УДК 656.61.052

MIXED LAWS OF PROBABILITY DISTRIBUTION OF RANDOM ERROR OF NAVIGATION MEASUREMENTS

СМЕШАННЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ НАВИГАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Astajkin D.V., *senior lecturer, ONMA*

Д.В. Астайкин, *старший преподаватель, ОНМА*

Odessa National Maritime Academy, Ukraine
Одесская Национальная Морская Академия, Украина

ABSTRACT

The functions of probability distribution of random error of the navigation measurement for the second type mixed distribution are obtained. Analytical expressions for functions of distribution resulted in five values of substantial parameters of the mixed laws and their graphic dependences obtained.

Key words: safety of navigation, navigational measurement, mixed laws of probability distribution, distribution functions.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами

При обработке навигационной информации, содержащей погрешности измерений, допускается, что случайные погрешности навигационных измерений подчиняются нормальному закону.

Однако в последнее время во многих случаях при обработке статистических данных погрешностей навигационных измерений, полученных в натурных наблюдениях, обнаружено, что они не подчиняются нормальному закону. Это обстоятельство обусловило поиск альтернативных законов распределения вероятностей погрешностей навигационных измерений.

Анализ последних достижений и публикаций, в которых начато решение данной проблемы и выделение нерешенных ранее частей общей проблемы.

Погрешности навигационных измерений, полученные в натурных наблюдениях, как указано в работах [1, 2], не подчиняются нормальному закону. В работах [1, 3, 4] предложены модели смешанного распределения разных типов.

Смешанные законы распределения, плотность которых выражается в явном виде, получены в работе [5], однако отсутствуют выражения для их функции распределения, что затрудняет проверку статических гипотез распределения случайных погрешностей навигационных измерений, полученных в натурных наблюдениях.

Формулировка целей статьи (постановка задачи).

Целью статьи является вывод аналитического выражения функции распределения вероятностей случайных погрешностей измерения навигационных параметров, подчиняющихся смешанному закону второго типа, плотность которого выражается в явном виде.

Изложение основного материала исследования с обоснованием полученных научных результатов.

Как показано в работе [5], базовая плотность смешанного закона распределения вероятностей второго типа $f_{b2}(x)$ имеет следующий вид:

$$f_{b2}(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}2} \frac{1}{(x^2/2+\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

С помощью этой плотности, как показано в [5], формируется семейство плотностей смешанного распределения второго типа, которое можно использовать для случайных погрешностей, имеющих гистограммы с «утяжеленными хвостами», причем аналитически они выражаются следующим образом:

$$f_2(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n+1)\alpha^{n+1}}{\sqrt{2}2^{n+1}n!} \frac{1}{(x^2/2+\alpha)^{n+\frac{3}{2}}}, \quad (n \le 5)$$

где α - масштабный параметр;

n – существенный параметр.

Значение существенного параметра не должно превосходить значения 5 для выполнения требования наличия «утяжеленных хвостов». На рис. 1 приведены кривые плотности распределения нормированных и центрированных случайных погрешностей с существенным параметром от 1 до 5, которые снизу ограничены кривой базовой плотности (Пирсона VII типа), а сверху - кривой плотности закона Гаусса. Случайная величина может принимать значения от -6 с.к.о. до 6 с.к.о.

Найдем функцию распределения $F_P(x)$ для базовой плотности $f_{b2}(x)$, которая определяется выражением (1):

$$F_P(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x} \frac{d\xi}{(\frac{\xi^2}{2}+\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Произведем замену переменной:

$$\frac{\xi^2}{2} + \alpha = y^2, \quad d\xi = \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2 - \alpha}} dy.$$

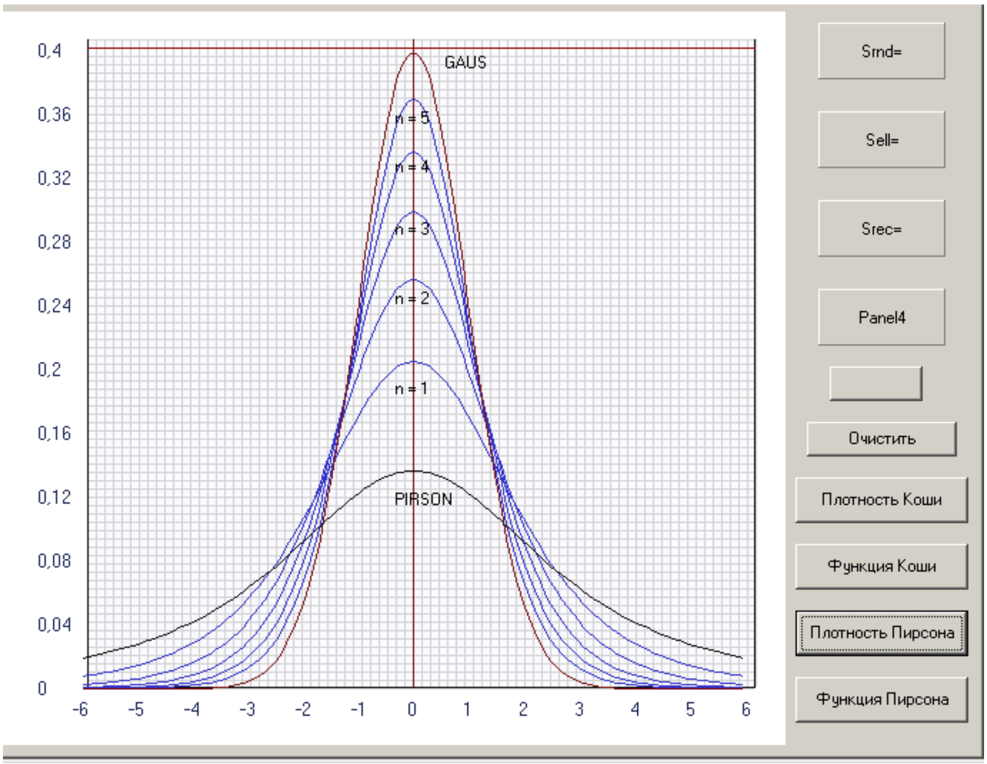

Рис. 1. Плотность распределения смешанного закона второго типа

В начале найдем первообразную функцию для неопределенного интеграла $\Im$:

$$\Im = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}y}{(y^2)^{3/2}} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \alpha}} = \frac{\alpha}{2} \int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2 - \alpha}}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение к виду рациональной дроби, используя первую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{y^2 - \alpha} = -y + t, \quad y^2 - \alpha = y^2 - 2yt + t^2 \text{ или } y = \frac{t^2 + \alpha}{2t}. \qquad (1)$$

Следовательно, можно записать:

$$\sqrt{y^2 - \alpha} = -\frac{t^2 + \alpha}{2t} + t = \frac{t^2 - \alpha}{2t}.$$

С учетом (1) получим:

$$t = y + \sqrt{y^2 - \alpha}, \quad y^2 = \frac{(t^2 + \alpha)^2}{4t^2}, \quad dy = \frac{t^2 - \alpha}{2t^2} dt.$$

Поэтому:

$$\Im=\frac{\alpha}{2}\int\frac{(t^2-\alpha)4t^2 2t}{2t^2(t^2+\alpha)^2(t^2-\alpha)}dt=\alpha\int\frac{2t}{(t^2+\alpha)^2}dt\,.$$

Производим очередную замену переменной:

$$t^2+\alpha=z\,,\quad 2tdt=dz\,,\quad \Im=\alpha\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{\alpha}{z}\,.$$

Возвратимся к исходной переменной и получим:

$$\Im=-\frac{\alpha}{t^2+\alpha}=-\frac{\alpha}{2y^2+2y\sqrt{y^2-\alpha}}=-\frac{\alpha}{\xi^2+2\alpha+\xi\sqrt{\xi^2+2\alpha}}\,.$$

Функция распределения $F_P(x)$ определяется из выражения:

$$F_P(x)=-\frac{\alpha}{\xi^2+2\alpha+\xi\sqrt{\xi^2+2\alpha}}\Bigg|_{-\infty}^{x}=1-\frac{\alpha}{x^2+2\alpha+x\sqrt{x^2+2\alpha}}\,,$$

так как $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\alpha}{x^2+2\alpha+x\sqrt{x^2+2\alpha}}=-1.$

Таким образом, окончательно получим выражение для функции распределения:

$$F_P(x)=1-\frac{\alpha}{x^2+2\alpha+x\sqrt{x^2+2\alpha}}\,.$$

Аналогично для смешанного закона распределения второго типа с плотностью распределения:

$$f_{pn}(\xi)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot(2n+1)\alpha^{n+1}}{\sqrt{2}2^{n+1}n!}\;\frac{1}{(\xi^2/2+\alpha)^{n+\frac{3}{2}}}$$

функция распределения определяется следующим образом:

$$F_{Pn}(x)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot(2n+1)\alpha^{n+1}}{\sqrt{2}2^{n+1}n!}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{d\xi}{(\frac{\xi^2}{2}+\alpha)^{n+\frac{3}{2}}}\,.$$

Произведем замену переменной:

$$y^2 = \frac{\xi^2}{2} + \alpha\,, \qquad d\xi = \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2-\alpha}}dy\,.$$

Сделаем подстановку и рассмотрим неопределенный интеграл $\Im$:

$$\Im = \sqrt{2}\int \frac{y}{y^{2n+3}\sqrt{y^2-\alpha}}dy = \sqrt{2}\int \frac{dy}{y^{2n+2}\sqrt{y^2-\alpha}}\,.$$

Избавимся от иррациональной дроби в подынтегральной функции, используя первую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{y^2-\alpha} = -y + t\,,\ \text{откуда}\ t = y + \sqrt{y^2-\alpha}\,,\ \text{или}\ y = \frac{t^2+\alpha}{2t}\,,$$

при этом имеют место соотношения:

$$\sqrt{y^2-\alpha} = \frac{t^2-\alpha}{2t}\,, \quad dy = \frac{t^2-\alpha}{2t^2}dt\,, \quad y^{2n+2} = \frac{(t^2+\alpha)^{2n+2}}{(2t)^{2n+2}}\,.$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл $\Im$, имеем:

$$\Im = \sqrt{2}\int \frac{(t^2-\alpha)2t(2t)^{2n+2}}{2t^2(t^2-\alpha)(t^2+\alpha)^{2n+2}}dt = \sqrt{2}\,2^{2n+1}\int \frac{t^{2n}2tdt}{(t^2+\alpha)^{2n+2}}\,.$$

Произведем замену переменной:

$$t^2 + \alpha = z\,, \quad 2tdt = dz\,.$$

Следовательно, искомый интеграл принимает вид:

$$\Im = \sqrt{2}\,2^{2n+1}\int \frac{(z-\alpha)^n}{z^{2n+2}}dz\,.$$

Разложим в ряд Маклорена числитель подынтегральной функции:

$$(z-\alpha)^n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!}z^{n-j}\alpha^j\,.$$

При этом исходный интеграл принимает вид:

$$\Im=\sqrt{2}2^{2n+1}\int\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\frac{n!\alpha^{j}}{j!(n-j)!}z^{-n-2-j}dz=\sqrt{2}2^{2n+1}n!\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\frac{\alpha^{j}}{j!(n-j)!}\int z^{-n-2-j}dz\},$$

$$\Im=\sqrt{2}2^{2n+1}n!\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\alpha^{j}}{j!(n-j)!(n+1+j)}z^{-n-1-j}\}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\Im=\sqrt{2}2^{2n+1}n!\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\alpha^{j}}{j!(n-j)!(n+1+j)}\frac{1}{(\xi^{2}+2\alpha+\xi\sqrt{\xi^{2}+2\alpha})^{n+1+j}}\}.$$

Теперь несложно записать выражение, из которого определяется функция распределения $F_{Pn}(x)$:

$$F_{Pn}(x)=\sqrt{2}2^{2n+1}n!\frac{1\cdot3\cdot5\cdot(2n+1)\alpha^{n+1}}{\sqrt{2}2^{n+1}n!}\times$$

$$\times\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\alpha^{j}}{j!(n-j)!(n+1+j)}\frac{1}{(\xi^{2}+2\alpha+\xi\sqrt{\xi^{2}+2\alpha})^{n+1+j}}\}\Bigg|_{-\infty}^{x}=$$

$$2^{n}1\cdot3\cdot5\cdot(2n+1)\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\alpha^{n+1+j}}{j!(n-j)!(n+1+j)}\frac{1}{(\xi^{2}+2\alpha+\xi\sqrt{\xi^{2}+2\alpha})^{n+1+j}}\}\Bigg|_{-\infty}^{x}. \qquad (3)$$

Учитывая, что при $\xi\to-\infty$ выражение (3) равно -1, то окончательно выражение для функции распределения $F_{Pn}(x)$ принимает вид:

$$F_{Pn}(x)=1+2^{n}1\cdot3\cdot5\cdot(2n+1)\{\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j+1}}{j!(n-j)!(n+1+j)}\frac{\alpha^{n+1+j}}{(x^{2}+2\alpha+x\sqrt{x^{2}+2\alpha})^{n+1+j}}\},\text{ или}$$

$$F_{Pn}(x)=1-2^{n}1\cdot3\cdot5\cdot(2n+1)\{\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j!(n-j)!(n+1+j)}\frac{\alpha^{n+1+j}}{(x^{2}+2\alpha+x\sqrt{x^{2}+2\alpha})^{n+1+j}}\}. \qquad (4)$$

Так как смешанное распределение второго типа применимо для существенного параметра $n\le5$, то в табл. приведены аналитические выражения функции распределения $F_{P1}(x)...F_{P5}(x)$, а их графики представлены на рис. 2.

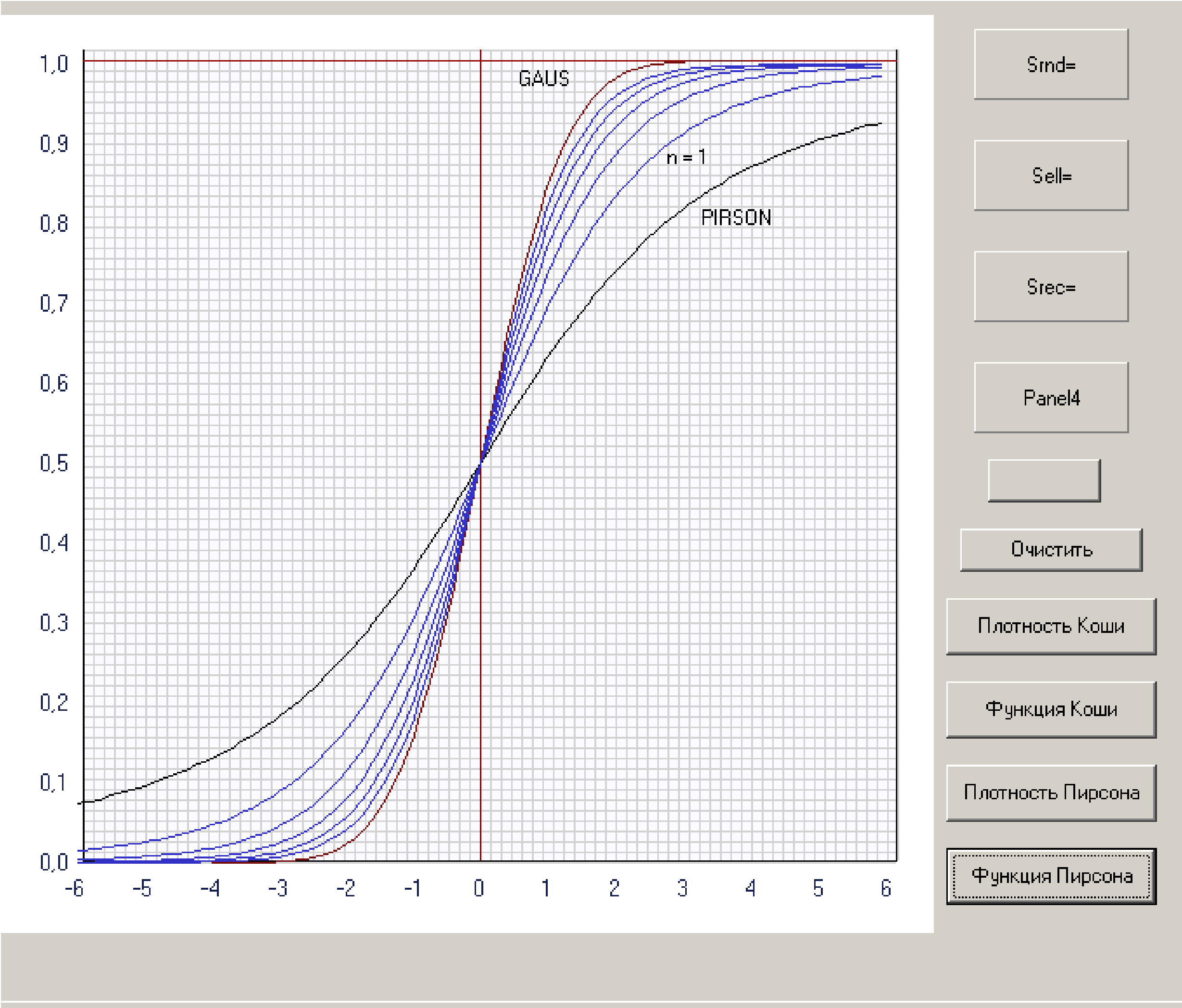

Рис. 2. Функции распределения смешанного закона второго типа

Таблица. Функции распределения смешанных распределений

$F_{Pn}(x)$	Аналитические выражения
$F_{P1}(x)$	$1-[\frac{3\alpha^2}{z^2}-\frac{2\alpha^3}{z^3}]$
$F_{P2}(x)$	$1-[\frac{10\alpha^3}{z^3}-\frac{15\alpha^4}{z^4}+\frac{6\alpha^5}{z^5}]$
$F_{P3}(x)$	$1-[\frac{35\alpha^4}{z^4}-\frac{84\alpha^5}{z^5}+\frac{70\alpha^6}{z^6}-\frac{20\alpha^7}{z^7}]$
$F_{P4}(x)$	$1-[\frac{126\alpha^5}{z^5}-\frac{420\alpha^6}{z^6}+\frac{540\alpha^7}{z^7}-\frac{315\alpha^8}{z^8}+\frac{70\alpha^9}{z^9}]$
$F_{P5}(x)$	$1-[\frac{462\alpha^6}{z^6}-\frac{1980\alpha^7}{z^7}+\frac{3465\alpha^8}{z^8}-\frac{3080\alpha^9}{z^9}+\frac{1386\alpha^{10}}{z^{10}}-\frac{252\alpha^{11}}{z^{11}}]$

В приведенных выражениях принято обозначение:

$$z = x^2 + 2\alpha + x\sqrt{x^2 + 2\alpha}\,.$$

Выводы и перспектива дальнейшей работы по данному направлению

В статье получены аналитические выражения в явном виде функций распределения вероятностей погрешностей навигационных измерений смешанного закона второго типа для значений существенного параметра от 1 до 5, которые описывают гистограммы с «утяжеленными хвостами». В дальнейшем целесообразно произвести проверку корректности полученных выражений с помощью численного интегрирования плотностей распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондрашихин В.Т. Определение места судна / В.Т. Кондрашихин – М.: Транспорт, 1989. – 250 с.
2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation // The Journal of Navigation. – Vol. 32.- № 3. – P. 426-429.
3. Ткаченко А.С. К вопросу формирования модели смешанного распределения погрешностей навигационных измерений / А.С. Ткаченко // Судовождение: Сб. научн. трудов./ ОНМА, Вып. 10, - Одесса: «ИздатИнформ», 2005 - С. 118-122.
4. Алексишин В.Г. Требования к плотности распределения среднего квадратического отклонения в модели смешанного распределения / Алексишин В.Г., Ткаченко А.С. // Судовождение:Сб. научн. трудов./ ОНМА, Вып. 11. - Одесса: «ИздатИнформ», 2006 – С. 9 – 13.
5. Ткаченко А.С. Совершенствование методов контроля и прогноза места судна. Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.22.13/ ОНМА. – Одесса, 2009. – 24 с.