УДК 656.61.052

SHIP POSITION EFFICIENCY AT MIXTURE OF THE NORMALLY DISTRIBUTED ERRORS OF SELECTION

ЭФФЕКТИВНОСТЬ КООРДИНАТ СУДНА ПРИ СМЕСИ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫБОРКИ

D.V. Astajkin, *senior lecturer, ONMA*
Д.В. Астайкин, *старший преподаватель, ОНМА*
Odessa National Maritime Academy, Ukraine
Одесская Национальная Морская Академия, Украина

ABSTRACT

Obtained analytical expression for initial dataset errors density of distribution, which contains navigational parameter measurement errors distributed by normal law with different values of variance.

Surplus measurements position fix efficiency assessment formula is obtained for such situation.

Keywords: safety of navigation, navigation measuring, mixed laws of probability distribution, functions of distribution.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами

При обработке навигационной информации допускается, что случайные погрешности навигационных измерений подчиняются нормальному закону. В последнее время в ряде случаях при обработке статистических данных погрешностей навигационных измерений, полученных в натурных наблюдениях, было обнаружено, что они не подчиняются нормальному закону. Это обусловило поиск альтернативных законов распределения вероятностей погрешностей навигационных измерений.

Анализ последних достижений и публикаций, в которых начато решение данной проблемы и выделение нерешенных ранее частей общей проблемы

В работах [1, 2] показано, что погрешности навигационных измерений, полученные в натурных наблюдениях, не подчиняются нормальному закону. Модели смешанного распределения разных типов предложены в работах [1, 3, 4].

Смешанные законы распределения, плотность которых выражается в явном виде, получены в работе [5], однако не рассмотрена ситуация, когда исходная выборка содержит нормально распределенные погрешности навигационных измерений с различными дисперсиями, что определило выбор настоящей работы.

Формулировка целей статьи (постановка задачи)

Целью статьи является вывод аналитического выражения плотности распределения погрешности выборки, содержащей нормально распределенные погрешности навигационных измерений с различной дисперсией, и разработки процедуры оценки эффективности координат судна, полученных в такой ситуации.

Изложение основного материала исследования с обоснованием полученных научных результатов

Рассмотрим случай, когда исходная выборка, по которой производится оценка стохастических характеристик случайной погрешности ξ, содержит случайные погрешности с различными значениями дисперсии. Допустим, погрешности общей выборки являются нормально распределенными случайными величинами, принадлежащими различным частным выборкам с определенным значением дисперсии σ_i^2. Другими словами, общая выборка является смесью частных выборок с различными дисперсиями, причем с.к.о. σ выборок является дискретным распределением со значениями $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_i, \ldots \sigma_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots p_n$. Тогда плотность распределения общей выборки $f_s(\xi)$ имеет следующий вид:

$$f_s(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f_N(\xi, \sigma_i) p_i .$$

Учитывая выражение для нормальной плотности $f_N(\xi, \sigma_i)$, получим:

$$f_s(\xi) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad \text{или}$$

$$f_s(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\sigma_i} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_i^2}\right).$$

Полученная плотность распределения погрешностей измерений навигационного параметра является истинной плотностью распределения случайных величин смешанной выборки, а предполагаемая плотность по-прежнему является плотностью нормального распределения. Для определения эффективности обсервованных координат судна, полученных методом наименьших квадратов при наличии избыточных измерений, найдем несобственные интегралы q_s, p_s и s_s.

Как и в предыдущем случае, несобственный интеграл q_s зависит только от предполагаемого нормального распределения и имеет следующее выражение:

$$q_s = -\frac{1}{\sigma_m^2}.$$

В свою очередь, несобственный интеграл $\mathrm{p_s}$ выражается следующим образом:

$$\mathrm{p_s} = \int\limits_{R1} \mathrm{f_s(x)}\{[\frac{\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\varphi(\mathrm{x})}{\varphi(\mathrm{x})}]^2\}\mathrm{dx} = \int\limits_{R1}\frac{\mathrm{x}^2}{\sigma_{\mathrm{m}}^4}\mathrm{f_s(x)dx} = \frac{1}{\sigma_{\mathrm{m}}^4}\int\limits_{R1}\mathrm{x}^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{p}_i}{\sigma_i}\exp(-\frac{\xi^2}{2\sigma_i^2})\mathrm{dx}$$

или

$$\mathrm{p_s} = \frac{1}{\sigma_{\mathrm{m}}^4}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{p}_i\int\limits_{R1}\mathrm{x}^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp(-\frac{\mathrm{x}^2}{2\sigma_i^2})\mathrm{dx}\,.$$

Так как справедливо выражение $\int\limits_{R1}\mathrm{x}^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\exp(-\frac{\mathrm{x}^2}{2\sigma_i^2})\mathrm{dx} = \sigma_i^2$, то окончательно несобственный интеграл $\mathrm{p_s}$ имеет следующее выражение:

$$\mathrm{p_s} = \frac{1}{\sigma_{\mathrm{m}}^4}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{p}_i\sigma_i^2\,.$$

Найдем выражение для последнего несобственного интеграла $\mathrm{s_s}$, для чего найдем производную $\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{f_s(x)}$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{f_s(x)} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{p}_i}{\sigma_i}\exp(-\frac{\mathrm{x}^2}{2\sigma_i^2})\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{p}_i}{\sigma_i}(\frac{-\mathrm{x}}{\sigma_i^2})\exp(-\frac{\mathrm{x}^2}{2\sigma_i^2})\,,$$

а выражение для ее квадрата:

$$[\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{f_s(x)}]^2 = \frac{1}{2\pi}[\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{p}_i}{\sigma_i}(\frac{-\mathrm{x}}{\sigma_i^2})\exp(-\frac{\mathrm{x}^2}{2\sigma_i^2})]^2\,.$$

Поэтому для несобственного интеграла $\mathrm{s_s}$ справедливо выражение:

$$\mathrm{s_s} = \int\limits_{R1}\frac{\frac{1}{2\pi}[\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{p}_i}{\sigma_i}(\frac{-\mathrm{x}}{\sigma_i^2})\exp(-\frac{\mathrm{x}^2}{2\sigma_i^2})]^2}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{p}_i}{\sigma_i}\exp(-\frac{\mathrm{x}^2}{2\sigma_i^2})}\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{R1}\mathrm{x}^2\frac{[\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{p}_i}{\sigma_i^3}\exp(-\frac{\mathrm{x}^2}{2\sigma_i^2})]^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{p}_i}{\sigma_i}\exp(-\frac{\mathrm{x}^2}{2\sigma_i^2})}\mathrm{dx}\,.$$

С учетом полученных выражений для несобственных интегралов $\mathrm{q_s}$, $\mathrm{p_s}$ и $\mathrm{s_s}$ записываем формулу для эффективности:

$$e = \frac{q_s^2}{p_s s_s} = \frac{\frac{1}{\sigma_m^4}}{\frac{1}{\sigma_m^4}\sum_{i=1}^{n} p_i \sigma_i^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R1} x^2 \frac{[\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\sigma_i^3} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2})]^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\sigma_i} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2})} dx}.$$

Учитываем, что $\sum_{i=1}^{n} p_i \sigma_i^2 = \sigma_m^2$, и окончательно получим:

$$e = \frac{1}{\frac{\sigma_m^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{R1} x^2 \frac{[\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\sigma_i^3} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2})]^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\sigma_i} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2})} dx}.$$

Выводы и перспектива дальнейшей работы по данному направлению

В статье получено аналитическое выражение плотности распределения вероятностей погрешностей исходной выборки, которая содержит погрешности измерения навигационного параметра, подчиненные нормальному распределению с различными значениями дисперсии. Произведен вывод формулы оценки эффективности обсервованных координат судна, рассчитанных методом наименьших квадратов, при использовании такой выборки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондрашихин В.Т. Определение места судна. – М.: Транспорт, 1989. – 250 с.
2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation // The Journal of Navigation. – Vol. 32. - № 3. – P. 426-429.
3. Ткаченко А.С. К вопросу формирования модели смешанного распределения погрешностей навигационных измерений // Судовождение. – 2005. - № 10 - С. 118-122.
4. Алексишин В.Г. Требования к плотности распределения среднего квадратического отклонения в модели смешанного распределения / Алексишин В.Г., Ткаченко А.С. // Судовождение. – 2006. - № 11. – С. 9 – 13.
5. Ткаченко А.С. Совершенствование методов контроля и прогноза места судна. Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.22.13/ ОНМА. – Одесса, 2009. – 24 с.