УДК 004.272.3

В.А. Яскевич

Государственный университет телекоммуникаций, Киев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАГРУЗКИ ЯДЕР МНОГОЯДЕРНЫХ МИКРОПРОЦЕССОВ

Предлагается вероятностная модель функционирования многоядерных микропроцессоров на основе использования теории систем массового обслуживания (СМО), позволяющая определить основные числовые характеристики системы.

Ключевые слова: *многоядерный микропроцессор, параллельные вычисления, цифровая обработка сигналов, система массового обслуживания.*

Введение

В последнее время появляется все больше задач, требующих реализации алгоритмов цифровой обработки сигналов (ЦОС) в режиме реального времени. Эти задачи часто содержат несколько алгоритмов ЦОС и являются ключевыми компонентами во многих системах: проводной и беспроводной связи, мультимедиа, обработки многомерных сигналов, некоторых научных расчетах. С ростом числа приложений, использующих ЦОС, сложности алгоритмов обработки, увеличиваются и требования к устройствам ЦОС в плане повышения быстродействия. Дальнейшее повышение производительности в настоящее время связывают с использованием параллельных вычислений. Появление многоядерных микропроцессоров является техническим воплощением параллелизма. Многоядерные микропроцессоры могут использовать все виды параллелизма – параллелизм на уровне задач, параллелизм на уровне команд, параллелизм на уровне данных.

Цель работы – создание математической модели функционирования многоядерных микропроцессоров для получения различных числовых характеристик, характеризующих эффективность их работы.

Основной материал

Процесс функционирования системы «программа – микропроцессор» может быть представлен так: на входе микропроцессора формируется очередь команд, требующих обязательного выполнения. Команды представляют собой заявки на обслуживание, а ядра микропроцессора – обслуживающие приборы. Выбор очередной команды производится при наличии свободного ядра. Если все ядра заняты, то заявка становится в очередь. Такая система представляет

Рис. 1. Граф состояний и переходов СМО

собой систему массового обслуживания с ожиданием и равновероятным распределением команд по свободным ядрам. Предполагается, что поток команд простейший, их интенсивность обозначим через λ. Такое предположение может иметь место, учитывая, что длина команд современных МП переменная (от одного до двух байт). Время обслуживания одной заявки ядром есть случайная величина, которая подчинена показательному закону

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

где μ – параметр (интенсивность распределения).

Система может находиться в следующих состояниях (рис. 1):

a_0 – ядра МП свободны, заявок в очереди нет;

a_1 – одно ядро занято, заявок в очереди нет;

a_i – i ядер занято, заявок в очереди нет (i = 1, 2, … m);

a_m – все mядер заняты, заявок в очереди нет;

a_{m+j} – все m ядер заняты, jзаявок находятся в очереди (j = 1, 2, … R), где R – количество мест в очереди.

Такая СМО описывается системой дифференциальных уравнений [1, 2 3], которая для стационарного режима превращается в систему линейных уравнений (1)

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$\lambda p_0 + 2\mu p_2 = \mu p_1 + \lambda p_1$$

$$\ldots$$

$$\lambda p_{i-1} + (i+1)\mu p_{i+1} = i\mu p_i + \lambda p_i \qquad (1)$$

$$\ldots$$

$$\lambda p_{m-1} + m\mu p_{m+1} = m\mu p_m + \lambda p_m$$

$$\ldots$$

$$\lambda p_{m+R-1} = m\mu p_{m+R} .$$

Для нахождения вероятностей p_i систему уравнений (1) необходимо дополнить условием нормировки

$$\sum_{i=0}^{m+R} p_i = 1 . \qquad (2)$$

Решение системы уравнений.

Из первого уравнения имеем:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 .$$

Из второго уравнения получаем:

$$p_2 = \frac{\lambda+\mu}{2\mu} p_1 - \frac{\lambda}{2\mu} p_0 =$$

$$= \left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2\mu} \right) p_0 =$$

$$= \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \cdot p_0 . \qquad (3)$$

Аналогично получаем:

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} p_0 , \; i = 2, 3, ..., m.$$

$$p_{m+j} = \frac{\lambda^{m+j}}{m^j \cdot m! \mu^{m+j}} p_0 , \; j = 1, 2, ..., R .$$

Теперь можно получить значение для p_0 :

$$p_0 \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \sum_{j=1}^{R} \frac{\lambda^{m+j}}{m^j \cdot m! \cdot \mu^{m+j}} \right) = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \sum_{j=1}^{R} \frac{\lambda^{m+j}}{m^j \cdot m! \cdot \mu^{m+j}}} . \qquad (4)$$

Откуда имеем:

$$p_i = \frac{\frac{\lambda^i}{i! \cdot \mu^i}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \sum_{j=1}^{R} \frac{\lambda^{m+j}}{m^j \cdot m! \cdot \mu^{m+j}}} . , \; i = 1, 2, ..., m . \qquad (5)$$

$$p_{m+j} = \frac{\frac{\lambda^{m+j}}{m^j \cdot m! \cdot \mu^{m+j}}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \sum_{j=1}^{R} \frac{\lambda^{m+j}}{m^j \cdot m! \cdot \mu^{m+j}}} , \; j = 1, 2, ..., R . \qquad (6)$$

Имея значения вероятностей пребывания СМО в каждом конкретном состоянии, можно вычислить все интересующие пользователя параметры [3], основные из которых:

1) вероятность того, что занято i -ое ядро — p_i ;

2) вероятность того, что все ядра нагружены — p_0 ;

3) средняя длина очереди $L = \sum_{i=m+1}^{R} p_i$.

На рис. 2. приведены графики зависимостей вероятностей загрузки ядер от состояния интенсивности

$$p_i = f(\alpha, \; i), \; \alpha = \frac{\lambda}{\mu}; \; i = 0, 1, ..., 10; \qquad (7)$$

при условии: $m = 4$, $R = 6$.

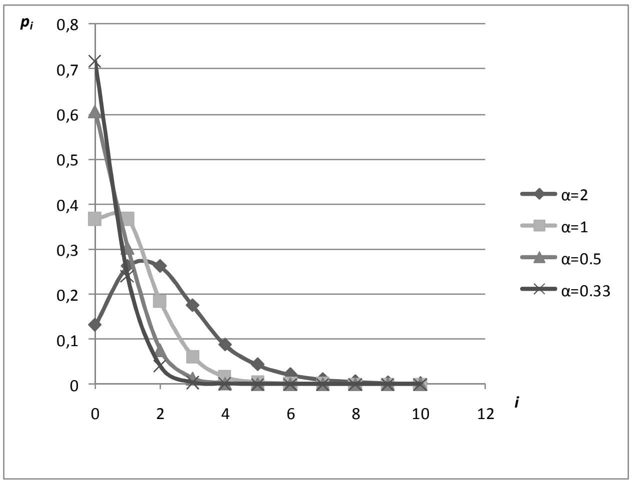

Рис. 2. Зависимость вероятностей от значений α, *i*

Значения зависимостей вероятности загрузки ядра *i* рассчитаны и приведены в таблице 1.

Таблица 1

Зависимости вероятности загрузки ядра *i*

p_i \ α	2	1	0,5	0,33
0	0,1306	0,3673	0,6065	0,7165
1	0,2612	0,3673	0,3032	0,2388
2	0,2612	0,1836	0,0758	0,0398
3	0,1741	0,0612	0,0126	0,0034
4	0,0870	0,0153	0,0015	0,00037
5	0,043	0,0038	0,0002	0
6	0,021	0,00095	0,000025	0
7	0,010	0,00024	0	0
8	0,0054	0,00006	0	0
9	0,0027	0,000015	0	0

10	0,0013	0	0	0

Полученные данные позволяют сделать некоторые выводы, однако рассмотренная модель СМО является упрощенной и требует уточнений.

В рассмотренной модели предполагается, что входная последовательность заявок (команд программы) является независимой друг от друга. Реально каждая команда может зависеть от предыдущей команды, что не позволяет их выполнить одновременно. Такую зависимость можно учесть с помощью коэффициента распараллеливания $k_i \le 1$ $(i=1,\ 2,\ ...,\ m)$.

С учетом коэффициентов k_i СМО описывается следующей системой уравнений:

$$\lambda p_0 - \mu p_1 = 0$$

$$\lambda p_0 + 2\mu p_2 - (\mu + k_1) p_1 = 0$$

$$\dots$$

$$k_{i-1}\lambda p_{i-1} + (i+1)\mu p_{i+1} - (i\mu + k_1\lambda) p_i = 0, \quad (8)$$

$$i = 1,\ 2,\ ...,\ m$$

$$\dots$$

$$\lambda p_{j-2} + m\mu p_j - (\lambda + m\mu) p_{i-1} = 0,\ \ j = m+1,\ ...,\ m+r.$$

Решение может быть получено по ранее изложенной методике.

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot k_1 \cdot p_0,$$

$$p_i = \frac{\lambda^i}{\mu^i} \prod_{s=1}^{i-1} k_i \cdot p_0,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ m, \quad (9)$$

$$p_{m+i} = \frac{\lambda^{m+i}}{\mu^{m+i}} \cdot \frac{\prod_{s=1}^{m-1}}{m^i \cdot m!} p_0,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ R.$$

С учетом уравнения нормировки

$$\sum_{i=0}^{m+R} p_i = 1$$

получаем

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^i}{\mu^i} \prod_{s=1}^{i-1} k_i + \sum_{i=1}^{R} \frac{\lambda^{m+i}}{\mu^{m+i}} \cdot \frac{\prod_{s=1}^{i-1}}{m^i \cdot m!} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Для примера приведены данные для системы с параметрами:

$$m = 4,\ \ R = 6,$$

при $k_i = k = 0{,}5,\ 0{,}25,\ 0{,}33$,

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2,\ 1,\ 0{,}5,\ 0{,}33,\ 0{,}25$$

Таблица 2

Результаты при $k = 0{,}5$

p_i \ α	2	1	0,5	0,33	0,25
0	0,225	0,4352	0,6371	0,7338	0,7897
1	0,450	0,4352	0,3189	0,2446	0,1974
2	0,225	0,1088	0,0398	0,0204	0,0123
3	0,075	0,0181	0,00332	0,0011	0,00051
4	0,0187	0,0022	0,00021	0,000047	0,000016
5	0,009375	0,0005	0,000026	0,000004	0,000001
6	0,004688	0,0001	0,000003	0	0
7	0,002344	0,000035	0	0	0
8	0,001172	0,000009	0	0	0
9	0,000586	0,000002	0	0	0
10	0,000293	0,000001	0	0	0

Таблица 3

Результаты при $k = 0{,}33$

p_i \ α	2	1	0,5	0,33	0,25
0	0,2608	0,4577	0,6478	0,7394	0,7933
1	0,5217	0,4577	0,3239	0,2465	0,1983
2	0,1721	0,0755	0,02672	0,01356	0,0082
3	0,0379	0,0083	0,00147	0,00049	0,00023
4	0,00625	0,00068	0,00006	0,000014	0,000005
5	0,00312	0,00017	0,000008	0,000001	0
6	0,00156	0,00004	0,000001	0	0
7	0,00078	0,00001	0	0	0
8	0,00039	0,000003	0	0	0
9	0,00019	0,00001	0	0	0
10	0,000098	0	0	0	0

Таблица 4

Результаты при $k = 0{,}25$

p_i \ α	2	1	0,5	0,33	0,25
0	0,2781	0,4681	0,6525	0,7421	0,7949
1	0,5560	0,4681	0,3262	0,2473	0,1987
2	0,1390	0,0585	0,0204	0,0103	0,0062
3	0,0232	0,0049	0,00085	0,00028	0,00013
4	0,0029	0,0003	0,000027	0,000006	0,000002
5	0,00145	0,000076	0,000003	0	0
6	0,00072	0,000019	0	0	0
7	0,00036	0,000005	0	0	0
8	0,000186	0,000001	0	0	0
9	0,000091	0	0	0	0
10	0,000045	0	0	0	0

Полученные результаты представлены в виде графиков

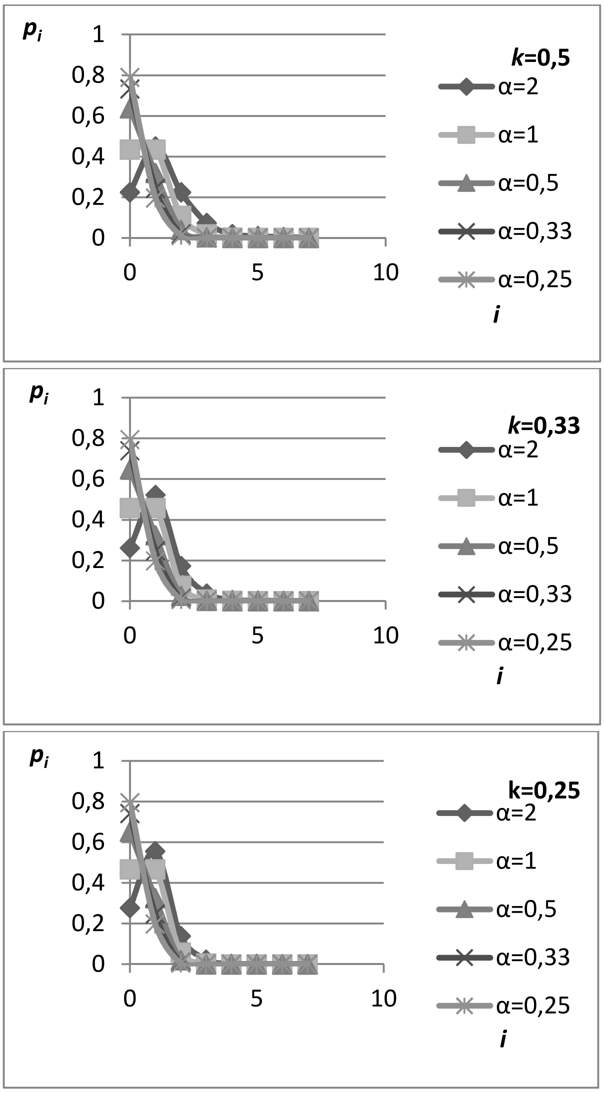

Рис. 3. Зависимости вероятностей от коэффициента *k*

Выводы

Результаты моделирования показали:

- при преобладании интенсивности обслуживания над интенсивностью запросов основная нагрузка падает на одно, реже два ядра микропроцессора, остальные ядра работают вхолостую;
- при усилении зависимости текущей команды от одной или нескольких предыдущих, нагрузка на первое ядро еще больше возрастает;
- для ослабления зависимости команд необходимо на этапе проектирования создавать алгоритмы, хорошо поддающиеся распараллеливанию или организовывать распараллеливание на уровне задач.

Список литературы

1. Розенберг В.Я. Что такое теория массового обслуживания / В.Я. Розенберг, А.И. Прохоров. – М.: Сов. радио, 1965. – 255 с.

2. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1991. – 383 с.

3. Овчаров, Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания / Л.А. Овчаров. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.

4. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание / Лайонс Р. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2007 г. – 656 с.: ил.

Надійшла до редколегії 07.11.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Ф. Купченко, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАВАНТАЖЕННЯ ЯДЕР БАГАТОЯДЕРНИХ МІКРОПРОЦЕСОРІВ

В.О. Яскевич

Пропонується імовірнісна модель функціонування мультиядерних мікропроцесорів на основі використання теорії систем масового обслуговування (СМО), що дозволяє визначити основні числові характеристики системи.

Ключові слова: *мультиядерний мікропроцесор, паралельні обчислення, цифрова обробка сигналів, система масового обслуговування.*

MATHEMATICAL MODELS LOAD KERNELS MULTI-CORE MICROPROCESSORS

V.O. Yaskevych

The probabilistic model of functioning of multi-core microprocessors is offered on the basis of the use theory of queuing systems, allowing to define basic numerical descriptions of the system.

Keywords: *multi-core microprocessor, parallelism, digital signal processing, queuing system.*