УДК 656.61.052

EXPRESSION OF NAVIGATIONAL ERRORSVIA GENERALIZED DISTRIBUTION OF PUASSON

ОПИСАНИЕ НАВИГАЦИОННЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

V. E. Sikirin, *senior lecturer*
В. Е. Сикирин, *старший преподаватель*

National University «Odessa Maritime Academy», Ukraine
Национальный университет «Одесская морская академия», Украина

ABSTRACT

For expression of navigational parameters measurement errors the generalized distribution of Puasson with the Gaussian distribution density is offered. It is shown that such distribution is likely to have «heavier tails» and it can be used for expression of the system of dependent random error terms. The result of verification of statistical hypotheses for two selections, which shows the advantages of the generalized distribution of Puasson versus normal distribution are shown.

Key words: safety of navigation, errors of measuring of navigation parameters, generalized distributing of Puasson.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами.

В некоторых прибрежных районах плавания возможны ситуации, когда возникает необходимость использования альтернативных спутниковым системам навигации менее точных локальных средств контроля места судна. Для получения эффективных оценок обсервованных координат судна требуется знание закона распределения погрешностей навигационных измерений, который может значительно отличаться от нормального закона более пологой кривой плотности распределения. Причем погрешности измерений навигационных параметров могут быть взаимозависимыми.

Поэтому выбор закона распределения с «утяжеленными хвостами», применение которого корректно при зависимых погрешностях, является актуальной задачей.

Анализ последних достижений и публикаций, в которых начато решение данной проблемы и выделение нерешенных ранее частей общей проблемы

Вопросам законов распределений погрешностей навигационных измерений, отличающихся от закона Гаусса «утяжеленными хвостами», посвящены работы [1-4]. В работе [1] анализируется возможность использования распределения Вейбулла в моделях смешанных распределений, а в работе [2] рассматривается математическая модель смешанного распределения и порождающий ее механизм. Плотностям смешанного распределения погрешностей навигационных измерений в явном виде посвящены публикации [3, 4]. Однако законы смешанных распределений могут использоваться только в случае независимых случайных величин, что обуславливает поиск законов распределения для случая, когда случайные величины взаимозависимы.

Формулировка целей статьи (постановка задачи)

Цель публикации заключается в поиске законов распределения с «утяжеленными хвостами» в классе обобщенных пуассоновских распределений, которые могут быть использованы в случае взаимозависимых навигационных погрешностей.

Изложение основного материала исследования с обоснованием полученных научных результатов

В модели обобщенного распределения Пуассона делается допущение, что на точность измерения навигационного параметра влияет бесконечное число факторов, каждый из которых обуславливает появление элементарной погрешности η_i, причем все погрешности η_i являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с плотностью $g(\eta)$, которая называется производящей.

Особенностью рассматриваемой модели является предположение о том, что количество факторов, одновременно действующее на точность измерений, является случайной величиной, т.к. вероятность наличия каждого из факторов в комплексе условий измерения параметра отлична от 1, т. е. влияние каждого из факторов на процесс измерения случайно, - в одних условиях фактор может влиять, а в других – отсутствовать.

Если вероятность появления каждого из факторов принять одинаковой и равной $\frac{c}{n}$, то вероятность одновременного влияния k факторов на точность измерения подчиняется распределению Пуассона, которое имеет следующее аналитическое выражение:

$$P(N=k)=e^{-c}\frac{c^k}{k!}.$$

В этом случае погрешность навигационных измерений ξ равна случайной сумме элементарных погрешностей η_i, т.е. $\xi=\sum_{i=1}^{N}\eta_i$, где N – случайная дискретная величина. Причем плотность распределения ξ будет N - кратной сверткой плотности $g(\eta)$, такая свертка обозначается $g^{N*}(\eta)$.

Учитывая, что число факторов может изменяться от 1 до $\infty\left(k=1,\ldots,\infty\right)$, случайная величина (погрешность измерения) ξ принимает значения $\sum_{i=1}^{k}\eta_i$ с вероятностью $\exp(c)\dfrac{c^k}{k!}$, при этом ее плотность распределения $g^{k*}(\eta)$ и, следовательно, для всего диапазона k плотность $f(\xi)$ определяется обобщенным пуассоновским распределением [5]:

$$f(\xi)=\exp(\text{-c})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!}g^{k*}(\xi).$$

Согласно [5], $f(\xi)$ является семейством обобщенных распределений Пуассона, которое порождается плотностью $g(\eta)$. Характеристическая функция плотности $f(\xi)$, которую обозначим $\psi(t)$, полностью определяется характеристической функцией производящей плотности $g(\eta)$ (ее обозначим $\varphi(t)$), формулой [5]:

$$\psi(t)=\exp\{-c[\varphi(t)-1]\}.$$

Основным и очень важным достоинством обобщенных распределений Пуассона является их безграничная делимость. Причём плотность $f(\xi)$ можно разложить на составляющие с различными дисперсиями, что является решающим обстоятельством для случая зависимых измерений.

Для того чтобы плотность распределения $f(\xi)$ могла быть использована для описания погрешностей навигационных измерений, плотность $g(\eta)$ должна иметь в явном виде k- кратную свертку сама с собой. Более того, для положительного эксцесса, при котором имеют место «утяжеленные хвосты», должно соблюдаться неравенство:

$$\frac{\psi^{IV}(0)}{3[\psi^{II}(0)]^2}=1+\frac{c\dfrac{\partial^4}{\partial t^4}\varphi(0)}{3c^2[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(0)]^2}>1,$$

где $\psi^{II}(t)$ и $\psi^{IV}(t)$ - соответственно вторая и четвертая производные характеристической функции $\psi\left(t\right)$.

Это условие выполняется при $c<\infty$, следовательно, при любой симметричной плотности $g(\eta)$ обобщенное пуассоновское распределение $f(\xi)$ будет удовлетворять упомянутому неравенству.

Рассмотрим обобщенное пуассоновское распределение, порождаемое распределением Гаусса. Выражения для производящей плотности и ее свертки имеют вид:

$$g(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}),\quad g^{k*}(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma}}\exp(-\frac{\eta^2}{2k\sigma^2}).$$

Следовательно, обобщенное пуассоновское распределение с производящей плотностью Гаусса будет выражаться следующим образом:

$$f_G(\xi) = \exp(-c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sigma}\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2}),$$

или после преобразования:

$$f_G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!}k^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2}).$$

Плотности $f_G(\xi)$ соответствует характеристическая функция $\psi_G(t)$:

$$\psi_G(t) = \exp[-c(e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2} - 1)].$$

Дисперсия и четвертый центральный момент определяются соответственно выражениями:

$$\mu_2 = c\sigma^2 \quad \text{и} \quad \mu_4 = 3c\sigma^4(c+1).$$

Для двух выборок погрешностей измерения дистанции D и пеленга П РЛС «Наяда-5» проводилась проверка гипотез их распределения по закону Гаусса и обобщенному закону Пуассона.

При проверке гипотезы распределения погрешностей по закону Гаусса критерий согласия χ_i^2 - Пирсона обозначен χ_G^2, а по обобщенному закону Пуассона - χ_P^2. Результаты проверки приведены в табл. 1.

Таблица 1.Результаты проверки статических гипотез

Тип погрешности	n	M	μ_2	μ_4	χ_G^2	χ_P^2
Погрешности D РЛС	462	0,0003 Кб	0,011	0,04235	33,983	17,57
Погрешности П РЛС	400	0,003°	0,64	3,2768	106,96	72,34

Из таблицы следует, что обе выборки погрешностей лучше описываются обобщенным законом Пуассона, так как критерий согласия χ_i^2 - Пирсона χ_P^2 гораздо меньше критерия χ_G^2.

Выводы и перспектива дальнейшей работы по данному направлению

Таким образом, в статье рассмотрено обобщенное пуассоновское распределение с плотностью $f_G(\xi)$, которое порождается распределением Гаусса и может быть использовано для описания как независимых, так и зависимых погрешностей навигационных измерений. В дальнейшем целесообразно рассмотреть двумерное обобщенное распределение Пуассона для описания векториальной позиционной погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation // The Journal of Navigation. – Vol. 32.- № 3. – P. 426-429.
2. Кондрашихин В.Т. Определение места судна / В.Т. Кондрашихин– М.: Транспорт, 1989. – 250 с.
3. Ткаченко А.С. К вопросу формирования модели смешанного распределения погрешностей навигационных измерений / А.С. Ткаченко// Судовождение. – 2005. - № 10 - С. 118-122.
4. Алексишин В.Г. Ткаченко А.С. Требования к плотности распределения среднего квадратического отклонения в модели смешанного распределения / В.Г. Алексишин, А.С. Ткаченко // Судовождение. – 2006. - № 11. – С. 9 – 13.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер // Т.2. – М.: Мир, 1984. – 752 с.