УДК 004.272.3

В.А. Яскевич

Государственный университет телекоммуникаций, Киев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МУЛЬТИЯДЕРНЫХ МИКРОПРОЦЕССОРОВ С ПАМЯТЬЮ

Предлагается вероятностная модель взаимодействия многоядерного микропроцессора с памятью на основе использования теории систем массового обслуживания (СМО), позволяющая определить основные числовые характеристики системы.

Ключевые слова: *многоядерный микропроцессор, параллельные вычисления, цифровая обработка сигналов, система массового обслуживания.*

Введение

Приложения, реализующие алгоритмы цифровой обработки сигналов (ЦОС), становятся все более ресурсоемкими и сложными, поэтому каждое новое поколение цифровых сигнальных процессоров (ЦСП) должно иметь большую производительность. Однако увеличение тактовой частоты в конечном итоге оказывается недостаточно эффективным, поскольку одновременно растет потребление энергии и тепловыделение. При этом при разработке ЦСП целью является увеличение вычислительной мощности микросхем при как можно меньшем энергопотреблении и, соответственно, меньшем тепловыделении. Один из способов решения этих задач – переход на многоядерную архитектуру ЦСП. Причем наращивание количества ядер и их тактовой частоты – не единственный вариант. На производительность также влияет объем памяти, к которой обращаются ядра процессора, а также скорость обмена данными между ядрами и памятью.

Цель работы – создание математической модели взаимодействия многоядерного микропроцессора с памятью с целью получения различных числовых характеристик, характеризующих эффективность их работы.

Основной материал

В процессе функционирования – выполнения программы – микропроцессор вынужден обращаться к памяти. При наличии у микропроцессора нескольких ядер могут возникать конфликты при одновременном обращении. Особый вид конфликта – когда одно ядро обращается для чтения информации из памяти, а другое ядро обращается для записи. В этом случае необходимо так организовывать процесс, чтобы запись происходила раньше чтения, иначе возможно неверное исполнение программы.

Рассмотрим в начале случай взаимодействия мультиядерного микропроцессора с одним блоком памяти. При наличии m ядер и одного блока памяти процесс функционирования можно представить замкнутой СМО с ожиданием. Поток запросов на обслуживание будем считать простейшим с параметром ν, интенсивность обслуживания запроса со стороны памяти подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Рассматриваемая система может находиться в следующих состояниях (рис. 1.):

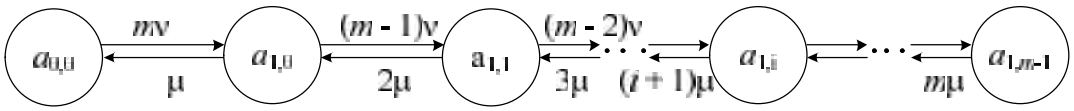

Рис.1. Граф СМО с одним блоком памяти

$a_{0,0}$ - все ядра свободны, запросов на обслуживание нет;

$a_{1,0}$ - одно ядро требует обслуживания, очереди нет;

…

$a_{1,i}$ - одно ядро обслуживается, в очереди i ядер;

…

$a_{1,m-1}$ - одно ядро обслуживается, остальные в очереди.

Данные СМО описывается следующей системой уравнений:

$$\mu p_{1,0} - m\nu p_{0.0} = 0$$

$$\mu\, p_{1,1} + 2m\nu p_{0.0} - \left[(m-1)\cdot\nu + \mu\right] p_{1,0} = 0$$

…

$$\mu\, p_{1,i} + (m+i-1)\nu p_{i-2} - \left[(m-1)\cdot\nu + \mu\right] p_{1,i-1} = 0,$$

$$i = 2,\ 3,\ ...,\ m-1.$$

Находим решение уравнения по схеме, изложенной в [1], [2]:

$$p_{1,0} = m\frac{\nu}{\mu} p_{0,0},$$

…

$$p_{1,i} = \frac{\prod_{j=0}^{i}(m-j)}{(1+i)!}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{i+1}\cdot p_{0,0}$$

…

$$p_{1,m-1} = \frac{\prod_{j=0}^{i}(m-j)}{m!}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{m}\cdot p_{0,0}.$$

Вероятность $p_{0,0}$ находится, если использовать уравнение нормировки

$$p_{0,0} + \sum_{i=1}^{m} p_{1,i} = 1.$$

Тогда

$$p_{0,0} = \left[1 + \sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{i+1}\cdot\frac{\prod_{j=0}^{i}(m-j)}{(i+1)!}\right]^{-1}$$

$$p_{1,i} = \frac{\prod_{j=0}^{i}(m-j)\cdot\frac{1}{(1+i)!}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{i+1}}{1+\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{i+1}\cdot\prod_{j=0}^{i}(m-j)\cdot\frac{1}{(1+i)!}}.$$

Приведенные ниже таблицы демонстрируют результаты расчетов.

Таблица 1

Значения вероятностей для m = 4

p \ α	2	1	0,5	0,33	0,25
$p_{0,0}$	0,012	0,063	0,198	0,316	0,410
$p_{1,0}$	0,099	0,250	0,395	0,422	0,410
$p_{1,1}$	0,296	0,375	0,296	0,211	0,154
$p_{1,2}$	0,395	0,250	0,098	0,047	0,026
$p_{1,3}$	0,197	0,063	0,012	0,094	0,002

Таблица 2

Значения вероятностей для m = 6

p \ α	2	1	0,5	0,33	0,25
$p_{0,0}$	0,014	0,016	0,088	0,178	0,262
$p_{1,0}$	0,016	0,094	0,263	0,356	0,393
$p_{1,1}$	0,082	0,234	0,329	0,297	0,246
$p_{1,2}$	0,219	0,312	0,219	0,132	0,082
$p_{1,3}$	0,329	0,234	0,082	0,33	0,015
$p_{1,4}$	0,263	0,094	0,016	0,004	0,002
$p_{1,5}$	0,087	0,016	0,001	0	0

Таблица 3

Значения вероятностей для m = 8

P \ α	2	1	0,5	0,33	0,25
$p_{0,0}$	0,0002	0,004	0,039	0,100	0,168
$p_{1,0}$	0,002	0,031	0,156	0,267	0,336
$p_{1,1}$	0,017	0,110	0,273	0,311	0,294
$p_{1,2}$	0,068	0,219	0,279	0,208	0,147
$p_{1,3}$	0,170	0,273	0,170	0,096	0,046
$p_{1,4}$	0,273	0,219	0,068	0,023	0,009
$p_{1,5}$	0,273	0,110	0,017	0,004	0,001
$p_{1,6}$	0,156	0,032	0,002	0,0004	0
$p_{1,7}$	0,039	0,004	0,0002	0	0

Вероятности нахождения системы в том или ином состоянии зависят от соотношения интенсивностей $\alpha = \frac{\nu}{\mu}$. Вероятность возникновения очереди обращения к памяти со стороны ядер микропроцессора увеличивается при $\alpha > 1$. Этот факт демонстрируют графики, полученные на основании приведенных выше таблиц ($p = \sum_{i=1}^{m} p_{1,i}$).

Таблица 4

Вероятности возникновения очереди

p \ α	0,25	0,33	0,5	1,0	1,5	2,0
m = 4	0,181	0,262	0,407	0,688	0,821	0,889
m = 6	0,345	0,466	0,649	0,891	0,959	0,982
m = 8	0,497	0,633	0,805	0,965	0,991	0,997

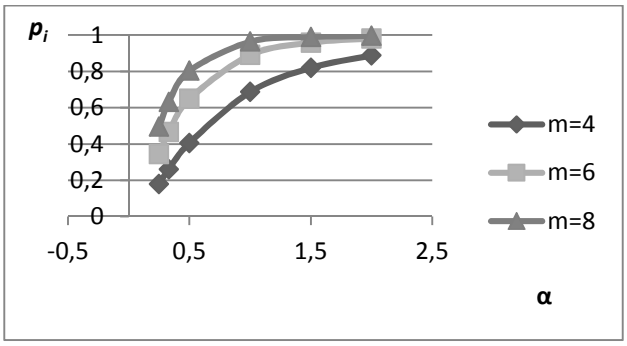

Рис. 2. Зависимости вероятностей появления очереди

Увеличение количества ядер памяти становится «узким» местом в системе. Поэтому целесообразно использовать несколько идентичных блоков памяти, что позволит уменьшить очередь при обращении к памяти.

Рассмотрим модель взаимодействия *m*-ядерного микропроцессора с памятью, состоящей из *n* одинаковых блоков.

Каждое ядро в случайные моменты времени нуждается в обслуживании со стороны памяти. Поток обращения на обслуживание предполагается простейшим с параметром ν. Интенсивность обслуживания обращения, со своей стороны предполагается, подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ. Каждый вновь поступивший запрос направляется в любой из *n* каналов (блоков памяти) с вероятностью 1/*n*, безотносительно к тому – занят блок или нет. Если вновь поступивший запрос в *i*-й блок застанет его свободным, он принимается на обслуживание. А если поступивший запрос застанет блок занятым, то он становится в очередь. В этом случае дисциплина обслуживания считается простейшей: первым пришел – первым обслужен.

Рассматриваемая СМО может находиться в таких состояниях:

$a_{0,0}$ - все блоки свободны, запросов на обслуживание от ядер нет;

$a_{1,0}$ - одни блок занят обслуживанием, очереди нет;

$a_{k,l}$ - k блоков заняты обслуживанием, l запросов находится в очереди;

…

$a_{n,0}$ - n блоков занято, очереди нет.

Граф состояний данной СМО представлен на рис. 3.

Для составления уравнений с целью поиска вероятностей нахождения системы в том или ином состоянии введем обозначения:

$p_{k,l}$ - вероятность, что система находится в состоянии $a_{k,l}$;

$\pi_{(k\pm1,l\pm1),(k\pm1,l\pm1)}$ - вероятность переходов между состояниями (рис. 4).

Количество состояний при количестве ядер в процессоре *m* и число блоков памяти *n* равно

$$C = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (m - i)$$

Особенности рассматриваемой СМО состоит в следующем:

- число блоков памяти всегда $n \le m$, так как иметь их больше, чем число ядер, нецелесообразно;
- система, находясь в состояниях $a_{0,0}$ и $a_{1,l}$, не может перейти в состояния $a_{0,l}$, потому что такие состояния отсутствуют по причине, если все блоки свободны и имеется очередь к ним не имеет физического смыла;
- также не имеют смысла состояния с отрицательной очередью.

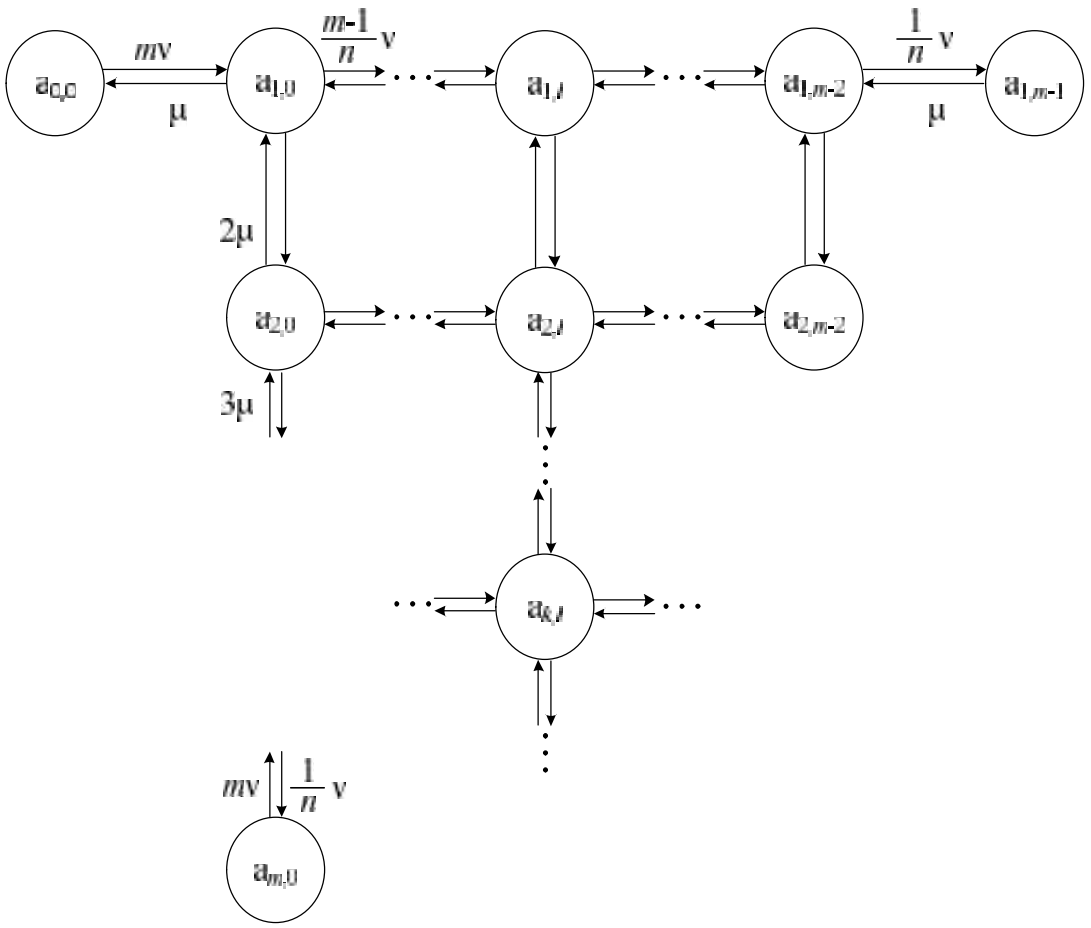

Рис. 3. Граф СМО для общего случая: число ядер *m*, число блоков памяти *n*, число обслуживаемых ядер *k*, число ядер в очереди *l*

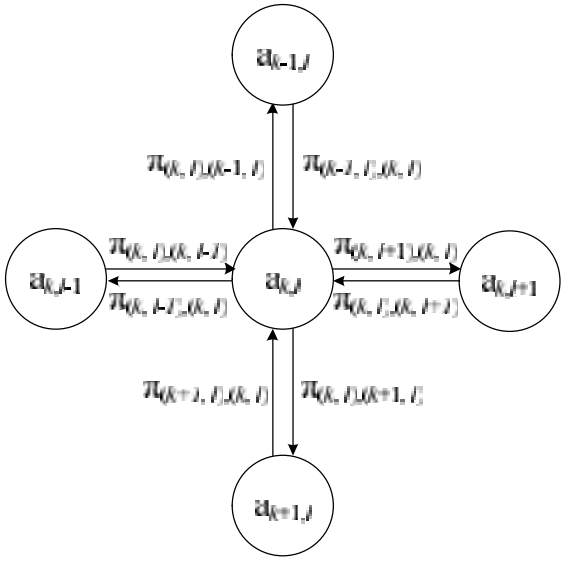

Рис. 4. Фрагмент графа переходов СМО с соответствующими вероятностями

Первое уравнение может быть получено обычным способом (рис. 5):

$$\mu p_{1,0} - m\mu p_{0,0} = 0 .$$

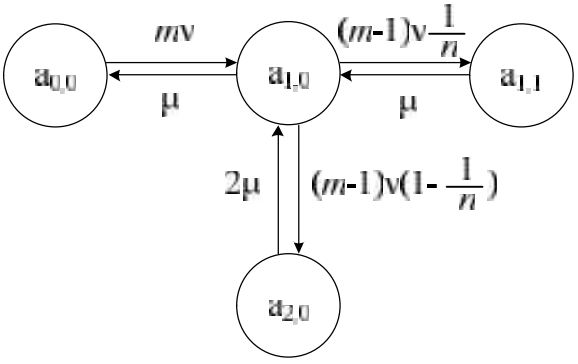

Рис. 5. Фрагмент графа начальных состояний СМО в общем случае

Первое уравнение получается из таких соображений:

Если система находится в состоянии $a_{1,0}$, то на нее воздействую потоки:

- поток запросов $(m-1)\nu$, который с вероятностью 1/12 стремиться перевести систему в состояние $a_{1,1}$ и с вероятностью $1-\frac{1}{12}=\frac{n-1}{n}$ в состояние $a_{2,0}$;
- поток освобождений блоков памяти, который стремится перевести систему в состояние $a_{0,0}$ с интенсивностью μ. Тогда

$$m\nu p_{0,0}-\left[(m-1)\nu\cdot\frac{1}{n}+(m-1)\nu\left(1-\frac{1}{n}\right)+\mu\right]p_{1,0}+\mu p_{1,1}+2\mu p_{2,0}=0$$

.

После несложных преобразований получаем:

$$m\nu p_{0,0}-\left[(m-1)\nu+\mu\right]p_{1,0}+\mu p_{1,1}+2\mu p_{2,0}=0.$$

В общем случае, когда система находится в состоянии $a_{k,l}$, на нее действуют следующие потоки:

- поток запросов $(m-k-l)\nu$, который с вероятностью $k\cdot\frac{1}{n}$ стремиться перевести в состояние $a_{k,l+1}$ и с вероятностью $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ в состояние $a_{k+1,l}$;
- поток освобождений блоков памяти одного из обслуживающих ядер, который стремиться перевести системы в состояние $a_{k-1,l}$ с вероятностью $\pi_{(k,l),(k-1,l)}$. Это событие заключается в том, что освободился блок памяти, у которого не было очереди [5], т.е. в результате освобождения одного из обслуживающих блоков памяти очередь не изменится. С вероятностью $1-\pi_{(k,l),(k-1,l)}$ система должна перейти в состояние $a_{k,l+1}$ с интенсивностью $k\cdot\mu$.

Вероятности всех переходов (рис. 4) будут такими:

$$\pi_{(k,l),(k-1,l)}=\left(\frac{k-1}{k}\right)^l;$$

$$\pi_{(k,l),(k,l-1)}=1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^l;$$

$$\pi_{(k,l),(k,l+1)}=\frac{k}{n};$$

$$\pi_{(k,l),(k+1,l)}=1-\frac{k}{n}.$$

Остальные вероятности получаем аналогично. Теперь можно составить уравнение для состояния общего случая $a_{k,l}$:

$$\left[m-k-(l-1)\right]\cdot\frac{1}{n}k\nu\cdot p_{k,l-1}+(k+1)\left(\frac{k}{k+1}\right)^l\mu p_{k+1,l}+$$

$$+\left[m-(k-1)-l\right]\left(1-\frac{1}{n}\right)(k-1)\nu p_{k-1,l}+$$

$$\left[1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^{l+1}\right]k\mu p_{k,l+1}-$$

$$-\left[(m-k-l)\cdot\frac{1}{n}\cdot k\nu+\left(\frac{k-1}{k}\right)^l\cdot k\mu+\left[1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^l\right]\cdot k\mu+(m-k-l)\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot k\nu\right]p_{k,l}=0$$

Последнее уравнение системы имеет вид:

$$m\mu p_{m,0}-\frac{1}{n}\nu p_{m-1,0}=0.$$

Система уравнений должна быть дополнена условием нормировки:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m-k}p_{k,l}=1.$$

Система имеет решения, но в общем виде точное аналитическое решение найти не удалось. Поэтому численные значения вероятностей $p_{k,l}$ находились с помощью программы решения системы линейных уравнений порядка *C* методом Гаусса.

В качестве примера рассмотри систему, состоящую из 4-ядерного микропроцессора и двух блоков памяти при различных значениях отношения $\frac{\nu}{\mu}$.

На рис. 6 приведен граф этой СМО.

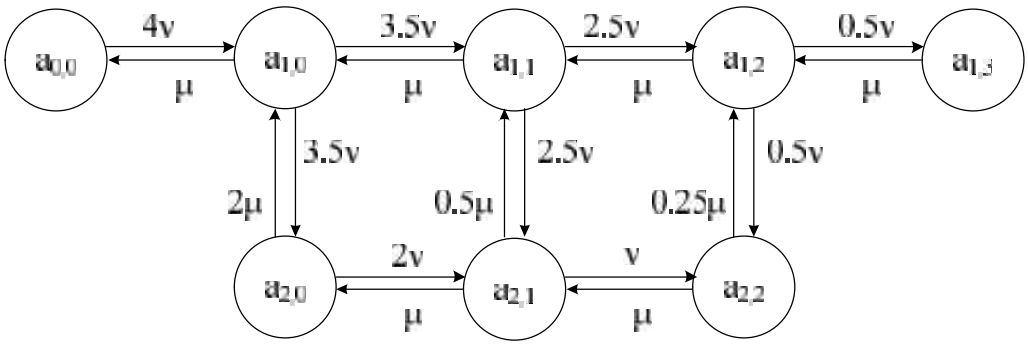

Рис. 6. Граф СМО при $m = 4$ и $n = 2$

Система линейных уравнений может быть получена на основе графа:

$$-4\frac{\nu}{\mu}p_{0,0} + p_{1,0} = 0$$

$$4\frac{\nu}{\mu}p_{0,0} + 2p_{2,0} + p_{1,1} - \left(1+3\frac{\nu}{\mu}\right)p_{1,0} = 0$$

$$3,5\frac{\nu}{\mu}p_{1,0} + p_{2,1} - \left(2+\frac{\nu}{\mu}\right)p_{2,0} = 0$$

$$0,5\frac{\nu}{\mu}p_{1,0} + p_{1,2} + p_{2,1} - \left(1+2\frac{\nu}{\mu}\right)p_{1,1} = 0$$

$$\frac{\nu}{\mu}p_{2,0} + 0,5p_{2,2} + \frac{\nu}{\mu}p_{1,1} - \left(2+0,5\frac{\nu}{\mu}\right)p_{2,1} = 0$$

$$\frac{\nu}{\mu}p_{1,1} + 0,5p_{2,2} + p_{1,3} - \left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)p_{1,2} = 0$$

$$0,5\frac{\nu}{\mu}p_{2,1} + 0,5\frac{\nu}{\mu}p_{1,2} - p_{2,2} = 0$$

$$0,5\frac{\nu}{\mu}p_{1,2} - p_{1,3} = 0\,.$$

Уравнение нормировки

$$p_{0,0} + \sum_{j=0}^{3} p_{1,0} + \sum_{j=0}^{2} p_{2,j} = 1$$

Для ввода данных необходимо представить уравнения в матричном у упорядоченном виде:

	$p_{0,0}$	$p_{1,0}$	$p_{2,0}$	$p_{1,1}$	$p_{2,1}$	$p_{1,2}$	$p_{2,2}$	$p_{1,3}$	
$p_{0,0}$	$-4\frac{\nu}{\mu}$	1	0	0	0	0	0	0	
$p_{1,0}$	$4\frac{\nu}{\mu}$	$-\left(1+3\frac{\nu}{\mu}\right)$	2	1	0	0	0	0	
$p_{2,0}$	0	$3,5\frac{\nu}{\mu}$	$-\left(2+\frac{\nu}{\mu}\right)$	0	1	0	0	0	
$p_{1,1}$	0	$1,5\frac{\nu}{\mu}$	0	$-\left(1+2\frac{\nu}{\mu}\right)$	1	1	0	0	$= A$
$p_{2,1}$	0	0	$\frac{\nu}{\mu}$	$\frac{\nu}{\mu}$	$-\left(\frac{\nu}{2\mu}+2\right)$	0	0,5	0	
$p_{1,2}$	0	0	0	$\frac{\nu}{\mu}$	0	$-\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)$	0,5	1	
$p_{1,3}$	0	0	0	0	0	$0,5\frac{\nu}{\mu}$	0	–1	
Σ	1	1	1	1	1	1	1	1	

При составлении матрицы одно из уравнений исключается (в примере это уравнение для $p_{2,2}$), а вместо него включается уравнение нормировки.

При значении $\frac{\nu}{\mu} = 2$, матрица A имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение получено такое:

$p_{0,0} = 0,05$ $p_{1,0} = 0,036$
$p_{2,0} = 0,066$ $p_{1,1} = 0,086$
$p_{2,1} = 0,155$ $p_{1,2} = 0,166$
$p_{2,2} = 0,321$ $p_{1,3} = 0,166$

Запишем матрицу A при значении $\frac{\nu}{\mu} = 1$:

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение имеет вид:

$p_{0,0} = 0,033$ $p_{1,0} = 0,133$
$p_{2,0} = 0,115$ $p_{1,1} = 0,170$
$p_{2,1} = 0,145$ $p_{1,2} = 0,165$
$p_{2,2} = 0,155$ $p_{1,3} = 0,033$

Получим решение при $\frac{\nu}{\mu} = 0,5$:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2,5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & -2,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & -2,25 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & -1,5 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение имеет вид:

$p_{0,0} = 0,146$ $p_{1,0} = 0,291$
$p_{2,0} = 0,120$ $p_{1,1} = 0,198$
$p_{2,1} = 0,080$ $p_{1,2} = 0,097$
$p_{2,2} = 0,044$ $p_{1,3} = 0,024$

При значении $\frac{\nu}{\mu} = 0,25$ решение будет таким:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1,75 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,37 & -2,25 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,37 & 0 & -1,5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,25 & -2,13 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & -1,13 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,13 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$p_{0,0} = 0,336$ $p_{1,0} = 0,336$
$p_{2,0} = 0,072$ $p_{1,1} = 0,131$
$p_{2,1} = 0,025$ $p_{1,2} = 0,034$
$p_{2,2} = 0,003$ $p_{1,3} = 0,004$

Приведенный ниже график демонстрирует динамику изменения вероятностей для системы с параметрами $m = 4$ и $n = 2$ (рис. 7).

Введение дополнительных блоков памяти улучшает числовые характеристики системы. На рис. 7 показаны сравнительные характеристики систем для числа ядер микропроцессора $m = 4$ и блоков памяти $n = 1$ и $n = 2$.Приведенные зависимости подтверждают этот факт.

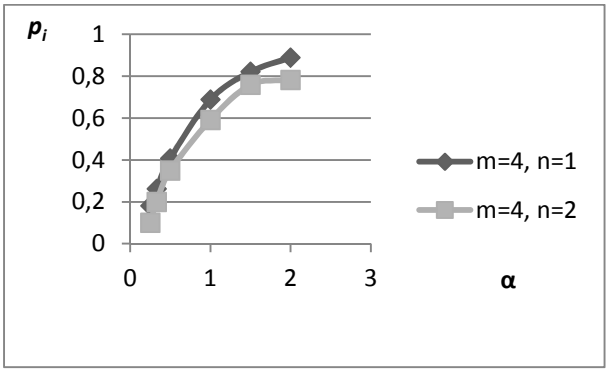

Рис. 7. Вероятности появления очереди к памяти при различных значениях m, n, α

Выводы

Расчеты показали, что использование второго блока памяти уменьшает очередь ядер микропроцессора к памяти.

Разработанная модель позволяет составить методику расчета оптимального количества блоков памяти в зависимости от количества ядер и интенсивности запросов и обслуживания.

Разработанную модель необходимо дополнить коэффициентом зависимости между командами записи и чтением данных.

Список литературы

1. Яскевич В.А. Математические модели загрузки ядер многоядерных микропроцессов // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2012. – № 4 (24) – с. 73-76.

2. Розенберг В.Я. Что такое теория массового обслуживания / В.Я. Розенберг, А.И. Прохоров. – М.: Сов. радио, 1965. – 255 с.

3. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1991. – 383 с.

4. Овчаров, Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания / Л.А. Овчаров. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.

5. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание / Лайонс Р. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2007 г. – 656 с.: ил.

Поступила в редакцию 17.10.2013

Рецензент: д.т.н., с.н.с. Е.С. Козелкова, Государственній університет телекоммуникаций, Киев.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ БАГАТОЯДЕРНИХ МІКРОПРОЦЕСОРІВ ІЗ ПАМ'ЯТТЮ

В.О. Яскевич

Пропонується імовірнісна модель взаємодії багатоядерного мікропроцесора з пам'яттю на основі використання теорії систем масового обслуговування (СМО), що дозволяє визначити основні числові характеристики системи.

Ключові слова: *мультиядерний мікропроцесор, паралельні обчислення, цифрова обробка сигналів, система масового обслуговування.*

MATHEMATICAL MODELS LOAD KERNELS MULTI-CORE MICROPROCESSORS

V.O. Yaskevych

The probabilistic model of the interaction of multi-core microprocessor with memory based on the use of the theory of queuing systems, allowing to define basic numerical descriptions of the system.

Key words: *multi-core microprocessor, parallelism, digital signal processing, queuing system.*