УДК 656.61.052.484

POSITION FIX EFFICIENCY DETERMINATION

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБСЕРВОВАННЫХ КООРДИНАТ СУДНА

I. A. Burmaka, *PhD, associate professor,* **D. V. Astaykin,** *senior lecturer,* **B. M. Alekseychuk,** *student*

И. А. Бурмака, *к.т.н., доцент,* **Д. В. Астайкин,** *старший преподаватель,* **Б. М. Алексейчук,** *курсант*

National University «Odessa Maritime Academy», Ukraine
Национальный университет «Одесская морская академия», Украина

ABSTRACT

Ship position fix efficiency estimation by means of Sympson's numerical integration method is represented in the paper. Position error is assumed to be distributed by Gauss law. Efficiency estimation example with mixed law is also given in the paper.

Keywords: safety of navigation, efficiencyestimation, mixed law.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами

При определении места судна по избыточным измерениям применяется метод наименьших квадратов в предположении нормального распределения погрешностей навигационных измерений.

Однако погрешности навигационных измерений не всегда подчиняются нормальному закону распределения, что ведет к снижению точности определения обсервованных координат судна при их расчете методом наименьших квадратов. Мера потери точности обсервации места судна характеризуется их эффективностью, которая меньше единицы при отличии закона распределения погрешностей от нормального закона. Оценка эффективности требует вычисления несобственных интегралов, которые не всегда выражаются в явном виде, поэтому целесообразным является применение методов численного интегрирования.

Анализ последних достижений и публикаций, в которых начато решение данной проблемы и выделение нерешенных ранее частей общей проблемы

Основные вопросы оценки эффективности методов обработки измерений рассмотрены в работе [1], причем особенное внимание обращено на ситуации, когда предполагаемый и действительный законы распределения не совпадают.

В работе [2] приведена процедура оценки эффективности определения координат судна при смешанном законе распределения погрешностей измерений навигационных измерений.

Формулировка целей статьи (постановка задачи)

Целью статьи является разработка процедуры использования методов численного интегрирования для оценки эффективности определения координат судна.

Изложение основного материала исследования с обоснованием полученных научных результатов

При избыточных измерениях расчет обсервованных координат судна производится с помощью метода наименьших квадратов, который для нормально распределенных погрешностей измерения навигационных параметров обеспечивает минимальную ковариационную матрицу и эффективность равную 1.

В общем случае эффективность обсервованных координат судна оценивается с помощью следующего выражения [1]:

$$e = \frac{q^2}{ps},$$

где p, s и q – несобственные интегралы, зависящие от плотностей действительного $f(\xi)$ и предполагаемого $\varphi(\xi)$ распределений измерения навигационных параметров.

В методе наименьших квадратов предполагаемой плотностью распределения погрешностей $\varphi(\xi)$ является нормальная плотность:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\}.$$

Найдем несобственные интегралы q, p, и s, используя выражения[1]:

$$q = \int_{R1} f(x)\{\frac{[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)]\varphi(x) - [\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi(x)]^2}{\varphi^2(x)}\}dx,$$

$$p = \int_{R1} f(x)\{[\frac{\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)}{\varphi(x)}]^2\}dx \text{ и}$$

$$s = \int_{R1} \frac{[\frac{\partial}{\partial x} f(x)]^2}{f(x)} dx.$$

Приведем выражения для производных плотности нормального закона $\varphi(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) = -\frac{x}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) = (-\frac{1}{\sigma^2}+\frac{x^2}{\sigma^4})\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}),$$

$$[\frac{\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)}{\varphi(x)}]^2 = \frac{x^2}{\sigma^4}.$$

$$\frac{[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)]}{\varphi(x)} = -\frac{1}{\sigma^2}+\frac{x^2}{\sigma^4}.$$

С учетом полученных выражений находим несобственный интеграл p:

$$p = \int_{R1} f(x)\{[\frac{\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)}{\varphi(x)}]^2\}dx = \int_{R1}\frac{x^2}{\sigma^4}f(x)dx = \frac{1}{\sigma^4}\int_{R1}x^2 f(x)dx.$$

$$p = \frac{1}{\sigma^4}\mu_2,$$

где μ_2 - второй центральный момент действительного распределения случайных величин измерения.

Несобственный интеграл q в этом случае будет иметь следующий вид:

$$q = \int_{R1} f(x)\{\frac{[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)]\varphi(x)}{\varphi^2(x)}\}dx - p = \int_{R1}(-\frac{1}{\sigma^2}+\frac{x^2}{\sigma^4})f(x)dx - p, \text{или}$$

$$q = \int_{R1} -\frac{1}{\sigma^2}f(x)dx + p - p.$$

Так как $\int_{R1} f(x)dx = 1$, то $q = -\frac{1}{\sigma^2}$.

Несобственный интеграл s однозначно определяется только плотностью $f(x)$ действительного закона распределения. В случае, когда действительный закон распределения также является нормальным, то справедливо:

$$s = \int_{R1} \frac{[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)]^2}{\varphi(x)} dx = \int_{R1} \frac{x^2}{\sigma^4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) dx = \frac{1}{\sigma^2}.$$

В этом случае $\mu_2 = \sigma^2$ и несобственный интеграл

$$p = \frac{1}{\sigma^4}\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Следовательно, для нормального распределения эффективность e определяется выражением:

$$e = \frac{(-\frac{1}{\sigma^2})^2}{\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\sigma^2}} = 1.$$

Если плотность $f(x)$ действительного распределения отличается от плотности $\varphi(\xi)$ нормального распределения, то несобственный интеграл s не всегда может быть получен в явном виде. Поэтому для его вычисления целесообразно воспользоваться численным интегрированием.

В качестве примера рассмотрим случай, когда действительная плотность описывается кривой Пирсона четвертого типа $f(\xi)$, которая относится к распределениям с “утяжеленными хвостами” и имеет следующий аналитический вид[3]:

$$f(\xi) = \frac{A_m}{(\xi^2/2 + \lambda)^{m+1}},$$

где $A_m = \frac{2^{2m}(m!)^2}{\sqrt{2}\pi(2m)!}\lambda^{m+1/2}$ - нормирующий множитель,

m- существенный параметр, принимающий целочисленные значения,

λ - масштабный параметр.

Как показано в работе [2], второй центральный момент данного распределения существует и равен $\mu_2 = \frac{2\lambda}{2m - 1}$, а эффективность зависит от существенного параметра m, причем:

$$e = 1 - \frac{3}{2m^2 + 3m + 1}. \qquad (1)$$

Покажем для данного случая возможность расчета интеграла s с помощью численного интегрирования, используя метод Симпсона.

Для получения выражения для интеграла s найдем:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\mathrm{A_m}}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+1}}}\right] = -\frac{\mathrm{A_m}(\mathrm{m}+1)}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+2}}}\xi, \quad \text{тогда}$$

$$\frac{[\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi)]^2}{f(\xi)} = \left[\frac{\mathrm{A_m}(\mathrm{m}+1)}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+2}}}\xi\right]^2 / \left[\frac{\mathrm{A_m}}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+1}}}\right] =$$

$$\frac{\mathrm{A_m^2}(\mathrm{m}+1)^2}{(\xi^2/2+\lambda)^{2(\mathrm{m+2})}}\xi^2\frac{(\xi^2/2+\lambda)^{m+1}}{\mathrm{A_m}} = \frac{\mathrm{A_m}(\mathrm{m}+1)^2}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+3}}}\xi^2.$$

С учетом полученного выражения для подынтегральной функции несобственный интеграл s принимает вид:

$$\mathrm{s} = \mathrm{A_m}(\mathrm{m}+1)^2\int_{\mathrm{R1}}\frac{\xi^2}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+3}}}d\xi, \text{ или}$$

$$\mathrm{s} = \mathrm{A_m}(\mathrm{m}+1)^2\,\Im, \qquad (2)$$

$$\text{где } \Im = \int_{\mathrm{R1}}\frac{\xi^2}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+3}}}d\xi.$$

Для распределений с «утяжеленными хвостами» значения случайных величин не превосходит значения 6 с. к. о., т. е. $\xi \le 6\Delta$, где $\Delta = \sqrt{\mu_2}$. Поэтому можно записать:

$$\Im = \int_{-6\Delta}^{6\Delta}\frac{\xi^2}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+3}}}d\xi = 2\int_{0}^{6\Delta}\frac{\xi^2}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+3}}}d\xi.$$

Подынтегральную функцию обозначим:

$$y(\xi) = \frac{\xi^2}{(\xi^2/2+\lambda)^{\mathrm{m+3}}}$$

Интервал 6Δ, на котором производится интегрирование, необходимо разбить на четное число n элементарных интервалов h_i, величину каждого из которых целесообразно выбрать равной $h = 0{,}01\Delta$.

Если обозначить $y_i = y(\xi_i)$, то искомый определенный интеграл вычисляется по следующей формуле:

$$\Im = 2\int_0^{6\Delta} y(\xi)d\xi = 2\frac{h}{3}[y_o + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + y_n]. \quad (3)$$

Используя формулы (2) и (3), с помощью численного интегрирования рассчитывались значения интеграла s, которое обозначим s_c, для значений существенного параметра m от 1 до 6. Аналогично вычислялся интеграл s_K по формуле [2]:

$$s_K = \frac{(m+1)(2m+1)}{2\lambda(m+2)}.$$

При расчетах принималось $\lambda = 6{,}7$.

Сопоставление значений s_c и s_K приведено в табл. 1.

Таблица 1. Сравнение значений s_c *и* s_K

m	1	2	3	4	5	6
s_c	0,139	0,273	0,415	0,559	0,7032	0,8487
s_K	0,149	0,279	0,418	0,559	0,7036	0,8488

Используя из приведенной таблицы полученные величины несобственного интеграла s, представим рассчитанные значения эффективности e_c, полученные численным интегрированием, и e_K, рассчитанным по формуле (1). Результаты расчетов представим в табл. 2.

Таблица 2. Сравнение значений e_c *и* e_K

m	1	2	3	4	5	6
e_c	0,53	0,82	0,90	0,93	0,955	0,967
e_K	0,5	0,8	0,89	0,93	0,955	0,967

Выводы и перспектива дальнейшей работы по данному направлению

Как следует из приведенных таблиц, наблюдается хорошая сходимость между значениями эффективности, рассчитанными по аналитическому выражению (1) и с помощью численного интегрирования методом Симпсона, что позволяет использовать численное интегрирование при оценке эффективности e, если несобственные интегралы не выражаются в явном виде.

В дальнейшем целесообразно рассмотреть аналитические выражения в ситуации, если действительное распределение отличается от нормального закона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мудров В.М. Методы обработки измерений / В.М. Мудров, В.Л. Кушко - М.: Советское радио, 1976. 192 с.
2. Астайкин Д.А. Оценка эффективности определения координат судна при смешанном законе распределения погрешностей измерений/ Д. А. Астайкин, Б. М. Алексейчук // Сучасні технології проектування, побудови, експлуатації і ремонту суден, морських технічних засобів і інженерних споруд: Матеріали Всеукраїнської наук.-тех. конф., 20-22 травня 2015 р. – Миколаїв : МУК, 2015. – С. 17–19.
3. Астайкин Д.В. Идентификация законов распределения навигационных погрешностей смешанными законами двух типов / Д. В. Астайкин, Б. М. Алексейчук // Автоматизация судовых технических средств: науч. -техн. сб. – 2014. – Вып. 20. Одесса: ОНМА. – С. 3 – 9.