ПИТАННЯ УПРАВЛІННЯ В СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

УДК 621.391.833

А.В. Дикарев

Государственный университет телекоммуникаций, Киев

КОЛЬЦЕВЫЕ КОДЫ И ИХ СВОЙСТВА

В работе рассматриваются кольцевые коды, их построение, основные свойства и особенности, которые позволяют сделать вывод об их универсальности, поскольку они одновременно могут быть энтропийными и ошибкообнаруживающими.

Ключевые слова: *код, кольцо, матрица, сдвиг, вектор.*

Получение кольцевых кодов. Выберем двоичную последовательность нулей и единиц длиной N>2 символов, из которых m=1..N-1 единичные, а остальные нулевые. Далее эта последовательность именуется исходным вектором или исходной сдвиговой последовательностью. Выполним пошаговый кольцевой сдвиг с возвращением элементов исходного вектора N, располагая получающиеся N-1 сдвиговых последовательностей (сдвиговых векторов) одну под другой. В результате такой операции образуется квадратная матрица размером N* N, представляющая собой абелеву группу [1]. Это и есть кольцевой код, в котором можно выделить N связанных между собой кодовых последовательностей [2..4]. Далее с одной из логических операций XOR, OR или AND (далее по тексту используется операция XOR) выполним векторное преобразование над парами строк 1-й и 2-й, 1-й и 3-й,…, 1-й и N-ой, 2-й и 3-й, 2-й и 4-й, 3-й и 4-й, 3-й и 5-й и т.д. Последней будет пара строк (N-1)-ая и N-ая. В результате получается квадратная матрица двоичных последовательностей размером N*N [5]. По тому же принципу, как выполнялось векторное преобразование, сравним на совпадение (или различие) элементы в каждой паре строк, отдельно записывая сумму несовпадений единичных символов в виде набора целых чисел в строки новой числовой треугольной матрицы размером (N-1)*(N-1), которая далее называется матрицей показателей сдвига ПС. Примеры кольцевых кодов и соответствующих им матриц показателей сдвига для случаев N=9, m=4 и N=6, m=2 показаны на рис. 1. Последнюю операцию - векторное преобразование - можно вообще опустить и рассматривать на несовпадение (или совпадение) просто наборы строк матрицы кольцевого кода, хотя для современных вычислительных средств операция векторного преобразования строк особой трудности не представляет.

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0&0&0&1&1\\1&1&1&0&0&0&0&0&1\\1&1&1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}\quad ПС=\begin{bmatrix}2&4&6&8&8&6&4&2\\&2&4&6&8&8&6&4\\&&2&4&6&8&8&6\\&&&2&4&6&8&8\\&&&&2&4&6&8\\&&&&&2&4&6\\&&&&&&2&4\\&&&&&&&2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\quad ПС=\begin{bmatrix}4&2&4&2&4\\&4&2&4&2\\&&4&2&4\\&&&4&2\\&&&&4\end{bmatrix}$$

Рис. 1. Примеры кольцевых кодов с матрицами показателей сдвигов ПС

Дадим определения используемым понятиям.

Дельта-фактор (Δ-фактор). Последовательность единичных и нулевых символов в строках матрицы кольцевого кода, расположенных между первым и последним единичными символами.

Пример дельта-фактора. Имеются два двоичных вектора N1 и N2, где N1=[10011000110100] и N2=[111100000100]. Для этих двух случаев дельта-факторы равны D1(N1)=[100110001101] и D2(N2)=[1111000001]. При образовании кольцевого

кода в соответствующих матрицах кольца дельта-фактор совершает кольцевой сдвиг.

Исходная сдвиговая последовательность (ИСП) - первоначальный вектор длиною N двоичных символов, подвергающийся затем круговому сдвигу N-1 раз. Сдвиговая последовательность на любом месте матрицы кольцевого кода может служить кодовой комбинацией при кодировании дискретной информации.

Квазибаркерный кольцевой код. Определим квазибаркерным такой кольцевой код, у которого в векторе коэффициентов сдвига все элементы одинаковы и равны одному и тому же целому числу.

Теорема 1 об уникальности векторов показателей сдвига. Пусть имеется вектор (блок) N с двоичными символами длиною более двух элементов, в котором число единиц (нулей) m находится в интервале [1..N-1]. Из каждого такого блока можно составить $2^N / N^2$ кольцевых кодов, используя в векторных преобразованиях операции XOR, OR или AND с уникальными особенностями показателей сдвига ПС каждого кольцевого кода.

Доказательство. Первая часть теоремы относительно общего числа $2^N / N^2$ кольцевых кодов очевидна: поскольку число сочетаний из N элементов по m составляет 2^N, причём из каждого исходного вектора получается матрица размером N*N, строки которой входят в множество векторов 2^N [2, 3]**.**Тогда для построения кольцевых кодов остается $2^N / N^2$ векторов.

Для доказательства уникальности показателей сдвига рассмотрим пример рис. 2, на котором малыми и большими латинскими буквами обозначены единичные и нулевые элементы матрицы кольцевого кода (в данном случае для блока длиною N=7). По структуре дельта-фактора на рисунке слева показан баркероподобный, а справа обычный кольцевой код.

1.	a	B	C	d	E	f	g
2.	g	a	B	C	d	E	f
ПС=4	0	1	0	1	1	1	0
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	B	C	d	E	f	g
3.	f	g	a	B	C	d	E
ПС=4	0	1	1	1	0	0	1
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	B	C	d	E	f	g
4.	E	f	g	a	B	C	d
ПС=4	1	1	1	0	0	1	0
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	B	C	d	E	f	g
5.	d	E	f	g	a	B	C
ПС=4	0	0	1	0	1	1	1
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	B	C	d	E	f	g
6.	C	d	E	f	g	a	B
ПС=4	1	1	0	0	1	0	1
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	B	C	d	E	f	g
7.	B	C	d	E	f	g	a
ПС=4	1	0	1	1	1	0	0

1.	a	b	c	D	E	F	g
2.	g	a	b	c	D	E	F
ПС=2	0	0	0	1	0	0	1
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	b	c	D	E	F	g
3.	F	g	a	b	c	D	E
ПС=4	1	0	0	1	1	0	1
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	b	c	D	E	F	g
4.	E	F	g	a	b	c	D
ПС=6	1	1	0	1	1	1	0
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	b	c	D	E	F	g
5.	D	E	F	g	a	b	c
ПС=6	1	1	1	1	1	1	0
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	b	c	D	E	F	g
6.	c	D	E	F	g	a	b
ПС=4	0	1	1	0	1	1	0
Сдвиг на шаг вправо							
1.	a	b	c	D	E	F	g
7.	b	c	D	E	F	g	a
ПС=2	0	0	1	0	0	1	0

1.	a	B	C	d	E	f	g
2.	g	a	B	C	d	E	f
3.	f	g	a	B	C	d	E
4.	E	f	g	a	B	C	d
5.	d	E	f	g	a	B	C
6.	C	d	E	f	g	a	B
7.	B	C	d	E	f	g	a
ПС=24	4	4	4	4	4	4	

1.	a	b	c	D	E	F	g
2.	g	a	b	c	D	E	F
3.	F	g	a	b	c	D	E
4.	E	F	g	a	b	c	D
5.	D	E	F	g	a	b	c
6.	c	D	E	F	g	a	b
7.	b	c	D	E	F	g	a
ПС=24	2	4	6	6	4	2	

Рис. 2. Образование кольцевого кода и вектора показателей сдвига

Вверху рисунка 2 процесс получения кольцевого кода и одновременно вектора показателей сдвига показан по шагам. Формируется только первый вектор матрицы ПС на основании векторного преобразования операцией XOR первой исходной строки с остальными N-1 строками матрицы кольцевого кода. Можно видеть, что во всех случаях символы дельта-фактора, перемещаясь на шаг вправо, последовательно взаимодействуют с каждым из N символов первой строки. В результате получается N*N различных непересекающихся вариантов преобразования. Очередной вариант векторного

преобразования исходного вектора и того же вектора, но сдвинутого на шаг вправо, дает свою отличную от других сумму совпадений (либо несовпадений) нулей и единиц сдвинутой строки с исходной строкой матрицы кольцевого кода. Указанные различия на каждом из N шагов определяют N-1 элементов вектора показателей сдвига. Ясно, что этими элементами могут быть только целые числа в интервале от 0 до m при $m \le N/2$ и в интервале от N-m до N при $m \succ N/2$.

Внизу рис. 2 показан конечный результат формирования кольцевого кода после выполнения всех шагов и конечный вектор показателей сдвига для указанных двух типов кольцевых кодов.

Следствие 1. В результате своей уникальности вектор показателей сдвига может выполнять роль проверочной комбинации блочного кода, при этом для него не требуется проверочная комбинация.

Следствие 2. Вектор с полностью нулевыми или единичными символами (битами) не может быть исходным вектором кольцевого кода.

Следствие 3. Если кольцевой код используется в качестве кода, обнаруживающие ошибки, то кодовые комбинации могут выбираться в одном и том же кольцевом коде, либо в нескольких различных кодах.

Теорема 2 единственности. Дельта-фактор длиною d символов на элементах исходного вектора кольцевого кода может занимать любую из N-d позиций и для всех этих случаев вектор показателей сдвига остаётся единственным и неизменным.

Доказательство. Теорема доказывается методом математической индукции [1] и полное её доказательство здесь не даётся. На рис. 3 показан кольцевой код длиной N=10 и m=5 слева и его разновидности при перемещении дельта-фактора в исходном векторе на один, два, три символа вправо. Вектор показателей сдвига ПС во всех трёх случаях остаётся неизменным.

Следствие 1. Если кодовые комбинации исходного вектора ошибкообнаруживающего кольцевого кода выбирать таким образом, чтобы они начинались с единицы, а оканчивались нулями, можно получить энтропийный кольцевой код, который в этом случае становится универсальным: является префиксным и ошибкообнаруживающим.

Следствие 2. При перемене мест строк кольцевого кода вектор показателей сдвига становится другим. Это просто проверить на примере.

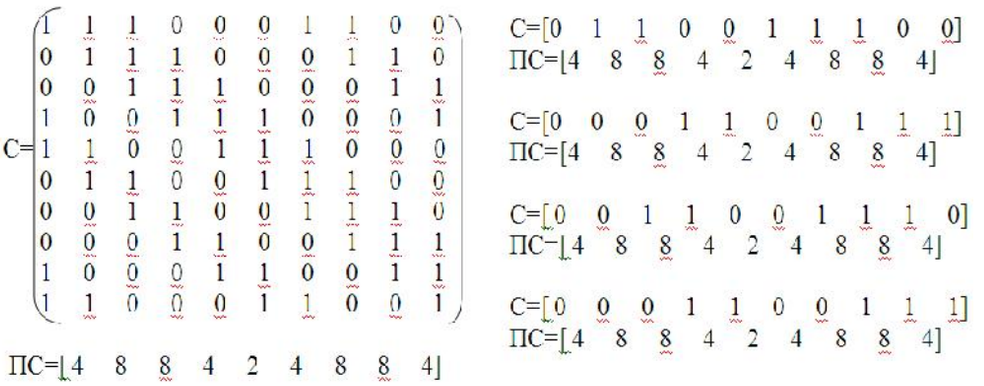

Рис. 3. Демонстрация единственности вектора ПС при перемещении дельта-фактора

Теорема 3 о фракталах. По определению для квазибаркерного кода с длиной исходной последовательности N все элементы вектора показателей сдвига одинаковы и равны одному и тому же целому числу. Тогда коэффициенты сдвига всех остальных кольцевых кодов, начиная с N+1 и выше подобно фракталам в теории изображений, с возрастанием N на единицу увеличиваются на одно или несколько постоянных целых чисел. Неквазибаркерные коды этим свойством не обладают.

Доказательство. Доказательство выполним методом полной (математической) индукции. Рассмотрим следующие варианты квазибаркерного кода длиной N=7 с дельта-фактором [1101], который, как показано выше, может свободно перемещаться по элементам исходного блока, оставляя неизменным вектор сдвига. Как видно на рис. 4 этот дельта-фактор последовательно переходит в исходные последовательности в интервале от N=8 до N=14. Начиная с длины исходного блока N=9, вектор ПС увеличивается каждый раз на один и тот же элемент равный шести единицам, проявляя себя как фракталы

изображения. Это даёт основание говорить о подобии кольцевых кодов известным фракталам.

Теорема 4 о симметрии. Элементы вектора показателей сдвига всегда симметричны относительно своей средней части.

Доказательство. Для доказательства вернёмся к рис. 1 и рассмотрим на нём совпадающие элементы, например, для симметричных пар строк 1-2 и 1-7. Нетрудно видеть, что здесь имеет место следующие совпадения элементов: a-g=g-a; b-a=a-b; c-b=b-c; D-c=c-D; E-D=D-e; F-E=E-F; g-F=F-g. Такое же соответствие прослеживается между строками 1-3 и 1-6, а также 1-4 и 1-5. Ясно, что в первом векторе показателей сдвига ПС для случая N=7 и m=3 будет наблюдаться полная симметрия в значениях его элементов относительно центра вектора. Такая же закономерность имеет место и для других произвольных значений N и m, чем и доказывается формулировка теоремы. Примеры этой закономерности в различных вариантах показаны на рис. 5.

```
N=8
C =[1   1   0   1   0   0   0   0]
ПС=[4   4   4   6   4   4   4]=30
N=5
C =[0   1   1   0   1]: ПС=[4   2   2   4]=12
N=6
C =[0   1   1   0   1   0]: ПС=[4   4   2   4   4]=18
N=7
C =[0   1   1   0   1   0   0]: ПС=[4   4   4   4   4   4]=24
N=8
C=[0   1   1   0   1   0   0   0]  ПС=[4   4   4   6   4   4   4
N=9
C=[0   1   1   0   1   0   0   0   0]
ПС=[4   4   4   6   6   4   4   4]=36
N=10
C=[0   1   1   0   1   0   0   0   0   0]
ПС=[4   4   4   6   6   6   4   4   4]=42
N=11
C=[0   1   1   0   1   0   0   0   0   0   0]
ПС=[4   4   4   6   6   6   6   4   4   4]=48
N=12
C=[0   1   1   0   1   0   0   0   0   0   0   0]
ПС=[4   4   4   6   6   6   6   6   4   4   4]=54
N=13
C=[0   1   1   0   1   0   0   0   0   0   0   0   0]
ПС=[4   4   4   6   6   6   6   6   6   4   4   4]=60
N=14
C=[0   0   0   0   1   1   0   1   0   0   0   0   0   0]
СП=[4   4   4   6   6   6   6   6   6   6   4   4   4]=66.
```

Рис. 4. Поведение кольцевых кодов-фракталов с одинаковым дельта-фактором

```
N=8
C=[0   1   0   1   1   0   1   0]
ПС=[6   4   2   8   2   4   6]=32
N=9
C=[0   1   0   1   1   0   1   0   0]
ПС=[6   4   4   6   6   4   4   6]=40
N=10
C=[0   1   0   1   1   0   1   0   0   0]
ПС=[8   4   4   8   2   8   4   4   8]=50
N=11
C=[0   1   0   1   1   0   1   0   0   0   0]
ПС=[8   6   4   8   4   4   8   4   6   8]=50
N=12
C=[0   1   0   1   1   0   1   0   0   0   0   0]
ПС=[8   6   6   8   4   6   4   8   6   6   8]=70
N=13
C=[0   1   0   1   1   0   1   0   0   0   0   0   0]
ПС=[8   6   6   10   4   6   6   4   10   6   6   8]=80
N=14
C=[0   1   0   1   1   0   1   0   0   0   0   0   0   0]
ПС=[8   6   6   10   6   6   6   6   6   10   6   6   8]=90
.....
N=21
C=[0   1   0   1   1   0   1   0   0   0]
ПС=[6 4 4 8 6 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 6 8 4 4 6]=146
```

Рис. 5. Иллюстрация к теореме о симметричности элементов вектора ПС

Следствие 1. В случае использования первого вектора показателей сдвига в качестве проверочной комбинации достаточно вычислять только её первую половину, за счет чего в два раза уменьшается количество вычислительных операций.

Следствие 2. Для каждого отдельного кольцевого кода уникальным является не только вид и значения элементов вектора показателей сдвига, но также их сумма.

Далее без доказательства приводятся основные свойства рассматриваемых в работе кольцевых кодов.

Свойство 1: Двоичная последовательность блоков равномерной длины N, каждый из которых состоит из m, m=0..N, нулевых и единичных символов, разбивается на $2^N / N^2$ колец. Кольцо представляет собой квадратную матрицу размером N*N, образующую кольцевой код.

Свойство 2: Любой из возможных 2^N блоков, оговоренных в постулате 1, может служить исходной сдвиговой последовательностью (исходным вектором) кольцевого кода.

Свойство 3: Показатели сдвига каждой строки кодового кольца, начиная с первой до предпоследней включительно, записанные в виде числовых последовательностей, образуют треугольную числовую матрицу размерностью (N-1)*(N-1). Элементы матрицы построчно повторяются,

смещаясь каждый раз на единицу вправо. Этот постулат демонстрирует рис. 1.

Свойство 4: Показатели сдвига кольцевого кода, полученные посредством применения логических операций XOR, OR, AND, записанные в виде треугольной матрицы, имеют для всех трёх случаев аналогичный характер.

Свойство 5: Показатели сдвига остаются постоянными при выборе любой другой строки из множества N-1 возможных строк кольца.

Свойство 6: Вследствие повторяемости значений отдельных строк треугольной матрицы показателей сдвига ПС кольцевого кода достаточно ограничиться только первой строкой его матрицы. Этот постулат демонстрируется таблицами 1 и 2.

Свойство 7: Треугольная матрица и её первая строка показателей сдвига для любого из $2^N / N^2$ кодовых колец является уникальной.

Свойство 8: Если показатели сдвига кольцевого кода получаются посредством применения логической операции XOR, то одинаковый результат получается при использовании исходной сдвиговой двоичной последовательности и её инвертированного варианта.

Свойство 9: Вектор показателей сдвига любого кольцевого кода, полученного как векторное произведение логической операции AND, можно получить как разность логических векторных произведений операций OR и XOR для тех же самых строк.

Свойство 10: Вектор показателей сдвига любого кольцевого кода, полученного как векторное произведение логической операции XOR, можно получить как разность логических векторных произведений операций OR и AND для тех же самых строк.

Свойство 11: Вектор ПС для кольцевого кода, исходный вектор которого состоит из одной единицы и остальных нулей, равняется одному числу, которое для логической операции XOR равняется 2, для OR также равняется 2, а для операции AND является нулевым.

Вывод

Благодаря своим особенностям кольцевые коды могут используются и как энтропийные коды переменной длины, так и ошибкообнаруживающие и ошибкоисправляющие коды без проверочной комбинации. Такой код можно назвать универсальным.

Список литературы

1. *Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев //М.:Наука, 1980,- 718 с.*
2. *Касами Т. Теория кодирования / Т. Касами, Токура Н., Ивадари Ё, Инагаки Я.//М.: Мир, 1978,-576 с.*
3. *У.Питерсон. Коды, исправляющие ошибки/ У.Питерсон, Э.Уэлдон //М.:Мир, 1976,- 594 с.*
4. *Мешковский К.А. Кодирование в технике связи/Мешковский К.А., Кириллов Н.Е.//М.: Связь, 1966/ – 320 с.*
5. *Лео Скэнлон. Персональные ЭВМ IBM PC и XT. Программирование на языке ассемблера/ Лео Скэнлон // М.:Радио и связь, 1991,- 336 с.*

Надійшла до редакції 04.03.2014

Рецензент: проф. Дробик А.В., Государственный университет телекоммуникаций, Киев.

КІЛЬЦЕВІ КОДИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

О.В. Дікарєв

У роботі розглядаються кільцеві коди, їх побудова, основні властивості та особливості, які дають можливість зробити висновок щодо універсальності цих кодів, тобто вони можуть бути одночасно ентропійними та помилковиявляючими.

Ключові слова: *код, кільце, матриця, зсув, вектор.*

RING CODES AND THEIR PROPERTIES

A.V. Dikarev

In work ring codes, their construction, the basic properties and features which allow to draw a conclusion on their universality are considered; codes can be entropy and different length.

Keywords: *codes, a ring, a matrix, shift, vector.*