УДК 519.87 (045)

В.В. Козловский[1], Д.П. Чирва[2]

[1] *Институт специальной связи и защиты информации НТУУ «КПИ», Киев*
[2] *Институт информационно-диагностических систем НАУ, Киев*

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Получена формула для плотности вероятности, математического ожидания и дисперсии волнового сопротивления неоднородной линии со случайными распределёнными неоднородностями

Ключевые слова: *волновое сопротивление; плотность вероятности; дисперсия.*

Введение

В современных высокоскоростных информационных системах необходимо учитывать волновой характер процессов в магистралях передачи информации. В настоящее время в качестве моделей таких магистралей используются отрезки линий передачи с постоянным волновым сопротивлением (регулярные линии). Данная модель является весьма приближённой и позволяет учитывать в основном регулярные случайные ошибки в реализации постоянного номинального волнового сопротивления и ограниченный класс нерегулярных возмущений [1].

Основная часть

В работе [1] показано, что при реализации неоднородной линии случайное волновое сопротивление $\tilde{W}(y)$ описывается Марковским процессом V:

$$\tilde{W}(y) = A(y)e^{2V},$$
$$A(y) = \exp\left\{2\int_0^y N(y)dy\right\},\ N(y) = \frac{W'(y)}{2W(y)}, \tag{1}$$

где $W(y)$ - номинальное (расчётное) волновое сопротивление, y - текущая геометрическая координата. Для определения различных статистических характеристик процесса $\tilde{W}(y)$ (вероятность невыхода процесса за пределы заданных границ, математическое ожидание, дисперсия) необходимо знать плотность вероятности $P_{\tilde{W}}(y)$ процесса $\tilde{W}(y)$.

Для определения $P_{\tilde{W}}(y)$ воспользуемся тем, что как следует из (1), если процесс V с вероятностью $q_{c,d}$ не выходит за границы c, d, то с той же вероятностью $q_{c,d}$ волновое сопротивление $\tilde{W}(y)$ удовлетворяет неравенству (рис. 1):

$$A(y)e^{2c} < \tilde{W}(y) < A(y)e^{2d},\quad d < c. \tag{2}$$

На практике удобно пользоваться отклонением волнового сопротивления от номинального значения $W(y)$. Поэтому преобразуем (2). Для этого представим $\exp\{2d\}$, $\exp\{2c\}$ в виде

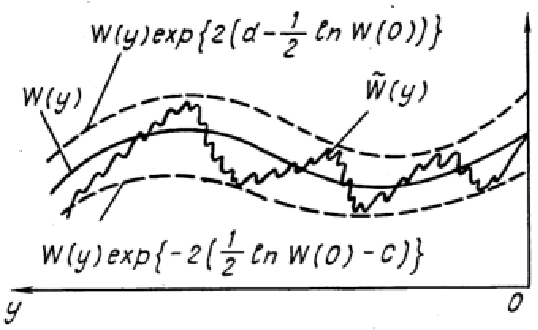

Рис. 1. Волновое сопротивление линии со случайными неоднородностями

$$e^{2d} = W(0)e^{-2\left[\frac{1}{2}\ln W(0)\right]+2d},$$
$$e^{2c} = W(0)e^{-2\left[\frac{1}{2}\ln W(0)\right]+2c}. \tag{3}$$

Учитывая, что $A(y)W(0) = W(y)$, из (2) находим

$$W(y)e^{-2\left[\frac{1}{2}lW(0)-C\right]} < \tilde{W}(y) < W(y)e^{2\left[d-\frac{1}{2}\ln W(0)\right]}. \tag{4}$$

Отсюда следует, если границы c, d, выбрать так, что

$$C < \frac{1}{2}\ln W(0) < d, \tag{5}$$

то $q_{c,d}$ будет характеризовать вероятность невыхода $\tilde{W}(y)$ за границы, расположенные по обе стороны от номинального волнового сопротивления, рис. 1.

На практике часто возникает ситуация, когда можно считать, что $\tilde{W}(0) = W(0)$ является детерминированной величиной. В этом случае, согласно [1]

$$\tilde{W}(y) = W(y)e^{2\int_0^y \Delta_1(y)dy}, \tag{6}$$

где
$$\Delta_1(y) = g(y)\Delta(y), \tag{7}$$

$\Delta(y)$ - нормальный стационарный белый шум с корреляционной функцией

$$K_{\Delta}(y_1,y_2)=\frac{N_0}{2}\delta(y_2-y_1), \qquad (8)$$

и нулевым математическим ожиданием

$$m\{\Delta\}=0, \qquad (9)$$

$g(y)$ – некоторая функция, характеризующая статистические свойства процесса реализации линии, $g(y)\ge 0$. Поскольку статистические характеристики волнового сопротивления определяются только $\Delta_1(y)$, то в данном случае процесс $V(y)$ следует рассматривать при нулевом начальном условии

$$V(0)=\lambda_0=0. \qquad (10)$$

Положив в (11) $\lambda_0=0$, найдем вероятность выполнения неравенства

$$W(y)e^{-2h}<\tilde W(y)<W(y)e^{2h}. \qquad (11)$$

Согласно [1] вероятность нахождения процесса в пределах $[-h,h]$

$$q_{-h,h}(y,0)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\exp\left\{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{8h^2}\int_0^y b(y)dy\right\}. \qquad (12)$$

Теперь найдем связь между среднеквадратическим отклонением волнового сопротивления $\sigma_{\tilde W}(y)$ и коэффициентом диффузии b(y). Установив эту связь, по среднеквадратической ошибке $\sigma_{\tilde W}(y)$ можно найти вероятность пребывания волнового сопротивления $\tilde W(y)$ в заданной области. Согласно (1)

$$\tilde W(y)=A(y)\tilde W(0)\exp\left\{2\int_0^y\Delta_1(y)dy\right\}. \qquad (13)$$

Из (13) находим корреляционную функцию процесса $\Delta_1(y)=g(y)\Delta(y)$:

$$K_{\Delta_1}(y_1,y_2)=g(y_1)g(y_2)\frac{N_0}{2}\delta(y_2-y_1). \qquad (14)$$

Согласно предельной теореме теории вероятностей процесс

$$Z=\int_0^y\Delta_1(y)dy, \qquad (15)$$

является нормальным с математическим ожиданием $m\{Z\}=0$ и дисперсией

$$\sigma_Z^2=\int_0^y\int_0^y K_{\Delta_1}(y_1,y_2)dy_1dy_2=\frac{N_0}{2}\times$$

$$\times\int_0^y\int_0^y g(y_1)g(y_2)\delta(y_2-y_1)dy_1dy_2=\frac{N_0}{2}\int_0^y g^2(y)dy. \qquad (16)$$

Для нормального процесса 2Z:

$$\sigma_{2Z}^2=4\sigma_Z^2=2N_0\int_0^y g^2(y)dy,\quad m\{2Z\}=0. \qquad (17)$$

С учетом (17) находим плотность вероятности процесса

$$\eta=e^{2Z}. \qquad (18)$$

Согласно [2] при $\eta>0$:

$$P_\eta(\eta)=P_{2Z}\frac{1}{\frac{d\eta}{d2Z}}=\frac{1}{\eta}P_{2Z}=\frac{1}{\eta}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{2Z}^2}}e^{-\frac{\ln^2\eta}{2\sigma_{2Z}^2}}, \qquad (19)$$

где P_η, P_{2Z} – плотности вероятности процессов η и $2Z$ соответственно.

Далее учитывая, что величины $\tilde W(0)$ и η статистически независимы и

$$\tilde W(y)=A(y)\tilde W(0)\eta, \qquad (20)$$

по известным правилам [2], находим плотность вероятности волнового сопротивления

$$P_{\tilde W}(y)=\frac{1}{A(y)}P_{\eta_1}\left(\frac{\tilde W(y)}{A(y)}\right), \qquad (21)$$

где $P_{\eta_1}(\eta_1)$ – плотность вероятности процесса

$$\eta_1=\tilde W(0)\eta,$$

$$P_{\eta_1}(\eta_1)=\int_0^\infty P_{\tilde W(0)}(\tilde W(0))P_\eta\left(\frac{\eta_1}{\tilde W(0)}\right)\frac{1}{\tilde W(0)}d\tilde W(0), \qquad (22)$$

$P_{\tilde W(0)}(\tilde W(0))$ – плотность вероятности случайной величины $\tilde W(0)$.

Пользуясь (19), определяем

$$m\{\eta\}=\int_0^\infty\eta P_\eta(\eta)d\eta=e^{\frac{1}{2}\sigma_{2Z}^2}. \qquad (23)$$

Согласно (20) математическое ожидание волнового сопротивления

$$m\{\tilde W(y)\}=A(y)m\{\tilde W(0)\}m\{\eta\}=$$

$$=A(y)e^{\sigma_{2Z}^2/2}m\{\tilde W(0)\}. \qquad (24)$$

Для определения дисперсии $\sigma_{\tilde W}^2$ вычислим $m\{\eta^2\}$:

$$m\{\eta^2\}=\int_0^\infty\eta^2P_\eta(\eta)d\eta=e^{2\sigma_{2Z}^2}. \qquad (25)$$

Следовательно,

$$\sigma_\eta^2=m\{\eta^2\}-m^2\{\eta\}=e^{\sigma_{2Z}^2}\left[e^{\sigma_{2Z}^2}-1\right], \qquad (26)$$

Из (20) находим дисперсию волнового сопротивления

$$\sigma_{\tilde W(y)}^2=A^2(y)\cdot\left[X^2\left(\sigma_{\tilde W(0)}^2+m^2\{\tilde W(0)\}\right)-\right.$$

$$\left.-Xm^2\{\tilde W(0)\}\right];\quad X=\exp\{\sigma_{2Z}^2\}.. \qquad (27)$$

По принятой классификации [2], как следует из (13), случайная величина $\tilde{W}(0)$ определяет регулярное возмущение волнового сопротивления, а процесс $\Delta_1(y)$ определяет нерегулярное возмущение. При отсутствии регулярных возмущений

$$P_{\tilde{W}(0)} = \delta(\tilde{W}(0) - W(0)), \tag{28}$$

и согласно (21) плотность вероятности описывается логарифмическим нормальным распределением

$$P_{\tilde{W}(y)} = \left(\tilde{W}(y)\sqrt{2\pi\sigma_{2Z}^2}\right)^{-1} \cdot e^{-\ell n^2 \frac{\tilde{W}(y)}{W(y)} \Big/ \left(2\sigma_{2Z}^2\right)} =$$

$$= \left(\tilde{W}(y)\sigma_{2Z}\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \cdot e^{-\left(\ell n \tilde{W}(y) - \ell n W(y)\right)^2 \big/ 2\sigma_{2Z}^2} \tag{29}$$

с математическим ожиданием и дисперсией [2]

$$m\left\{\tilde{W}(y)\right\} = W(y)e^{\sigma_{2Z}^2/2},$$

$$\sigma_{\tilde{W}(y)}^2 = W^2(y)e^{\sigma_{2Z}^2}\left(e^{\sigma_{2Z}^2} - 1\right). \tag{29, a}$$

На рис. 2 показаны некоторые зависимости $P_{\tilde{W}(y)}$, вычисленные по формуле (29) при условии, что $W(y) = 50\text{Ом}$.

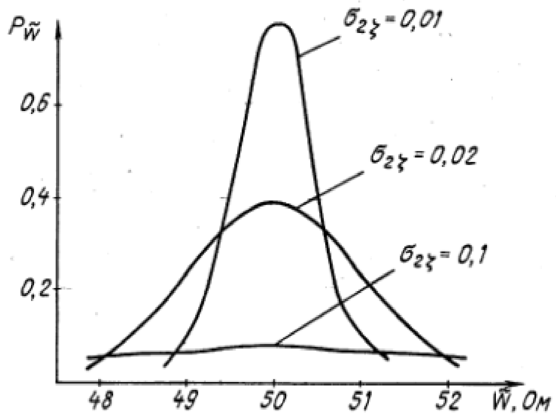

Рис. 2. Плотность вероятности волнового сопротивления

Для определения связи между коэффициентом диффузии $b(y)$ и $\sigma_{\tilde{W}}^2$ решим (17) относительно $g^2(y)$.

$$g^2(y) = \frac{1}{2N_0}\frac{d\sigma_{2Z}^2}{dy}, \tag{30}$$

откуда
$$b(y) = \frac{1}{4}\frac{d\sigma_{2Z}^2}{dy}. \tag{31}$$

Следовательно,

$$\int_0^y b(y)dy = \frac{1}{4}\left[\sigma_{2Z}^2(y) - \sigma_{2Z}^2(0)\right]. \tag{32}$$

Из (15) следует, что $\sigma_{2Z}^2(0) = 0$. Поэтому

$$\int_0^y b(y)dy = \frac{1}{4}\sigma_{2Z}^2(y). \tag{33}$$

Так как коэффициент диффузии $b(y) \geq 0$, то функции σ_{2Z}^2 и $\sigma_{\tilde{W}}^2 \big/ A^2$ являются неубывающими (27).

Таким образом, зная среднеквадратическую ошибку в воспроизведении волнового сопротивления $\sigma_{\tilde{W}(y)}$, из (27) находим σ_{2Z}^2 и величину интеграла (33). Далее методом [1] можно найти вероятность пребывания волнового сопротивления в пределах заданных границ.

Выводы

На основе теории Марковских процессов, получена формула для плотности вероятности математического ожидания и дисперсии волнового сопротивления неоднородной линии со случайными распределёнными неоднородностями. Метода [1] позволяет найти вероятность пребывания волнового сопротивления в пределах заданных границ.

Список литературы

1. *Kozlovskyi V.V. Mathematical model of distributed transfer information highways / V.V. Kozlovskyi, D.P. Chyrva // Electronics and Control Systems. – 2016. – N 2(48). – P. 146-151*

2. *Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 2005. – 548 с.*

Надійшла до редколегії 22.08.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Н. Беркман, Державний університет телекомунікацій, Київ.

ЩІЛЬНІСТЬ ІМОВІРНОСТІ ХВИЛЬОВОГО ОПОРУ НЕОДНОРІДНОЇ ЛІНІЇ З ВИПАДКОВИМИ РОЗПОДІЛЕНИМИ НЕОДНОРІДНОСТЯМИ

В.В. Козловський, Д.П. Чирва

Отримана формула для щільності ймовірності, математичного очікування і дисперсії хвильового опору неоднорідною лінії з випадковими розподіленими неоднорідностями.

Ключові слова: *хвильовий опір; щільність ймовірності; дисперсія.*

THE PROBABILITY DENSITY OF THE WSVE RESISTANCE OF INHOMOGENEOUS LINE WITH RANDOM DISTRIBUTED IN HOMOGENEITIES

V.V. Kozlovskyi, D.P. Chyrva

The formula for the probability density, the expectation and variance of the wave resistance of the line with a non-uniform distributed random in homogeneities.

Keywords*: wave resistance; probability density; dispersion.*