Оскільки $F_e \geq 1$, то критична область належить правій частині цього критерію, де нульова гіпотеза H_0 відхиляється і приймається альтернативна гіпотеза H_1.

Критерій Фішера успішно застосовується при перевірці рівності дисперсій двох вибірок [65; 66], оцінці якості регресійної моделі [66; 69], у дисперсійному аналізі [45; 65], економетриці [69] тощо.

Зауваження. Перед застосуванням критерію Фішера рекомендується перевіряти розподіли вибірок на нормальність.

Алгоритм використання критерію Фішера є таким [45; 50; 62–69]:

1. Перевіряють нормальний закон розподілу вибіркових даних за допомогою одного з критеріїв узгодження: асиметрії та ексцесу, Шапіро – Вілка (W), Пірсона, Колмогорова та ін. [10; 11; 70].
2. Знаходять середні арифметичні значення для кожної вибірки.
3. Розраховують виправлені дисперсії s_x^2 і s_y^2 вибірок x і y.
4. Обчислюють емпіричне значення критерію F_e.
5. Визначають критичне значення критерію $f_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$ за таблицею критичних точок розподілу Фішера – Снедекора за числами ступенів вільності k_1 і k_2.

6. Порівнюють емпіричне значення критерію F_e із критичним $f_{кр}(\alpha;k_1;k_2)$. Якщо $F_e < f_{кр}(\alpha;k_1;k_2)$, то немає підстав для відхилення нульової гіпотези H_0 про рівність дисперсій в обох вибірках при заданому рівні значущості α [64–66].

Застосуємо критерій Фішера для розв'язання задачі.

Приклад 9. При вимірюванні температури в оптичному кріостаті термопарою і напівпровідниковим термометром отримали дані, представлені в табл. 11. З'ясувати питання щодо ефективності використання термопари для вимірювання температури при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ $(T \approx 77K)$ порівняно з напівпровідниковим термометром.

Таблиця 11

Дані вимірювання температури в оптичному кріостаті термопарою та напівпровідниковим термометром

(K)

№ з/п / Вимірювання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Термопара, T_{1i}	76	77	76	75	76	77	75	75	77	76
Напівпровідниковий термометр, T_{2i}	77,4	77,2	77,4	77,3	77,4	77,3	77,2	77,3	77,4	77,3

Дано: $n_1 = n_2 = 10$; $k_1 = k_2 = 9$; $\alpha = 0{,}05$; $F_e - ?$ $f_{кр}(0{,}05;9;9) - ?$

Розв'язання.

$$\overline{T_1} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} T_{1i} = \frac{76+77+76+75+76+77+75+75+77+76}{10} = 76\ (K);$$

$$s_{T_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(T_{1i}-\overline{T_1})^2}{n-1} = \frac{(76-76)^2+(77-76)^2+(76-76)^2+(75-76)^2}{9} +$$

$$+\frac{(76-76)^2+(77-76)^2+(75-76)^2+(75-76)^2+(77-76)^2+(76-76)^2}{9} \approx 0{,}67(K^2);$$

$$\overline{T_2} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} T_{2i} = \frac{77{,}4+77{,}2+77{,}4+77{,}3+77{,}4+77{,}3+77{,}2+77{,}3}{10} +$$

$$+\frac{77{,}4+77{,}3}{10} = 77{,}3\ (K);$$

$$s_{T_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(T_{2i}-\overline{T}_2)^2}{n-1} = \frac{(77{,}4-77{,}3)^2+(77{,}2-77{,}3)^2+(77{,}4-77{,}3)^2}{9} +$$

$$+\frac{(77{,}3-77{,}3)^2+(77{,}4-77{,}3)^2+(77{,}3-77{,}3)^2+(77{,}2-77{,}3)^2}{9} +$$

$$+\frac{(77{,}3-77{,}3)^2+(77{,}4-77{,}3)^2+(77{,}3-77{,}3)^2}{9} = \frac{0{,}06}{9} \approx 0{,}0067\ (K^2).$$

$$F_e = s_{T_1}^2 \Big/ s_{T_{21}}^2 = 0{,}67/0{,}0067 = 100.$$

$$f_{кр}(0{,}05;9;9) = 3{,}18.$$

Оскільки, з одного боку, $F_e > f_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$, а з іншого, F_e не належить до інтервалу [0; 3,18] прийняття нульової гіпотези H_0 про більш ефективне використання термопари для вимірювання температури при $T \approx 77$ К порівняно з напівпровідниковим термометром, то при заданому рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ цю гіпотезу як помилкову слід відхилити і прийняти альтернативну гіпотезу H_1, тобто надати переваги напівпровідниковому термометру, що добре узгоджується з експериментальними даними.

Висновки. Отже, у другій частині роботи проаналізовані параметричні критерії Романовського, Стьюдента і Фішера, що широко використовуються при перевірці статистичних гіпотез, сформульовані послідовні кроки їх застосування та наведені формули для розрахунків. Запропоновані та розв’язані типові задачі з допомогою зазначених критеріїв, що дає можливість глибше засвоїти теоретичний матеріал і краще оволодіти навичками їх практичного використання.

У ході дослідження узагальнені численні теоретичні й експериментальні результати про потужні непараметричні (Пірсона і Колмогорова) і параметричні (Романовського, Стьюдента, Фішера) критерії перевірки статистичних гіпотез – фундаменту сучасної математичної статистики. Це дозволило з єдиної позиції охопити широту і сутність проблеми в цілому та віддзеркалити її актуальність.

Робота може бути корисна студентам, аспірантам і викладачам у галузі статистики та іншим спеціалістам при вивченні курсів “Теорія ймовірностей та математична статистика”, “Математична статистика”, “Прикладна статистика”. Подальші наукові розвідки вбачаємо у безпосередньому застосуванні непараметричних і параметричних критеріїв у наукових та прикладних дослідженнях.

Список використаних джерел

41. Романовский В. И. Применения математической статистики в опытном деле. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 248 с.

42. Метрология, сертификация и стандартизация: электрон. учеб. / М. Я. Марусина и др. Раздел 6. Параграф 14. Грубые погрешности и критерии их оценки. URL: http://de.ifmo.ru/bk_netra/page.php?dir=2&tutindex=1&index=39&layer=2

43. Student’s t-test. URL: en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-test

44. Student’s t-test: Comparison of two means. URL: http://195.134.76.37/applets/AppletTtest/Appl_Ttest2.html

45. F-test. URL: https://www.en.wikipedia.org/wiki/F-test

46. Полякова О. В. Методы и способы повышения точности измерений. 2011. URL: http://www.kipia.info/publication/metodyi-i-sposobyi-povyisheniya-tochnosti-izmereniy-chast-pervaya/

47. Руди Д. Ю., Попова М. В., Петров С. И. Грубая погрешность и критерии их исключения. URL: http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/40261/1/eksie_2016_49.pdf

48. Попукайло В. С. Исследование критериев грубых ошибок применительно к выборкам малого объема // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. 2015. № 3 (73). С. 39–44.

49. Критерий согласия Пирсона, Колмогорова, Романовского. URL: https://www.life-prog.ru/view_statistika.php?id=16

50. Попукайло В. С. Обнаружение аномальных измерений при обработке данных малого объема // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2016. № 4–5. С. 42–46.

51. Критерий согласия Романовского. URL: https://www.studopedia.su/10_136360_kriteriy-soglasiya-romanovskogo.html

52. Заляжных В. В. Критерий Романовского. Табличные значения. URL: http://www.arhiuch.ru/st4.htm

53. Заляжных В. В. Критерий Романовского. Лабораторная работа № 8. URL: http://www.arhiuch.ru/lab8.html

54. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. 436 с.

55. Математическая статистика для психологов. *t*-критерий Стьюдента для одной выборки. URL: https://www.statpsy.ru/t-student/t-test-single

56. Методы статистической проверки гипотез о различии данных экспериментальных групп. Критерий t-Стьюдента для одной выборки. URL: https://www.studopedia.ru/15_38460_kriteriy-t-styudenta-dlya-odnoy-viborki.html

57. Математическая статистика для психологов. Пример расчета t-критерия Стьюдента для одной выборки. URL: https:/www.statpsy.ru/t-student/primer-t-test-single/

58. Т-критерии. Портал Знаний StatSoft. URL: http://www. statistica.ru/theory/t-kriterii/

59. Математические методы психологического исследования. Параметрические методы. URL: http://www.gym42.ru/stat/Book/Data/page_2_5_3.htm

60. Методические рекомендации по написанию и оформлению курсовой и выпускной квалификационной работы по психологии и конфликтологии /сост. Нижегородцева Н. В., Мишина Т. В. Раздел 8.5.1. Т-Критерий Стьюдента. URL: http://cito-web.yspu.org/link1/metod/met125/node32.html

61. Зависимые и независимые выборки. URL: https://www.students-library.com/library/read/3129-zavisimye-i-nezavisimye-vyborki

62. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика: посіб. Київ: ВПЦ "Київський університет", 2008. 504 с.

63. Делей В. І. Основи математичної статистики. Тема 2.12. Критерій f-Фішера URL: http://www.lubbook.org/book_393_glava_24_Tema_2.12.Kriterijj_-Fis.html

64. Алгоритмика, статистика и теория вероятностей. Критерий Фишера. URL: http://www.matstats.ru/fisher.html

65. Критерий Фишера. Профессиональный информационно-аналитический ресурс MachineLearning.ru. URL: www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Критерий_Фишера

66. Мармоза А. Т. Теорія статистики. URL: https://www.pidruchniki.com/1554081253033/statistika/perevirka_statistichnih_gipotez_schodo_rozpodiliv

67. Лабораторне заняття № 9. Тема: f-критерій Фішера (f-розподіл). Оцінка різниці між коефіцієнтами варіації. URL: https://www.studfiles.net/preview/5063288/page:10/

68. Fundamentals of Statistics. Two-Sample F-Test. URL: http://www.statistics4u.com/fundstat_eng/cc_test_2sample_ftest.html85

69. Критерий Фишера и критерий Стьюдента в эконометрике. URL: http://univer-nn.ru/ekonometrika/kriterij-fishera-i-kriterij-styudenta-v-ekonometrike/ 70. Критерий согласия Пирсона. Термист. URL: http://www.termist.com/bibliot/stud/stepnov/081_2.htm

References

41. Romanovskiy, V. I. (1947). *Primenenie matematicheskoi statistiki v opytnom dele [Application of mathematical statistics in the practice of experience].* Moskow-Leningrad: Gostechizdat (in Russian).

42. Marusina, M. Ya., Tichanovskii, A. B., Tkalich, V. L., Ushakov, O. Yu., & Cherniyev, A. A. *Metrologiia. sertifikatsiia i standartizatsiia.* Razdel 6.14. Grubye pogreshnosti i kriterii ich otsenki *[Metrology, certification and standardization.* Part 6.14. Blunders and criteria of their assessment]. Retrieved from http://de.ifmo.ru/bk_netra/page.php?dir=2&tutindex=1&index=39&layer=2 (in Russian).

43. Student's t-test. *www.en.wikipedia.org.* Retrieved from https://www.en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-test (in English).

44. Student's t-test: Comparison of two means. *195.134.76.37.* Retrieved from http://195.134.76.37/applets/AppletTtest/Appl_Ttest2.html (in English).

45. F-test. *www.en.wikipedia.org.* Retrieved from https://www.en.wikipedia.org/wiki/F-test (in English).

46. Polyakova, O.V . (2011). Metody i sposoby povysheniia tochnosti izmerenii [The methods and ways of of the measurement accuracy increase]. *www.kipia.info.* Retrieved from http://www.kipia.info/publication/metodyi-i-sposobyi-povyisheniya-tochnosti-izmereniy-chast-pervaya/ (in Russian).

47. Rudi, D. Yu., Popova, M. V., Petrov, S. I. Grubye pogreshnosti i criterii ich iskluchenia [Blunders and criteria of their exclusion]. *www.elar.urfu.ru.* Retrieved from http://www.elar.urfu.ru/bitstream/10995/40261/1/eksie_2016_49.pdf (in Russian).

48. Popukailo, V. S. (2015). Issledovanie kriteriev grubych oshibok primenitelno k vyborkam malogo obyoma [The criterion study of blunders put into practice of a small volume]. *Radioelectronni i kompiuterni systemy – Radio electronic and computer systems, 3 (73),* 39–44 (in Russian).

49. Kriterii soglasiia Pirsona, Kolmogorova, Romanovskogo [Pearson, Kolmogorov and Romanovsky coordination criteria]. *www. life-prog.ru.* Retrieved from https://www. life-prog.ru/view_statistika.php?id=16 (in Russian).

50. Popukailo, V. S. (2016). Obnaruzhenie anomalnych izmerenii pri obrabotke dannych malogo obyoma [Detection of the abnormal measurements in the small volume data processing]. *Tekhnologiya i Konstruirovanie v Elektronnoi Apparature – Technology and design in electronic equipment, № 4–5,* 42–46 (in Russian).

51. Kriterii soglasiia Romanovskogo [Romanovsky coordination criterion]. *www.studopedia.su.* Retrieved from https://www.studopedia.su/10_136360_kriteriy-soglasiya-romanovskogo.html (in Russian).

52. Zaliazhnych, V. V. Kriterii Romanovskogo. Tablichnye znacheniia [Romanovsky criterion. The table mining]. *www.arhiuch.ru.* Retrieved from http://www.arhiuch.ru/st4.htm (in Russian).

53. Zaliazhnych, V. V. Kriterii Romanovskogo. Laboratornaia rabota № 8. [Romanovsky criterion. Laboratory work № 8]. *www.arhiuch.ru.* Retrieved from http://www.arhiuch.ru/lab8.html (in Russian).

54. Van der Varden, B. L. (1960). *Matematicheskaia statistika [Mathematical Statistics].* Moskow: Izdatelstvo Inostrnnoi Literatury (in Russian).

55. Matematicheskaia statistika dlya psikhologov. t-kriterii Studenta dlya odnoi vyborki [Mathematical Statistics for Psychologists. Student test for one sample]. *www.statpsy.ru*. Retrieved from https://www.statpsy.ru/t-student/t-test-single (in Russian).

56. Metody statisticheskoy proverki gipotez o razlichii dannykh eksperimentalnykh grupp. Kriterii t-Studenta dlya odnoy vyborki [Methods for statistical testing of hypotheses about the difference between experimental data. Student test for one sample]. *www.studopedia.ru*. Retrieved from https://www.studopedia.ru/15_38460_kriteriy-t-styudenta-dlya-odnoy-viborki.html (in Russian).

57. Matematicheskaia statistika dlya psikhologov. Primer rasscheta t-kriteriia Studenta dlya odnoi vyborki [Mathematical Statistics for Psychologists. The calculation example of the Student test for one sample]. *www.statpsy.ru*. Retrieved from https:/www.statpsy.ru/t-student/primer-t-test-single (in Ukraine).

58. T-kriterii. Portal znanii StatSoft [T-test. The StatSof knowledge portal]. *www.statistica.ru*. Retrieved from http://www.statistica.ru/theory/t-kriterii (in Russian).

59. Matematicheskie metody psikhologicheskogo issledovaniia. Parametricheskie metody [Mathematical methods in the psychology. Parametrical methods]. *www.gym42.ru*. Retrieved from http://www.gym42.ru/stat/Book/Data/page_2_5_3.htm (in Russian).

60. Nizhegorodtseva, N. V., Mishina, T. V. (Comp.). *Metodicheskiye rekomendatsii po napisaniyu i oformleniyu kursovoy i vypusknoy kvalifikatsionnoy raboty po psikhologii i konfliktologii*. Razdel 8.5.1. T-kriterii Studenta [*Guidelines for writing and design coursework and final qualifying work on psychology and conflictology*. Part 8.5.1. Student T-test]. Retrieved from http://www.cito-web.yspu.org/link1/metod/met125/node32.html (in Russian).

61. Zavisimye i nezavisimye vyborki [Dependent and independent samples]. *www.students-library.com*. Retrieved from https://www.students-library.com/library/read/3129-zavisimye-i-nezavisimye-vyborki (in Russian).

62. Kartashov, M. V. (2008). *Imovirnist, protsesy, statystyka [Probability, processes, statistics]*. Kyiv: VPTs "Kyivskyi Universytet" (in Ukrainian).

63. Delei, V. I. *Osnovy matematicheskoi statistiki*. Tema 2.12. Kriterii Fishera. [*Fundamentals of Mathematical Statistics*. Chapter 2.12. Fisher test]. Retrieved from http://www.lubbook.org/book_393_glava_24_Tema_2.12.Kriterijj_-Fis.html (in Ukrainian).

64. Algoritmika. statistika i teoriya veroyatnostey. Kriterii Fishera [Algorithmics, statistics and probability theory. F-test]. *www.matstats.ru*. Retrieved from http://www.matstats.ru/fisher.html (in Russian).

65. Kriterii Fishera [Fisher test]. *www.machinelearning.ru*. Retrieved from http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title (in Russian).

66. Marmoza, A. T. (2013). *Teoriia statystyky*. Rozdil 7.5 Perevirka statystychnych gipotez shcodo rozpodiliv [*Theory of Statistics*. Part 7.5 The testing of statistical hypothesis about distributions]. Retrieved from https://www.pidruchniki.com/1554081253033/statistika/perevirka_statistichnih_gipotez_schodo_rozpodiliv (in Ukrainian).

67. Laboratorne zannyattya № 9. Tema: *f*-kriterii Fishera (f-distribution). Otsinka riznytsi mizh koefitsiientamy variatsii [Laboratory work № 9. Subject: f-test. Estimation of the difference between coefficients of variation]. *www.studfiles.net*. Retrieved from https://www.studfiles.net/preview/5063288/page:10/ (in Russian).

68. Fundamentals of Statistics. Two-Sample F-Test. *www.statistics4u.com*. Retrieved from http://www.statistics4u.com/fundstat_eng/cc_test_2sample_ftest.html (in English).

69. Kriterii Fishera i kriterii Studenta v ekonometrike [Fisher Criterion and Student test in Econometrics]. *univer-nn.ru*. Retrieved from http://univer-nn.ru/ekonometrika/kriterij-fishera-i-kriterij-styudenta-v-ekonometrike/ (in Russian).

F. V. Motsnyi,
DSc in Physics & Mathematics, Professor,
Professor of Department for Economic and Mathematical Discipline
& Information Technologies,
National Academy of Statistics, Accounting and Audit,
E-mail: fv.motsnyi@ukr.net; motsnyifv@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6377-3188

Analysis of Nonparametric and Parametric Criteria for Statistical Hypotheses Testing. Chapter II. Agreement Criteria of Romanovsky, Student and Fisher

Any assumptions or waiting for that or another distribution of random values are statistical hypotheses. The objective knowledge about hypotheses can obtain always using the spatial statistical tests that are named agreement criteria. It's known about 100 different agreement criteria.

Nonparametric tests don't include in calculations the parameters of the probability distribution and operates with frequency only. They don't assume that the experimental data have a specific distribution. Nonparametric criteria are widely used in analysis of the empirical data, in the checking of the hope models, the simple and complex statistical hypotheses and take a prominent place in science and practice.

Parametric tests contain the distribution parameters. They are used for the samples with the normal distribution. Parametric tests permit: 1) to check the statistical hypotheses about the normal distribution characteristics of the population obtained on the base of sample processing; 2) to except the gross errors; 3) to evaluate the difference of the mathematical average values ; 4) and to distinguish the dispersions. That is why these tests are very extensively used in mathematical statistics too.

The paper continues ideas of the author's works [1; 2] devoted to advanced based tools of the mathematical statistics. The aim of the work is to generalize the well known theoretical and experimental results about the statistical tests of the hypotheses testing. Parametric criteria (Romanovsky, Student, Fisher) are discussed carefully from the uniform point of view. The peculiarities of its using for statistical hypothesis testing are highlighted. The typical tasks are suggested and solved. All this takes an opportunity to cover the main point (essence) of the problem as a whole and evaluate its actuality directly.

Key words: *statistical hypotheses, level of statistical significance, degrees of freedom, critical point, distribution laws, empirical frequency, theoretical frequency, mathematical expectation (average), variance, mean square deviation, gross mistakes, parametric criteria, Romanovsky criterion, Student criterion, Fisher criterion.*

Бібліографічний опис для цитування:

Моцний Ф. В. Аналіз непараметричних і параметричних критеріїв перевірки статистичних гіпотез. Частина ІІ. Критерії узгодження Романовського, Стьюдента і Фішера // Статистика України. 2019. № 1. С. 13–23. Doi: 10.31767/su. 1(84)2019.01.02

Bibliographic description for quoting:

Motsnyi, F. V. (2019). Analiz neparametrychnykh i parametrychnykh kryteriiv perevirky statystychnykh hipotez. Chastyna II. Kryterii uzhodzhennia Romanovskoho, Stiudenta i Fishera. [Analysis of Nonparametric and Parametric Criteria for Statistical Hypotheses Testing. Chapter II. Agreement Criteria of Romanovsky, Student and Fisher]. *Statystyka Ukrainy – Statistics of Ukraine, 1,* 13–23. Doi: 10.31767/su. 1(84)2019.01.02.