ПИТАННЯ УПРАВЛІННЯ В СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

УДК 621.3.082.1

Т.Г. Бондаренко, О.Г. Долинская

Государственный университет телекоммуникаций, Киев

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛА ПОВОРОТА ВОЛНОВЫМ ГИРОСКОПОМ

В предложенной статье рассмотрена задача оценки точности измерения угла поворота объектов волновым гироскопом. Использование твердотельного волнового гироскопа сводится к измерению амплитуд огибающих напряжений в каналах. Получены простые расчетные формулы, позволяющие наглядно анализировать составляющие ошибок измерения угла с помощью волнового гироскопа и обосновывать требования к разрядности АЦП и к чувствительности входных каскадов аппаратуры.

Ключевые слова: *твердотельный волновой гироскоп, огибающие напряжения, неравенство Крамера-Рао, информационная матрица Фишера, многоканальные операционные усилители, функции правдоподобия.*

Вступление

Использование твердотельного волнового гироскопа [4, 6] для измерения угла поворота объектов сводится к измерению амплитуд огибающих напряжений в каналах, смещенных в пространстве на π/4 (в основном и квадратурном каналах). Расчет искомого угла α (смещения колебаний резонатора от исходного положения) определяется путем расчета величины

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{U_{m1}}{U_{m2}}\right); \qquad (1)$$

где U_{m1} , U_{m2} – измеренные амплитуды огибающих в двух каналах.

Рассмотрим задачу: сформулировать требования к точности измерения напряжений амплитуд сигналов при заданной точности измерения угла поворота.

Основная часть

1. В математической статистике нижнюю границу для дисперсии оценки неизвестного параметра по выборке даёт неравенство Краме́ра - Ра́о, или, в многомерном случае, информационная матрица Фишера [1 - 3]. Наименьшую дисперсию имеет оценка параметра по положению максимума функции правдоподобия (является наилучшей линейной несмещенной оценкой). Для получения оценки дисперсии необходимо построение многомерной функции правдоподобия. Известны также уточнения оценки дисперсии с помощью формул Бхаттачария.

Представляет интерес найти дисперсию оценки параметра и математическое ожидание оценки неизвестного параметра в случае, когда эта оценка получается не из анализа функции правдоподобия, а решением соответствующих уравнений, корнями которых являются неизвестные параметры.

Полагаем, что вследствие действия шумов и ошибок квантования амплитуды напряжений в каналах некоррелированы и имеют нормальный закон распределения [6]

$$f\left(U_{m1},U_{m2}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{\left(U_{m1}-m_1\right)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot$$
$$\cdot e^{-\frac{\left(U_{m2}-m_2\right)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (2)$$

Корреляцию напряжений в каналах нужно учитывать при использовании многоканальных операционных усилителей во входных цепях. Типичные значения коэффициента корреляции находятся в пределах -70…-110 дБ [7, 8]. Математическое ожидание оценки угла определяется выражением [6]

$$M\left[\alpha\left(U_{m1},U_{m2}\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int\alpha\left(U_{m1},U_{m1}\right)\cdot$$
$$\cdot f\left(U_{m1},U_{m2}\right)dU_{m1}dU_{m2}=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\operatorname{arctg}\left(\frac{U_{m1}}{U_{m1}}\right)\cdot \qquad (3)$$
$$\cdot e^{-\frac{\left(U_{m1}-m_1\right)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot e^{-\frac{\left(U_{m2}-m_2\right)^2}{2\sigma_2^2}}dU_{m1}dU_{m2}=$$
$$=M_\alpha$$

Дисперсия рассчитывается по формуле

$$D\left[\alpha\left(U_{m1},U_{m2}\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int\left[\alpha\left(U_{m1},U_{m1}\right)-M_\alpha\right]^2\cdot$$

$$\cdot f\left(U_{m1},U_{m2}\right)dU_{m1}dU_{m2} = = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{U_{m1}}{U_{m1}}\right)-M_\alpha\right]^2 \cdot \qquad (4)$$

$$\cdot e^{-\frac{(U_{m1}-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(U_{m2}-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dU_{m1}dU_{m2} = D_\alpha$$

Так как точный расчет по формулам (3, 4) в общем случае представляет сложности, для расчета моментов оценки приходится использовать численные методы, что не всегда удобно и затрудняет оперативный анализ полученных результатов с обоснованием требований к параметрам аппаратуры.

2. Предлагается следующий приближенный способ расчета ошибок измерений.

Целевую функцию (1) $\alpha\left(U_{m1},U_{m2}\right)$ разложим в ряд Тейлора в окрестностях точки истинных значений напряжений $\left(U_{m10},U_{m20}\right)$ по степеням ошибок измерения напряжений и ограничимся первыми тремя членами ряда:

$$\alpha\left(U_{m10}+\Delta U_{m1},U_{m20}+\Delta U_{m2}\right)\approx \approx\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)+ +\Delta U_{m1}\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m1}}+ +\Delta U_{m2}\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m2}}. \qquad (5)$$

Отсюда математическое ожидание ошибки измерения угла α

$$M_\alpha = M\left[\alpha\left(U_{m10}+\Delta U_{m1},U_{m20}+\Delta U_{m2}\right)\right]- -\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)\approx \approx M\left[\Delta U_{m1}\right]\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m1}}+ +M\left[\Delta U_{m2}\right]\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m2}}. \qquad (6)$$

Если случайные тепловые шумы в каналах – гауссовы, с нулевой постоянной составляющей, то $M\left[\Delta U_{m1}\right]=M\left[\Delta U_{m2}\right]=0$. Тогда из формулы (6) получаем, что оценка угла – несмещенная, $M_\alpha=0$.

Аналогично из выражения (5) найдем дисперсию измерений при некоррелированных напряжениях:

$$D_\alpha = D\left[\alpha\left(U_{m10}+\Delta U_{m1},U_{m20}+\Delta U_{m2}\right)\right]\approx \approx D\left[\Delta U_{m1}\right]\left[\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m1}}\right]^2+ +D\left[\Delta U_{m2}\right]\left[\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m2}}\right]^2 \qquad (7)$$

Для конкретной функции расчета угла $\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{U_{m1}}{U_{m2}}\right)$ получаем:

$$D_\alpha=\left(\frac{U_{m10}}{U_{m10}^2+U_{m20}^2}\right)^2 D\left[U_{m10}\right]+ +\left(\frac{U_{m20}}{U_{m10}^2+U_{m20}^2}\right)^2 D\left[U_{m20}\right]. \qquad (8)$$

Если средние квадратические ошибки измерения амплитуд в каналах одинаковы $\sigma_1=\sqrt{D\left[U_{m10}\right]}=\sigma_2=\sqrt{D\left[U_{m20}\right]}=\sigma_ø$, то дисперсия и средняя квадратическая ошибка измерения угла будут соответственно

$$D_\alpha=\frac{\sigma_ø^2}{U_{m10}^2+U_{m20}^2},\quad \sigma_\alpha=\frac{\sigma_ø}{\sqrt{U_{m10}^2+U_{m20}^2}}. \qquad (9)$$

Важно отметить, что при достаточно больших отношениях сигнал – шум, пока не нарушается устойчивость решений уравнения (1), предлагаемая методика оценки даёт результаты, близко совпадающие с оценками по Крамеру-Рао.

3. Оценка влияния корреляции шумов в каналах.

Предположим, что шум в основном и квадратурном каналах коррелированы с коэффициентом корреляции *r*. Разложим целевую функцию $\alpha\left(U_{m1},U_{m2}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{U_{m1}}{U_{m2}}\right)$ в ряд Тейлора в окрестностях точки истинных значений напряжений $\left(U_{m10},U_{m20}\right)$ по степеням ошибок измерения напряжений и ограничимся первыми шестью членами ряда:

$$\alpha\left(U_{m1},U_{m2}\right)= =\alpha\left(U_{m10}+\Delta U_{m1},U_{m20}+\Delta U_{m2}\right)\approx \approx\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)+\Delta U_{m1}\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m1}}+ +\Delta U_{m2}\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m2}}+ +\frac{\Delta U_{m1}^2}{2}\frac{\partial^2\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m1}^2}+\Delta U_{m1}\Delta U_{m2}\cdot \cdot\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m1}}\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m2}}+ +\frac{\Delta U_{m2}^2}{2}\frac{\partial^2\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m2}^2} \qquad (10)$$

Отсюда математическое ожидание ошибки измерения угла α

$$M_\alpha = M\left[\alpha\left(U_{m10}+\Delta U_{m1},U_{m20}+\Delta U_{m2}\right)\right]- -\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)\approx M\left[\Delta U_{m1}\right]\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m1}}+ +M\left[\Delta U_{m2}\right]\frac{\partial\alpha\left(U_{m10},U_{m20}\right)}{\partial U_{m2}}+ \qquad (11)$$

$$+\frac{D[\Delta U_{m1}]}{2}\frac{\partial^2\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m1}^2}+$$

$$+\frac{D[\Delta U_{m2}]}{2}\frac{\partial\alpha^2(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m2}^2}+ \quad .$$

$$+K[\Delta U_{m1},\Delta U_{m2}]\frac{\partial^2\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m1}\partial U_{m2}}$$

Так как $M[\Delta U_{m1}]=M[\Delta U_{m2}]=0$,

$$D[\Delta U_{m1}]=\sigma_{\o 1}^2, D[\Delta U_{m2}]=\sigma_{\o 2}^2,$$

$$K[\Delta U_{m1},\Delta U_{m2}]=r\sigma_{\o 1}\sigma_{\o 2},$$

$$\frac{\partial\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m1}}=\frac{U_{m20}}{U_{m10}^2+U_{m20}^2},$$

$$\frac{\partial\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m2}}=\frac{-U_{m10}}{U_{m10}^2+U_{m20}^2},$$

$$\frac{\partial^2\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m1}^2}=-\frac{2U_{m10}U_{m20}}{\left(U_{m10}^2+U_{m20}^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m2}^2}=\frac{2U_{m10}U_{m20}}{\left(U_{m10}^2+U_{m20}^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m1}\partial U_{m2}}=\frac{1}{U_{m10}^2+U_{m20}^2},$$

то математическое ожидание ошибки измерения угла поворота резонатора

$$M_\alpha=\frac{r\sigma_{\o 1}\sigma_{\o 2}}{U_{m10}^2+U_{m20}^2}. \qquad (12)$$

В случае коррелированных шумов в каналах оценка угла поворота получилась смещенной.

Аналогично из выражения (5), ограничиваясь тремя членами ряда

$$\alpha(U_{m10}+\Delta U_{m1},U_{m20}+\Delta U_{m2})\approx$$

$$\approx\alpha(U_{m10},U_{m20})+\Delta U_{m1}\frac{\partial\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m1}}+,$$

$$+\Delta U_{m2}\frac{\partial\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m2}}$$

что оправданно при $r<<1$,найдём дисперсию измерений при коррелированных напряжениях шумов:

$$D_\alpha=D\left[\alpha(U_{m10}+\Delta U_{m1},U_{m20}+\Delta U_{m2})\right]\approx$$

$$\approx D[\Delta U_{m1}]\left[\frac{\partial\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m1}}\right]^2+$$

$$+D[\Delta U_{m2}]\left[\frac{\partial\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m2}}\right]^2+$$

$$+2K[\Delta U_{m1},\Delta U_{m2}]\frac{\partial\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m1}}.$$

$$\cdot\frac{\partial\alpha(U_{m10},U_{m20})}{\partial U_{m2}}==\sigma_{1\o}^2\frac{U_{m20}^2}{\left(U_{m10}^2+U_{m20}^2\right)^2}+$$

$$+\sigma_{2\o}^2\frac{U_{m10}^2}{\left(U_{m10}^2+U_{m20}^2\right)^2}-2r\sigma_{\o 1}\sigma_{\o 2}\frac{U_{m10}U_{m20}}{\left(U_{m10}^2+U_{m20}^2\right)^2}.$$

При $\sigma_{\o 1}=\sigma_{\o 2}=\sigma_\o$ дисперсия оценки угла

$$D_\alpha=\frac{\sigma_\o^2}{\left(U_{m10}^2+U_{m20}^2\right)^2}\cdot \quad .$$

$$\cdot\left[U_{m10}^2-2rU_{m10}U_{m20}+U_{m2}^2\right]$$

Среднеквадратическая ошибка измерений

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_\o}{U_{m10}^2+U_{m20}^2}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{U_{m10}^2-2rU_{m10}U_{m20}+U_{m2}^2}, \qquad (13)$$

что совпадает с (13) при *r*=0.

Вывод

Получены простые расчетные формулы, позволяющие наглядно анализировать составляющие ошибок измерения угла с помощью волнового гироскопа и обосновывать требования к разрядности АЦП и к чувствительности входных каскадов аппаратуры.

Список литературы

1. *Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Радио и связь, 1981г. - 288с., ил.*
2. *Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.* **.** *М.: Наука, 1982г. - 288с.* http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1059867.
3. *D.D. Lynch, A. Matthews, G.T. Varty. Transfer of Sensor Technology from Oil-Drilling to Space Applications. 5th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, 1998.*
4. *Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Изд. 4-е стереотипное. М.: Наука. 1969г. -576с.*
5. *Sarapuloff S.A. 15 Years of Solid-State Gyrodynamics Development in the USSR and Ukraine: Results and Perspectives of Applied Theory //Proc. of the National Technical Meeting of US Institute of Navigation (ION) (Santa Monica, Calif., USA. January 14-16,1997). — P.151-164.*
6. *http://www.ti.com/ww/ru/prod_amps.html .*
7. http://www.analog.com/en/amplifiers-and-comparators/products/index.html .

Поступила в редколлегию 05.10.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Н. Беркман, Государственный университет телекоммуникаций, Киев.

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРЮВАННЯ КУТА ПОВОРОТУ ХВИЛЬОВИХ ГІРОСКОПІВ

Т.Г. Бондаренко, О.Г. Долинська

У запропонованій статті розглянута задача оцінки точності вимірювання кута повороту об'єктів хвильовим гіроскопом. Використання твердотільного хвильового гіроскопа зводиться до виміру амплітуд огинаючих напружень у каналах. Отримано прості розрахункові формули, які дозволяють наочно аналізувати складові помилок вимірювання кута за допомогою хвильового гіроскопа і обґрунтовувати вимоги до розрядності АЦП і до чутливості вхідних каскадів апаратури.

Ключові слова: *твердотільний хвильовий гіроскоп огинаючої напруги, нерівність Крамера-Рао, інформаційна матриця Фішера, багатоканальні операційні підсилювачі, функції правдоподібності.*

RESEARCH OF ROTATION ANGLE MEASUREMENT PRECISENESS BY WAVE GYROSCOPE

T.G. Bondarenko, O.G. Dolinskaya

In proposed article, the task of research of rotation angle measurement preciseness by wave gyroscope. Usage of solid state wave gyroscope is related to measurement of amplitude of enveloping voltages in channels. Simple calculation formulas is obtained, which allows graphically analyze components of angle measurements errors with usage of wave gyroscope and substantiate the requirements to ADC and to sensitivity of equipment output cascade.

Keywords: *solid state wave gyroscope, enveloping voltages, imparity of Kramer-Rao, Fishers informational matrix, multichannel operational amplifiers, verisimilarity functions.*