УДК 519.87 (045)

В.В. Козловский[1], Д.П. Чирва[2]

[1] *Институт специальной связи и защиты информации НТУУ «КПИ», Киев*
[2] *Институт информационно-диагностических систем НАУ, Киев*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ МАГИСТРАЛЕЙ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

В статье разработана математическая модель распределённых магистралей передачи информации на основе нерегулярных линий передачи со случайным волновым сопротивлением.

Ключевые слова: *волновое сопротивление; распределённые магистрали; передача информации.*

Введение

В современных высокоскоростных информационных системах необходимо учитывать волновой характер процессов в магистралях передачи информации. В настоящее время в качестве моделей таких магистралей используются отрезки линий передачи с постоянным волновым сопротивлением (регулярные линии). Данная модель является весьма приближённой и позволяет учитывать в основном регулярные случайные ошибки в реализации постоянного номинального волнового сопротивления и ограниченный класс нерегулярных возмущений [1]. Данная модель не применима для анализа процессов в широкополосных информационных магистралях с переменным по длине волновым сопротивлением, поскольку процессы в этом случае описываются уравнениями нерегулярных линий [1].

При технической реализации нерегулярных линий из-за различных технологических неточностей неизбежно возникает ошибка в воспроизведении требуемого значения волнового сопротивления, что приводит к отклонению передаточных характеристик линии от заданных.

В общем случае эта ошибка является случайной величиной, рис. 1.

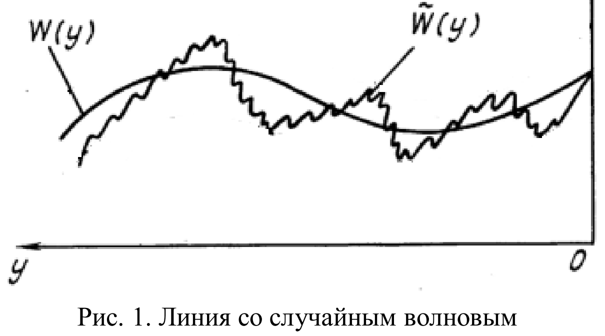

Рис. 1. Линия со случайным волновым сопротивлением $\tilde{W}(y)$, $W(y)$ – номинальное волновое сопротивление, y – геометрическая координата

Поэтому волновое сопротивление является не детерминированной функцией, а случайным процессом. В общем случае математическое ожидание этого процесса отличается от номинальных значений. Поэтому при изготовлении линий необходима технологическая коррекция (оптимизация) в реализации волнового сопротивления, которая компенсирует это различие.

В настоящей статье на основе теории марковских процессов [3] даётся стохастическое описание нерегулярных линий со случайными распределёнными неоднородностями.

Вывод стохастического уравнения для волнового сопротивления неоднородной линии

Известно [4], что процессы в неоднородных линиях полностью определяются перепадом волновых сопротивлений $N(\tau) = \frac{W'(\tau)}{2W(\tau)}$, где W - волновое сопротивление линии; τ - время задержки линии. Из выражения для $N(\tau)$ следует, что все свойства линии определяются как значением волнового сопротивления $W(\tau)$ в данной точке τ, так и скоростью его изменения $W'(\tau) = \frac{\partial W(\tau)}{\partial \tau}$.

По своему характеру ошибки при реализации проводников линии весьма разнообразны. Например, при реализации коаксиальных линий возможны как непредвиденные резкие изменения диаметров проводников (скачки), так и довольно медленное изменение ошибки по координате. При реализации линий в виде полосковых конструкций случайным образом меняются ширины полосок и диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Поэтому, если за исходную случайную функцию принять $N = \frac{W'}{2W}$, то диапазон ее изменения находится в пределах

$$-\infty < N(\tau) < \infty .$$

Ошибка в воспроизведении функции $N(\tau)$ является результатом воздействия большого количества различных несвязанных между собой факторов. Поэтому, согласно предельной теореме [3] можно считать, что ошибка распределена по нормальному закону. Интервал корреляции ошибки определяется особенностью технологического процесса изготовления линии и его величина как правило значительно меньше геометрической длины линии. Например, при шлифовке проводников интервал корреляции определяется размером зерна; при реализации полосковых линий интервал корреляции зависит от размеров микрочастиц, формирующих проводящий слой и т.д. Из сказанного следует, что ошибку в воспроизведении функции $N = W'/(2W)$ можно приближенно считать нормальным белым стационарным шумом с нулевым средним значением. Последнее утверждение следует из того, что вероятность появления положительной и отрицательной ошибки одинакова.

В дальнейшем для удобства используются следующие обозначения: случайные величины обозначены сверху знаком "~", *y* - текущая геометрическая длина, ось *oy* направлена влево. Для детерминированных функций (для номинальных значений) обозначения оставлены прежними.

Таким образом, на основании вышеизложенного можем записать стохастическое уравнение для волнового сопротивления

$$\tilde{N}(y) = N(y) + \Delta_1(y), \quad \tilde{N}(y) = \frac{\tilde{W}'(y)}{2\tilde{W}(y)}, \qquad (1)$$

где $N(y) = \dfrac{W(y)}{2W(y)}$ - детерминированная функция, $\tilde{W}(y)$ - случайная функция волнового сопротивления,

$$\Delta_1(y) = g(y)\Delta(y), \qquad (2)$$

$\Delta(y)$ - нормальный стационарный белый шум с корреляционной функцией

$$K_\Delta(y_1, y_2) = \frac{N_0}{2}\delta(y_2 - y_1),$$

и нулевым математическим ожиданием

$$m\{\Delta\} = 0,$$

$g(y)$ - некоторая функция, характеризующая статистические свойства процесса реализации линии, $g(y) \ge 0$.

Из (1) и (2) находим волновое сопротивление

$$W(y) = A(y)X, \quad A(y) = \exp\left\{2\int_0^y N(y)dy\right\}, \qquad (3)$$

$$X = \tilde{W}(0)\exp\left\{2\int_0^y \Delta_1(y)dy\right\}.$$

Представим процесс X в виде

$$X = \exp\{2V\}, \qquad (4)$$

где

$$V = \int_0^y \Delta_1(y)dy + \frac{1}{2}\ln\tilde{W}(0). \qquad (5)$$

Из (5) следует, что V является марковским процессом с коэффициентом диффузии

$$b(y) = \frac{N_0 g^2(y)}{2}, \qquad (6)$$

и нулевым коэффициентом сноса [3]. Вместо (5) часто бывает удобным пользоваться другой формой записи

$$\frac{dV}{dy} = \Delta_1(y),$$

$$V(0) = \lambda_0 = \frac{1}{2}\ln\tilde{W}(0),$$

$V(0) = \lambda_0$ – начальное случайное значение.

Из соотношений (3), (4) следует, что статистические характеристики волнового сопротивления

$$\tilde{W}(y) = A(y)e^{2V} \qquad (7)$$

полностью определяются марковским процессом V. Перейдем к изучению основных свойств этого процесса.

Определение плотности вероятности марковского процесса V, заключенного между двумя отражательными границами

Плотность вероятности $P(v, y)$ марковского процесса $V(y)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова [3]. В нашем случае это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(v, y) = \frac{1}{2}b(y)\frac{\partial^2}{\partial V^2}P(v, y). \qquad (8)$$

Уравнение (8) допускает разделение переменных. Поэтому полагая

$$P(v, y) = V(v)Y(y), \qquad (9)$$

из (8) получим

$$\frac{1}{b(y)Y(y)}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{1}{V(v)}\frac{\partial^2 V(v)}{\partial V^2} = -\lambda^2, \qquad (10)$$

где λ^2 – некоторое положительное число. Поскольку равенство (10) справедливо при любых y и v, то вместо (10) можно рассматривать пару уравнений

$$V'' + \lambda^2 V = 0, \qquad (11)$$

$$Y' + \frac{\lambda^2}{2}b(y)Y = 0. \qquad (12)$$

Решением (12) является функция

$$Y(y) = Y(0)\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2\int_0^y b(y)dy\right\}. \qquad (13)$$

Будем считать, что отражательные границы расположены в точках $V = 0$ и $V = 2h$. Условием отражения является равенство нулю функции потока $G(v, y)$ [3]. Для рассматриваемого процесса $V(y)$.

$$G(v, y) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dV}\left[b(y)P(v, y)\right].$$

Отсюда находим, что плотность вероятности $P(v, y)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$\frac{\partial}{\partial V}P(v, y)\Big|_{v=0} = \frac{\partial}{\partial V}P(v, y)\Big|_{v=2h} = 0.$$

Учитывая (9), находим

$$V'(0) = V'(2h) = 0. \qquad (14)$$

Решением (11) при условиях (14) является, как известно, система ортонормированных функций ϕ_k :

$$\phi_0(V) = \frac{1}{\sqrt{2h}}, \quad \phi_k(V) = \frac{1}{\sqrt{h}}\cos\lambda_k V,$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{2h}.$$

Поэтому, согласно методу разделения переменных [3], общее решение, удовлетворяющее (6), равно

$$P(v, y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\frac{1}{2}\lambda_k^2\int_0^y b(y)dy}\cos\lambda_k V.$$

Постоянные C_k определяются начальными условиями. Например, если процесс V в точке $y = 0$ детерминирован, т.е. $V(0) = \lambda_0$, то

$$P(V,0) = \delta(V - \lambda_0),$$

где $\delta(v)$ - дельта-функция Дирака. В этом случае из разложения [3]

$$\delta(V - \lambda_0) = \sum_{k=0}\phi_k(V)\phi_k(0),$$

следует, что

$$C_0 = \frac{1}{2h}, \quad C_k = \frac{1}{h}\cos k\pi\frac{\lambda_0}{2h}.$$

Следовательно,

$$P(v, y, \lambda_0) = \frac{1}{2h} + \frac{1}{h}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left[\frac{k\pi}{2h}\lambda_0\right]\cos\left[\frac{k\pi}{2h}v\right]\exp\left\{-\frac{k^2\pi^2}{8h^2}\int_0^y b(y)dy\right\};$$

$$0 < \lambda_0 < 2h, \; 0 < v < 2h.$$

Если процесс рассматривать в области –h, h, то

$$P_{-h,h}(v, y, \lambda_0) = \frac{1}{2h} + \frac{1}{h}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\cos\left[\frac{k\pi}{2h}(\lambda_0 + h)\right]\cos\left[\frac{k\pi}{2h}(v + h)\right]\times \\ \times\exp\left\{-\frac{k^2\pi^2}{8h^2}\int_0^y b(y)dy\right\}\end{array}\right), \qquad (15)$$

$$-h < \lambda_0 < h, \; -h < v < h.$$

При рассмотрении процесса v между произвольными границами c, d, c < d, в (15) следует произвести известную замену переменных [3] :

$$P_{c,d}(v, y, \lambda_0) = P_{-\frac{d-c}{2},\frac{d-c}{2}}(v, y, \lambda_0 - \frac{c+d}{2}), ;$$

$$c < \lambda_0 < d, \; c < v < d.$$

Если начальное условие $\lambda_0 = v(0)$ является случайной величиной, то согласно методу разделения переменных [3] общее решение будет равно:

$$P_{c,d}(v, y) = \int_c^d P_{c,d}(v, y, \lambda_0)P_0(\lambda_0)d\lambda_0,$$

$$c < v < d,$$

где $P_0(\lambda)$ - плотность вероятности величины λ_0.

Определение вероятности невыхода марковского процесса за пределы заданных границ

Для определения вероятности невыхода процесса v за пределы заданных границ $q_{c,d}$ воспользуемся методом [3], основанным на решении прямого уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. Для процесса V это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial y}\tilde{P}(v, y, \lambda_0) = \frac{1}{2}b(y)\frac{\partial^2}{\partial V^2}\tilde{P}(v, y, \lambda_0), \qquad (16)$$

где $\tilde{P}(v, y, \lambda_0)$ - плотность, вероятности перехода процесса v из первоначальной точки $\lambda_0 \in (c, d)$ в какую-либо внутреннюю точку интервала (c, d) для траекторий процесса $V(y)$, которые ни разу не достигли границ c, d при меньших координатах.

Для определения вероятности $q_{c,d}$ в точках c и d должно быть соблюдено условие поглощения [3]

$$\tilde{P}(c, y, \lambda_0) = \tilde{P}(d, y, \lambda_0) = 0.$$

Уравнение (16) по виду совпадает с уравнением (8). Поэтому соотношения (11) - (13) остаются справедливыми. Условие поглощения при этом записывается в виде

$$V(c) = V(d) = 0 .$$

Следуя методу разделения переменных [3] при c = – h, d = h и детерминированном начальном условии, находим вероятность невыхода процесса V за границы – h, h:

$$q_{-h,h}(y,\lambda_0) = \\ = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cos\left[\dfrac{(2n+1)\pi\lambda_0}{2h}\right]\times \\ \times\exp\left\{-\dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{8h^2}\int_0^y b(y)dy\right\}\end{array}\right); \quad (17)$$

$$-h < \lambda_0 < h .$$

При рассмотрении произвольной области c, d:

$$q_{c,d}(y,\lambda_0) = q_{-\frac{d-c}{2},\frac{d-c}{2}}(y,\lambda_0 - \frac{c+d}{2}). \quad (18)$$

Если λ_0 – случайная величина с плотностью вероятности $P_0(\lambda_0)$, то

$$q_{c,d}(y) = \int_c^d q_{c,d}(y,\lambda_0)P_0(\lambda_0)d\lambda_0 . \quad (19)$$

При выводе соотношений (17) - (19) весь ход рассуждений остается таким же, как и в параграфе 2.

Заметим, если в выражении для коэффициента диффузии b(y) (6) принять g(y)=1, то все формулы, полученные в параграфах 2 и 3, перейдут в соответствующие формулы винеровского процесса [3].

Пример. Случайная величина λ_0 в интервале c, d распределена равномерно

$$P_0(\lambda_0) = \frac{1}{d-c}. \quad (20)$$

Из (17) - (19) находим вероятность невыхода процесса V за пределы границ c,d:

$$q_{c,d}(y) = \\ = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}(2n+1)^{-1}\times \\ \times\exp\left\{-\dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{2(d-c)^2}\int_0^y b(y)dy\right\}\end{array}\right). \quad (21)$$

Таким образом, полученные формулы (17) – (21) определяют вероятность того, что при случайной реализации распределённых цепей волновое сопротивление (7) не выйдет за заданные пределы, то есть данные формулы характеризуют процент выхода годных изделий.

Кроме того, используя выражения (17) - (19), при заданном проценте брака можно определить необходимую точность реализации волнового сопротивления нерегулярных линий.

Выводы

На основе теории марковских процессов, получено стохастическое описание нерегулярных линий со случайными распределениями неоднородностей.

Например, мы можем видеть, что полученные формулы определяют вероятность того, что не будет превышать установленные границы, то есть, эти формулы описывают процент выхода продукта волнового сопротивление при случайной реализации распределенных схем.

Кроме того, за определенный процент брака может определить необходимую точность реализации волнового сопротивления нерегулярной линии

Список литературы

1. *Технология гибридных интегральных схем СВЧ / Бушминский И.П., Морозов Г.В. // -М.: Радио и связь, 1987. – 285 с.*
2. *Стохастические уравнения: теория и её приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Том 2 / Кляцкин В.И. – М. Физматлит, 2008. – 344 с.*
3. *Булинский А.В. Теория случайных процессов. / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – М. : Физматлит, 2005. – 548 с.*
4. *Бударагин Р.В. Расчет плавных переходов в коаксиальной линии передачи / Р.В. Бударагин, А.А. Радионов, А.А. Титаренко // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2001. – №2. – С. 53-57.*

Надійшла до редколегії 22.08.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Н. Беркман, Державний університет телекомунікацій, Київ.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗПОДІЛЕНИХ МАГІСТРАЛЕЙ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ

В.В. Козловський, Д.П. Чирва

Розроблено математичну модель розподілених магістралей передачі інформації на основі нерегулярних ліній передачі з випадковим хвильовим опором.

Ключові слова: *хвильовий опір; розподілені магістралі; передача інформації.*

MATHEMATICAL MODEL OF DISTRIBUTED TRANSFER INFORMATION HIGHWAYS

V.V. Kozlovskyi, D.P. Chyrva

A mathematical model of distributed information transmission highways based on the irregular transmission lines with a casual wave resistance is developed

Keywords: *wave resistance; distributed transfer; information highways.*