УДК 656.61.052

MATHEMATICAL MODEL OF MOVEMENT OF THE VESSEL WITH AUXILIARY WIND-PROPULSORS

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ СУДНА СО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫМИ ВЕТРОДВИЖИТЕЛЯМИ

O.F. Kryvyi, *Dr. Sci., professor;* **M.V. Miyusov,** *Dr. Sci., professor*
А.Ф. Кривой, *д.ф.-м.н., профессор*, **М.В**. **Миюсов**, *д.т.н., профессор*

National University «Odessa Maritime Academy», Ukraine
Национальный университет «Одесская морская академия», Украина

ABSTRACT

A non-linear mathematical model of the vessel's movement considering auxiliary wind-propulsors was designed. Inertial and non-inertial components of forces and moments acting on the ship in plane (two-dimensional) motion were analyzed. The model takes into account the positional hydrodynamic, aerodynamic forces and moments on the ship's hull, rudder, propeller and wind-propulsors, as well as dynamics of the complex "engine – propeller". Expressions for these forces and moments, in particular, caused by the influence of propulsors (sails) were obtained.

Key words: plane motion of the ship, propulsion complex, wind-propulsor, mathematical model.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами

Решение различных задач оптимального управления в судовождении, в частности: разгона и торможения, маневрирования, курсовой стабилизации, позиционирования и других,- предполагает наличие адекватных математических моделей динамики судна, учитывающих его конструктивные особенности и сложность выполняемых маневров. Такие модели являются необходимыми для прогнозирования поведения судна при различных сочетаниях значений параметров управляющих органов судна (положения рулей, топливной тяги, площади и угла поворота парусов и т.п.). Особенно актуально наличие адекватных математических моделей при разработке и проектировании судовых систем автоматического управления и тренажеров.

Анализ последних достижений и публикаций, в которых начато решение данной проблемы и выделение нерешенных ранее частей общей проблемы

В работе [1] с помощью полученной математической модели детально исследована работа пропульсивного комплекса судна с ветродвижителем при прямолинейном движении. Выводу и исследованию различных математических моделей плоского движения судна без ветродвижителей посвящено много работ [2-8]. Однако при наличии ветродвижителей указанные математические модели изучались только для частных маневров судна [1].

Формулирование целей статьи (постановка задачи)

Целью настоящей работы является построение общей адекватной математической модели динамики движения судна и его пропульсивного комплекса с учетом аэродинамических сил и в частности при наличии ветродвижителей.

Изложение материала исследования с обоснованием полученных научных результатов

1. Инерционные составляющие математической модели динамики судна.

Силы и моменты, действующие на судно можно разделить на инерционные и неинерционные составляющие. Равенство указанных сил и моментов, согласно условиям равновесия, приводит к дифференциальным уравнениям динамики судна.

Пусть v_x, v_y плоские составляющие вектора линейной скорости судна $\vec{v} = (v_x; v_y)$ в связанной с судном системе координат, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} -$ величина вектора скорости судна в плоскости движения. Обозначим через β, ω_z соответственно угол дрейфа судна и величину угловой скорости вокруг оси Z, перпендикулярной плоскости движения. Относительно указанных кинематических параметров движения судна, на основании принципа Д'Аламбера, можно записать следующую нелинейную систему дифференциальных уравнений [1-5]

$$
\begin{gathered}
(m + \lambda_{11})(\frac{dv}{dt}\cos\beta - v\frac{d\beta}{dt}\sin\beta) + (m + \lambda_{22})v\omega_z \sin\beta - \lambda_{26}\omega_z^2 = N_x, \\
-(m + \lambda_{22})(\frac{dv}{dt}\sin\beta + v\frac{d\beta}{dt}\cos\beta) + \lambda_{26}\frac{d\omega_z}{dt} + (m + \lambda_{11})v\omega_z\cos\beta = N_y, \qquad (1) \\
(J_z + \lambda_{26})\frac{d\omega_z}{dt} - \lambda_{26}(\frac{dv}{dt}\sin\beta + v\frac{d\beta}{dt}\cos\beta) - (\lambda_{22} - \lambda_{11})\frac{v^2}{2}\sin 2\beta + \lambda_{26}v\omega_z\cos\beta = M_z,
\end{gathered}
$$

где $m-$масса судна, $J_z -$осевой момент инерции, $\lambda_{kj} -$присоединенные массы и инерции, N_x, N_y и M_z соответственно продольная и поперечная силы, а также горизонтальный момент действующие на судно.

Левые части первых двух уравнений системы (1) описывают проекции инерционных сил, а третье - горизонтальный инерционный момент.

Перейдем в системе (1) к безразмерным величинам. Для этого введем безразмерное время и безразмерные величины линейной и угловой скорости: $\tau = t\frac{v_0}{L}$, $\tilde{v} = \frac{v}{v_0}$, $\omega = \omega_z\frac{L}{v_0}$, где L и v_0 соответственно длина судна по ватерлинии и величина скорости судна в момент начала маневра (начальная скорость), тогда после несложных преобразований система (1) примет вид (штрихом обозначена производная по безразмерному времени τ):

$$
\begin{gathered}
m_{11}(\tilde{v}'\cos\beta - \tilde{v}\beta'\sin\beta) + m_{22}\tilde{v}\omega\sin\beta - m_{26}\omega^2 = n_x, \\
-m_{22}(\tilde{v}'\sin\beta + \tilde{v}\beta'\cos\beta) + m_{26}\omega' + m_{11}\tilde{v}\omega\cos\beta = n_y, \qquad (2)\\
m_{66}\omega' - m_{26}(\tilde{v}'\sin\beta + \tilde{v}\beta'\cos\beta) + m_{12}\frac{\tilde{v}^2}{2}\sin 2\beta + m_{26}\tilde{v}\omega_z\cos\beta = m_z,
\end{gathered}
$$

где

$$
m_{11} = \frac{2(m+\lambda_{11})}{\rho SL},\; m_{22} = \frac{2(m+\lambda_{22})}{\rho SL},\; m_{26} = \frac{2\lambda_{26}}{\rho SL^2},\; m_{66} = \frac{2(J_z+\lambda_{66})}{\rho SL^3},
$$

$$
m_{12} = m_{11} - m_{22},\; n_x = \frac{2N_x}{\rho S v_0^2},\;\; n_y = \frac{2N_y}{\rho S v_0^2},\;\; m_z = \frac{2M_z}{\rho SLv_0^2},
$$

$S = LT\sigma_Д$ – приведенная площадь погруженной части диаметральной плоскости; T – осадка судна на миделе, ρ – массовая плотность морской воды ($\rho = 1025\frac{кг}{м^3}$), $\sigma_Д$ – приведенный коэффициент полноты погруженной части диаметральной плоскости для вычисления которого можно, например, воспользоваться формулой [2,3]

$$
\sigma_Д = \tilde{\sigma} + 0.054\frac{L}{T}(\psi_1 + \psi_2),
$$

где $\psi_1 = (T_k - T_n)/L$, $\psi_2 = 0$, если число Фруда $\mathrm{Fr} < 0,3$ и $\psi_2 = 0.028\sin(5.2(Fr - 0,3)) - 0.13(0.01 + x_G/L)$, если $\mathrm{Fr} > 0,3$, T_k – осадка судна кормой, T_n – осадка судна носом, x_G – абсцисса центра тяжести судна, $\tilde{\sigma} = 0,975$ для судов с сигароподобными корпусами, $\tilde{\sigma} = 0,962$ для судов с утолщенным дейдвудом.

Введем обозначения: $k_1 = \frac{\lambda_{11}}{\rho W}$, $k_2 = \frac{\lambda_{22}}{\rho W}$, $k_3 = \frac{\lambda_{66}}{\rho W \rho_z^2}$, где $W = C_b LBT$ – объемное водоизмещение судна, C_b – коэффициенты общей полноты, B – ширина судна по действующую ватерлинию, ρ_z – радиус инерции массы корпуса относительно вертикальной оси. Тогда коэффициенты системы (2) через параметры $k_j, (j = 1,2,3)$ допускают представление

$$
m_{jj} = \frac{2C_bB}{\sigma_Д L}(1+k_j),\; j = 1,2;\; m_{26} = \frac{2C_bB}{\sigma_Д L}k_2 x_{26},\; m_{66} = \frac{2C_bB}{\sigma_Д L}\bar{\rho}_z^2(1+k_3), \qquad (3)
$$

где $\bar{\rho}_z = \frac{\rho_z}{L} \approx 0,25$ – относительный радиус инерции; $x_{26} = \frac{\lambda_{26}}{\lambda_{22}L}$ – относительная абсцисса центра поперечной присоединенный массы, величина которой, меняется в приделах: $-0,1 < x_{26} < 0,1$.

При малых значениях числа Фруда ($\mathrm{Fr} < 0,3$) или при наличии специальных конструктивных элементов корпуса судна (например, бульб Юркевича), волнообразованием на свободной поверхности корпуса судна можно пренебречь. В этом случае выражения для коэффициентов (3) при выполнении условия $L/B > 5$ можно упростить[3]:

$$m_{11} = \frac{2C_b B}{\sigma L}(1 + \frac{T}{2L}), \quad m_{22} = \frac{2C_b B}{\sigma L}(1 + \frac{T}{2B} - \frac{T}{L}), \quad m_{66} = \frac{C_b B}{8\sigma L}(\frac{T}{2B} - 2{,}2),$$

где $\sigma = 1 - \frac{S_n + S_k}{LT}$, $S_n, S_k -$площади, дополняющие носовую часть диаметрали до прямоугольника соответственно при $T_n = T$ и $T_k = T$. В силу симметрии в этом случае можно принять $m_{26} = 0$. В таблице 1 приведены числовые значения коэффициентов системы дифференциальных уравнений (2) для типов судов, описанных в работе [3] (пример 1) и в работе [4] (пример 2).

Талица 1. Значения коэффициентов системы (2).

	m_{11}	m_{22}	m_{12}	m_{66}
Пример 1	0,176	0,275	-0,099	0,016
Пример 2	0,226	0,335	-0,109	0,020

2. Неинерционные составляющие математической модели динамики судна.

2.1. *Продольная и поперечная силы, а также горизонтальный момент* неинерционных сил (правые части системы (2)), действующих на судно, в безразмерном виде допускают разложение

$$n_x = X_r + X_a + X_p - \sum_{j=1}^{\kappa_b} P_{E_j} - \sum_{j=1}^{\kappa} T_j + X_{вл},$$

$$n_y = -Y_r + Y_a + Y_p + \sum_{j=1}^{\kappa} D_j + Y_{вл},$$

$$m_y = -M_r + M_a - M_p + \sum_{j=1}^{\kappa} M_j + M_{вл}, \tag{4}$$

где X_r, $Y_r, M_r -$позиционные гидродинамические силы и момент на корпусе судна; $X_a, Y_a, M_a -$аэродинамические силы и момент, действующие на надводную часть судна и надстройки; $X_p, Y_p, M_p -$гидродинамические силы и момент на руле; $P_{E_j} -$ полезный упор $j-$го винта $(j = \overline{1;\kappa_b})$; T_j, D_j, $M_j -$ соответственно аэродинамические силы тяги, дрейфа и момента аэродинамических сил относительно центра тяжести $j-$го ветродвижителя

$(j=\overline{1;\kappa})$; $X_{вл}, Y_{вл}, M_{вл}$ – аэродинамические силы и момент, обусловленные ветроволновым воздействием на судно.

2.2. *Позиционные силы и момент на корпусе судна* допускают представления [2-4]

$$X_r = C_{xr}\tilde{v}^2,\ Y_r = C_{yr}\tilde{v}^2,\ M_r = C_{mr}\tilde{v}^2. \qquad (5)$$

Для гидродинамических характеристик корпуса судна C_{xr}, C_{yr}, C_{mr} используют, в зависимости от вида маневра, различные зависимости от угла дрейфа β. В частности, достаточно широкий диапазон изменения β охватывают аппроксимации [2]

$$C_{xr} = C_{x_0}\cos\frac{3\beta}{2} - 0,07\sin^4\frac{3\beta}{2} + c_4\left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^3,$$

$$C_{yr} = \frac{1}{2}C_y^{\beta}\sin 2\beta\cos\beta - c_2\sin^2\beta + c_4\sin^4\beta,$$

$$C_{mr} = m_1\sin 2\beta - m_2\sin\beta + m_3\sin^3 2\beta + m_4\sin^4 2\beta, \qquad (6)$$

где $C_{x_0} = 2R_{x_0}(\rho v_0^2 S)^{-1}$ – коэффициент сопротивления воды прямолинейному движению судна, постоянные $C_y^{\beta},\ c_4,\ c_2,\ m_2,\ m_3,\ m_4$ определяют по номограммам [2]. Однако для большинства маневров коммерческих судов предпочтительней оказываются полиномиальные аппроксимации гидродинамических характеристик корпуса судна [5, 6]:

$$C_{xr} = C_{x_0}(1+1,5\beta),\ C_{yr} = a_1\beta + a_2\omega + a_3\beta|\beta| + a_4\beta\omega + a_5\omega|\omega|,$$

$$C_{mr} = b_1\beta + b_2\omega + b_3\beta^2\omega + b_4\beta\omega^2 + b_5\omega|\omega|, \qquad (7)$$

где

$$a_1 = \pi\frac{T}{L} + 1,4C_B\frac{B}{L},\ a_2 = \frac{\pi}{2}\frac{T}{L},\ a_3 = -0,08 + 6,53(1-C_B)\frac{T}{B},$$

$$a_4 = 0,44 - 1,73(1-C_B)\frac{T}{B},\ a_5 = -0,48(1-C_B)\frac{T}{B},\ b_1 = 2\frac{T}{L},$$

$$b_2 = -1,08\frac{T}{L}(1-2\frac{T}{L}),\quad b_3 = 0,06 - 0,42C_B\frac{T}{B}.$$

Постоянные $b_4,\ b_5$ являются функциями комбинации $C_B B/L$ и определяются графически [6, 7].

2.3. *Аэродинамические силы и момент*, действующие на надводную часть судна и надстройки могут быть рассчитаны по формулам [1, 4, 7]:

$$X_a = C_{xa}\frac{S_x}{S}\frac{\rho_a}{\rho}\tilde{v}_k^2,\ Y_a = C_{ya}\frac{S_y}{S}\frac{\rho_a}{\rho}\tilde{v}_k^2,\ M_a = C_{ma}\frac{S_y}{SL}\frac{\rho_a}{\rho}\tilde{v}_k^2, \tag{8}$$

где S_x, S_y – площади проекций надводной части судна на плоскость миделя и диаметральной плоскости соответственно; ρ_a – плотность воздуха; $\tilde{v}_k = \dfrac{v_k}{v_0}$, $v_k = \sqrt{v^2 + v_i^2 + 2vv_i\cos(\gamma_i - \psi + \beta)}$ – скорость ветра относительно судна (кажущаяся скорость ветра), ψ, v_i, γ_i – соответственно курсовой угол судна, истинная скорость и курсовой угол истинного ветра. Аэродинамические характеристики судна C_{xa}, C_{ya}, C_{ma}, которые получают путем обработки экспериментальных данных, являются функциями угла кажущегося ветра $\gamma_k = \arccos((v + v_i\cos(\gamma_i - \psi + \beta)) / v_k) - \beta$. Существуют различные представления указанных характеристик [1, 4, 7], в частности, наиболее часто применяемые:

$$\{C_{ax}, C_{ay}, C_{am}\} = 0,433\left(\frac{S_y}{L}\right)^{0,267}\{\tilde{C}_{ax}, \tilde{C}_{ay}, \tilde{C}_{am}\},$$

$$\tilde{C}_{ay} = 1,05\sin\gamma_k,\ \tilde{C}_{am} = 1,05\left(0,25 + \frac{x_A}{L} - \frac{\gamma_k}{2\pi}\right)\sin\gamma_k,$$

$$\tilde{C}_{ax} = [(0,6S_{Mb} + 0,25S_{Mn} + 0,6S_{Mk}) / S_y]\mathrm{ctg}\gamma_k, \tag{9}$$

где S_{Mb}, S_{Mn}, S_{Mk} –площади проекций на плоскость мидель-шпангоута надводной части корпуса, носовой и кормовой надстроек соответственно, x_A – абсцисса центра парусности судна. Для крупнотоннажных танкеров вместо последней формулы из (9) предпочтительней оказывается формула [2]

$$\tilde{C}_{ax} = 0,03 + 0,08\cos\gamma_k. \tag{10}$$

2.4. *Гидродинамические силы и момент* на руле определяются формулами [1, 2, 4]:

$$X_p = C_{xp}\frac{S_p}{S}\tilde{v}^2,\ \ Y_p = C_{yp}\frac{S_p}{S}\tilde{v}^2,\ \ M_p = Y_p l_p, \tag{11}$$

где S_p, l_p – соответственно площадь руля и расстояние от мидель-шпангоута до балера руля, C_{xp}, C_{yp}, Y_p – гидродинамические характеристики руля [1, 2, 4]. Для коэффициента подъемной силы C_{yp} экспериментальным путем получены различные выражения, пригодные для тех или иных задач управления судна. В частности, для маневров, выполняемых крупнотоннажными торговыми судами, используют следующую зависимость, учитывающую влияние угла перекладки руля α , и влияние упора винта

$$C_{yp} = \mu k(\alpha - \chi_k \chi_b \beta),$$

где k – коэффициент, учитывающий боковую силу на корпусе судна, обусловленную перекладкой руля или насадки. Для обычных рулей k =1,0, для рулей за рудерпостом k =1,3, для поворотных насадок k =0,9. Для обычных рулей: $\mu = 2\pi C_R (1 + 2S_p h_p^{-2})^{-1}$, где h_p – высота пера по оси баллера, C_R – поправочный коэффициент, равный единице для прямоугольных и трапециевидных рулей, для полубалансирных рулей он определяется графически [4] по величине $S_p^{-1} h_p^2$. В справочнике [4] приведена методика расчета величины μ для других типов рулей. Коэффициент влияния корпуса χ_k зависит от расположения рулевого устройства и равен 0,3, если руль навешен на кормовой дейдвуд либо расположен за кормовым дейдвудом на расстоянии меньшим 0,5 хорды руля. Коэффициент влияния руля χ_b для обычных рулей определяют так $\chi_b = (S_c + S_b \sqrt{1 + \sigma_{\text{p}}})(S_c + S_b (1 + \sigma_{\text{p}}))^{-1}$, где S_c, S_b – соответственно площади части руля не попадающей в поток от винта и расположенной в винтовой струе. Коэффициент нагрузки винта по упору σ_{p} определяется формулой: $\sigma_{\text{p}} = 2{,}55 P (\rho \mathrm{D}_в^2 v^2)^{-1}$, где P – упор винта при скорости судна v , $\mathrm{D}_в$ – диаметр гребного винта. Коэффициент сопротивления руля C_{xp} является функцией перекладки руля α и определяется по атласам гидродинамических характеристик рулей, можно также воспользоваться данными справочника [4].

2.5. *Полезный упор* j – *го* ($j = \overline{1; \kappa_в}$) *гребного винта* может быть вычислен по формуле (индекс j опущен)

$$P_E = \frac{(1-\zeta) K_1 \omega_в \mathrm{D}_в^4}{2\pi L \mathrm{S} v_0}, \tag{12}$$

где $\omega_b = 2\pi n_b \dfrac{L}{v_0}$ – безразмерная скорость вращения гребного винта, $n_в$ – частота вращения гребного винта. Коэффициенты упора $K_1 = K_1(\lambda_p)$ и засасывания $\zeta = \zeta(\lambda_p)$ гребного винта являются функциями относительной поступи гребного винта: $\lambda_p = (1 - \psi) v (n_в \mathrm{D}_в)^{-1}$, где ψ – коэффициент попутного тока. Для вычисления K_1 и ζ используют аппроксимационные многочлены и формулы [1, 4].

2.6. *Аэродинамические силы тяги, дрейфа и момент аэродинамических сил относительно центра тяжести*, создаваемые $j-$тым $(j=\overline{1;\kappa})$ ветродвижителем, в нормированном виде определяются по формулам [1]

$$T_j = C_{T_j}\frac{S_j}{\mathrm{S}}\frac{\rho_a}{\rho}\tilde{v}_k^2, \quad D_j = C_{D_j}\frac{S_j}{\mathrm{S}}\frac{\rho_a}{\rho}\tilde{v}_k^2, \quad M_j = C_{D_j}\frac{S_jL_j}{\mathrm{S}L}\frac{\rho_a}{\rho}\tilde{v}_k^2, \qquad (13)$$

где $S_j -$площадь $j-$того ветродвижителя, $L_j -$плечо $j-$того ветродвижителя относительно миделя с учетом знака момента аеродинамической силы, C_{T_j}, C_{D_j} $-$коэффициенты соответственно аэродинамических сил тяги и дрейфа. Последние связаны с коэффициентами лобового сопротивления $C_{x_j} = C_{x_j}(\gamma_a)$ и подъемной силы $C_{y_j} = C_{y_j}(\gamma_a)$, где γ_a- угол атаки ветродвижителя воздушным потоком, формулами

$$C_{T_j} = C_{y_j}(\gamma_a)\sin\gamma_k - C_{x_j}(\gamma_a)\cos\gamma_k,$$

$$C_{D_j} = C_{y_j}(\gamma_a)\cos\gamma_k + C_{x_j}(\gamma_a)\sin\gamma_k.$$

В работе [1] для вычисления указанных коэффициентов предложены аппроксимационные многочлены

$$C_{T_j} = \sum_{i=0}^{n} r_j\gamma_k^i, \quad C_{D_j} = \sum_{i=0}^{m} g_j\gamma_k^i,$$

и разработана методика вычисления коэффициентов r_j, g_j этих многочленов.

3. Математическая модель динамики двигателя. Для изучения общего движения пропульсивного комплекса судна с ветродвижителем к системе (2) следует присоединить уравнения [1, 9, 10] работы $j-$го $(j=\overline{1;\kappa_в})$ гребного винта в комплексе: главный двигатель - гребной винт, которые в безразмерных величинах запишем следующим образом (индекс j опущен)

$$\omega_b' = \frac{M_D - M_C}{I + \lambda_b}, \qquad (14)$$

где $I-$момент инерции подвижных частей комплекса, λ_b-присоединенная масса жидкости при вращении гребного винта, $M_C = K_2\rho \mathrm{D}_в^5\frac{\omega_b^2}{4\pi^2}-$момент сопротивления гребного винта. Коэффициент момента гребного винта $K_2 = K_2(\lambda_p)$ вычисляется с помощью аппроксимационных многочленов [1, 4]. Вращающий момент главного двигателя M_D является функцией скорости вращения ω_b и положения топливной тяги h_T: $M_D = M_D(\omega_b, h_T)$. При исследовании динамики пропульсивного комплекса с ветордвижителями достаточно использовать линейную аппроксимацию функции $M_D(\omega_b, h_T)$, приведенную, например, в работе [9].

Выводы и перспектива дальнейшей работы по данному направлению

Таким образом, уравнения (2), (14) и представления (4) – (13) определяют математическая модель динамики движения судна и пропульсивного комплекса судна с ветродвижителями при плоском движении. Следует отметить, что модель является нелинейной. Наиболее существенная нелинейность модели присутствует в левых частях системы (2). Указанной нелинейностью можно пренебречь лишь при практически прямолинейном движении судна, при котором можно положить: $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\beta \approx 1$. Однако, для более сложных маневров при углах дрейфа $|\beta| > \frac{\pi}{12}$, указанные аппроксимации приводят к погрешностям больше 10 процентов. Легко показать, что для углов дрейфа $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ аппроксимации

$$\sin\beta \approx \beta - 0{,}16605\beta^3 + 0{,}00761\beta^5, \quad \cos\beta \approx 1 - 0{,}4967\beta^2 + 0{,}03705\beta^4,$$

приводят к погрешностям, не превышающим 0,01 процента.

Полученная математическая модель динамики движения судна и пропульсивного комплекса судна с ветродвижителями позволяет применить к изучению маневров судна методы численного моделирования, в частности, с использованием пакета Matlab-Simulink.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миюсов М.В. Режимы работы и автоматизация пропульсивного комплекса теплохода с ветродвижителями / М.В Миюсов//Одесса: ОГМА, ОКФА – 1996 г.- 256 с.
2. Першиц Р. Я. Управляемость и управление судном/ Р.Я. Першиц// Л.: Судостроение. – 1983.- 272 с.
3. Соболев Г.В. Управляемость корабля и автоматизация судовождения / Г.В. Соболев// Л.: Судостроение - 1976. – 477 с.
4. Справочник по теории корабля. В 3-х томах. /Под ред. Я.И. Войткунского. – Л.: Судостроение, 1985. – 765 с.
5. Кривий О.Ф. Методи математичного моделювання в задачах судноводіння: навчальний посібник / О.Ф. Кривий//Одеса: ОНМА, 2015 – 86 с.
6. Inoe S. Hydrodynamic derivatieves on ship manoeuvring/ S. Inoe, M. Hirano, K. Kijima// Int. Shipbuilding Progress. – 1981. – V. 28, - № 321, pp. 67.

7. Гофман А.Д. Движительно-рулевой комплекс и маневрирование судна. Справочник/ А.Д. Гофман// Л.: Судостроение. – 1988. – 360 с.
8. Юдин Ю.И. Математические модели плоскопараллельного движения судна. Классификация и критический анализ/ Ю.И. Юдин, И.И. Сотников // Вестник МГТУ - т. 9, № 2. - 2006 г. - С. 200-208.
9. Крутов В.И. Автоматическое регулирование и управление двигателей внутреннего сгорания/ В.И. Крутов. – М.: Машиностроение, 1989. – 416 с.
10. Anderson, John D. jr. Computational fluid dynamics. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering / John D. jr Anderson. – New York: R.R. Donnelley & Sons Company, 1995. –547 p.