

УДК 519.87 (045)

Д.П. Чирва

Институт информационно-диагностических систем НАУ, Киев

СПЕКТРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ОБЛАСТЬ ЧАСТОТНЫХ ИСКАЖЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ МАГИСТРАЛЕЙ

Установлена связь между детерминированным и статистическим возмущением волнового сопротивления распределённой магистрали (неоднородной линии) и областью частотных искажений

Ключевые слова: волновое сопротивление; частота; спектр.

Введение

В современных высокоскоростных информационных системах необходимо учитывать волновой характер процессов в магистралях передачи информации. В настоящее время в качестве моделей таких магистралей используются отрезки линий передачи с постоянным волновым сопротивлением (регулярные линии). Данная модель является весьма приближённой и позволяет учитывать в основном регулярные случайные ошибки в реализации постоянно номинального волнового сопротивления и ограниченный класс нерегулярных возмущений [1].

Основная часть

Обозначим через $\tilde{W}(\tau)$, $W(\tau)$ волновые сопротивления возмущенной и невозмущенной линий соответственно, τ - текущее время задержки, t_3 - время задержки всей линии. Пока полагаем, что $\tilde{W}(\tau)$ является детерминированной функцией.

1. Пусть $\tilde{W}(0) \neq W(0)$ и (или) $\tilde{W}(t_3) \neq W(t_3)$. В данном случае, как следует из [1], нарушается асимптотическое выражение для матриц линии по сравнению с выражением для невозмущенной линии. Поэтому отличие волнового сопротивления хотя бы на одном конце приводит к постоянному характеру искажений параметров линии на больших частотах, т.е. при $\omega \rightarrow \infty$.

2. $\tilde{C}_{СТ} \neq C_{СТ}$, где $\tilde{C}_{СТ}$, $C_{СТ}$ - статические емкости возмущенной и невозмущенной линий.

Согласно [2]

$$\tilde{C}_{СТ} = \int_0^{t_3} \tilde{W}^{-1}(x) dx, \quad C_{СТ} = \int_0^{t_3} W^{-1}(x) dx. \quad (1)$$

Статическая емкость определяет вычеты в нуле элементов матрицы сопротивлений. Поэтому неравенство $\tilde{C}_{СТ} \neq C_{СТ}$ приводит обязательно к искажению параметров линии в области низких частот $\omega < \omega_1$, где ω_1 - первая гармоника разомкнутой невозмущенной линии.

3. $\tilde{W}(0) = W(0)$ и $\tilde{W}(t_3) = W(t_3)$. В данном случае асимптотическое выражение для матриц линии [1] не нарушается. Поэтому при $\omega \rightarrow \infty$, т.е. на больших частотах, искажение параметров линии будет отсутствовать. Следовательно, наиболее сильные искажения возникают только в области частот $\omega < \infty$.

Следует отметить, что ошибки п.1.2 могут присутствовать одновременно. То же можно сказать и об ошибках п.2.3. При реализации волнового сопротивления ошибки п.1 обычно исключаются, поскольку не представляет труда проводники линии на концах выполнить наиболее точно. Так как абсолютно точно изготовить проводники нельзя, то возмущение волнового сопротивления на концах приводит к искажениям параметров линии типа фона на больших частотах. Наиболее опасными возмущениями являются возмущения п.2 и п.3. Данные возмущения сосредоточены во всей области $0 < \tau < t_3$ и поэтому избавиться от них не представляется возможным. Ввиду этого ниже рассматриваются возмущения п.3. Возмущения п.2, очевидно, являются при этом частным случаем возмущений п.3.

Пусть ρ - спектральная функция краевой задачи

$$-U'' + q(\tau)U = \omega^2 U, \quad q = N^2 - N^1, \quad N = W^1 / 2W, \quad (2)$$

$$U'(\omega, 0) + N(0)U(\omega, 0) = 0, \quad U(\omega, 0) = 1. \quad (3)$$

Наряду с задачей (2)-(3) рассмотрим вторую краевую задачу

$$-U'' + \tilde{q}(\tau)U = \omega^2 U, \quad \tilde{q} = \tilde{N}^2 - \tilde{N}^1, \quad \tilde{N} = \tilde{W}^1 / 2\tilde{W}, \quad (4)$$

$$U'(\omega, 0) + \tilde{N}(0)U(\omega, 0) = 0, \quad U(\omega, 0) = 1. \quad (5)$$

Условия (3) и (5) соответствуют тому, что при $\tau = 0$ входные сопротивления обеих линий равны бесконечности. Найдем связь между волновыми сопротивлениями $W(\tau)$ и $\tilde{W}(\tau)$ при условии, что спектральная функция задачи (4)-(5) равна

$$\tilde{\rho} = \rho + C_1 \cdot 1(\omega^2 - \mu^2), \quad (6)$$

где C_1 - некоторая константа, $1(\omega^2 - \mu^2)$ - функция Хевисайда.

Обозначим решения задач (2)-(3) и (4)-(5) через $U(\omega, \tau)$ и $\tilde{U}(\omega, \tau)$ соответственно. Тогда, как показано в [1],

$$\tilde{U}(\omega, \tau) = U(\omega, \tau) - \left[CU(\mu, \tau) / \left(1 + C \int_0^\tau U^2(\mu, t) dt \right) \right] \cdot \int_0^\tau U(\mu, t) U(\omega, t) dt,$$

Учитывая, что волновые сопротивления связаны с напряжениями U и \tilde{U} зависимостью [2]:

$$\frac{1}{\sqrt{W(\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{W(0)}} \frac{U(0, \tau)}{U(0, 0)}, \quad \frac{1}{\sqrt{\tilde{W}(\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{W}(0)}} \frac{\tilde{U}(0, \tau)}{\tilde{U}(0, 0)}, \quad (8)$$

с учетом (7), получим

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{W}(\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{W(\tau)}} - \frac{A(\mu, \tau)}{\sqrt{W(0)}}, \quad (9)$$

где $A(\mu, \tau) = \frac{CU(\mu, \tau)}{\tau} \int_0^\tau U(\mu, t) U(0, t) dt$. (10)

Введем дополнительное условие

$$U'(\omega, t_3) + N(t_3)U(\omega, t_3) = 0. \quad (11)$$

Обозначим собственные числа задачи (2), (3), (11) через $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots$. Последовательность чисел $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$ является резонансными частотами разомкнутой с обоих концов линии, $\omega_0 = 0$. Тогда $U(\omega_k, t)$ является k -й собственной функцией и согласно теореме Штурма (теорема осцилляции) [1] внутри интервала $0 < \tau < t_3$ имеет ровно k нулей. Следовательно, при $\omega_k \leq \mu < \omega_{k+1}$ функция $U(\mu, \tau)$ в интервале $0 < \tau < t_3$ также имеет k нулей [1]. Из (10) следует, что нули $A(\mu, \tau)$ состоят из нулей $U(\mu, \tau)$ и нулей функции

$$\Phi(\mu, \tau) = \int_0^\tau U(\mu, t) U(0, t) dt. \quad (12)$$

В общем случае функция $\Phi(\mu, \tau)$ при $0 < \tau < t_3$ имеет не более k нулей. Таким образом, при $\omega_k \leq \mu < \omega_{k+1}$ количество нулей $A(\mu, \tau)$ в интервале $0 < \tau < t_3$ лежит в пределах

$$k \leq n \leq 2k. \quad (13)$$

Следовательно, в n точках $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, 0 < \tau_1, \tau_n < t_3, W(\tau_k) = \tilde{W}(\tau_k)$. То есть возмущению спектральной функции (6) соответствует осциллирующий характер возмущения волнового сопротивления, рис. 1. Поскольку спектральная функция с точностью до постоянного множителя связана с волновым сопротивлением, то справедливо и обратное утверждение: появление осцилляций в волновом сопротивлении означает возмущение спектральной функции. Причем частоты осцилляций определяют частотный диапазон возмущения спектральной функции, следовательно, и всех параметров линии.

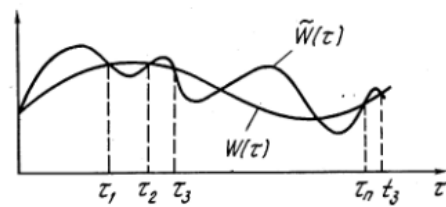


Рис. 1. Характер отклонения волнового сопротивления

Из (13) следует, если n - количество точек, в которых $W(\tau_k) = \tilde{W}(\tau_k), k = 1, 2, \dots, n, 0 < \tau_1, \tau_n < t_3$, то наиболее сильное искажение происходит в области частот (предполагается, что возмущение соответствует (6)):

$$\omega_{n/2} + \varepsilon_1 \leq \mu < \omega_{n+1} + \varepsilon_2, \quad (14)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - окрестности $\omega_{n/2}, \omega_{n+1}$.

Характер осцилляций может соответствовать более сложному возмущению спектральной функции по сравнению с (6). Поскольку функции

$$\sum_{k=1}^m C_k \cdot 1(\omega^2 - \mu_k^2), \quad \mu_1 < \mu_2 < \dots \quad (15)$$

плотны в пространствах непрерывных и интегрируемых функций, то спектральную функцию $\tilde{\rho}$ с произвольной степенью точности в указанных пространствах можно выразить через другую спектральную функцию ρ равенством

$$\tilde{\rho} = \rho + \sum_{k=1}^m C_k 1(\omega^2 - \mu_k^2), \quad \mu_k > \mu_{k-1}. \quad (16)$$

Следовательно, произвольному возмущению волнового сопротивления соответствует возмущение спектральной функции (16). Поэтому, чтобы оценить частотную область, в которой параметры линии изменяются достаточно сильно, надо ошибку $\Delta W(\tau) = \tilde{W}(\tau) - W(\tau)$ представить в виде набора простейших осцилляций (т.е. найти спектр) и согласно (14) оценить частотную область искажений параметров линии для осцилляции с наибольшей и наименьшей частотой. Здесь возникает вопрос: "Как правильно выбрать значение n , соответствующее μ_1 (16)), обозначим его n_{\min} , и значение n , соответствующее μ_m , обозначим его n_{\max} ".

При нахождении спектра ошибки $\Delta W(\tau)$, как обратного преобразования Фурье от $\Delta W(\tau)$

$$G(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta W(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau \quad (17)$$

получается бесконечный спектр, так как пределы интегрирования всегда конечны (время задержки линии $t_3 < \infty$). Поэтому при определении n_{\min} и n_{\max} следует под шириной спектра понимать область частот, в которой содержится большая часть энергии

импульса $\Delta W(\tau)$ подобно тому, как это принято в теории сигналов. Поскольку решение уравнения (2) устойчиво к возмущению потенциала $q(\tau)$ [1], то распределение по частоте основной доли энергии $\Delta W(\tau)$ будет определять и диапазон наиболее сильных искажений параметров линии. С другой стороны, согласно (16), диапазон частот наиболее сильных изменений параметров линии лежит в пределах

$$\mu_1 \leq \mu \leq \mu_m. \quad (18)$$

Следовательно, значения n_{\min} и n_{\max} , определенные исходя из рассмотрения спектра $\Delta W(\tau)$, будут соответствовать величинам μ_1 и μ_m спектральной функции (16). Таким образом, при оценке диапазона искажений следует поступать таким образом:

1. Находим спектр ошибки $G(v)$.
2. По $|G(v)|$ определяем минимальную и

максимальную частоту спектра v_{\min} и v_{\max} .

3. Находим n_{\min} и n_{\max} :

$$n_{\min} = 2 \cdot t_3 / T_{\max} - 1, \quad n_{\max} = 2 \cdot t_3 / T_{\min}, \quad (19)$$

$T_{\min} = 2\pi / v_{\max}$, $T_{\max} = 2\pi / v_{\min}$ – периоды колебаний, соответствующие частотам v_{\min} и v_{\max} .

4. Находим область наиболее сильных искажений:

$$\omega_{n_{\min}}/2 \leq \mu \leq \omega_{n_{\max}+1}. \quad (20)$$

Из изложенного следует ряд выводов:

1. Частоты осцилляций ошибки волнового сопротивления $\Delta W(\tau)$ определяют частотную область наиболее сильного возмущения параметров линии. Вне этой области возмущение параметров мало. Данная область определяется выражением (20).

2. Чем больше частоты осцилляций, тем выше область частот, в которой происходит возмущение параметров линии и наоборот.

3. Для линий, работающих в области частот до второй гармоники разомкнутой с обоих концов линии, наиболее опасными возмущениями являются монотонные отклонения волнового сопротивления и осциллирующие отклонения с малыми частотами $n_{\max} < 2$.

4. Большинство устройств на отрезках линий (фильтры, резонаторы и т.д.) работают в диапазоне частот до второй или до первой гармоники разомк-

нутой линии. Поэтому на их параметры наиболее сильно влияют монотонные и медленно осциллирующие возмущения $n_{\max} < 2$.

5. Поскольку модуль $G(v)$ не зависит от расположения возмущения на оси τ , то это означает, что и расположение возмущения не влияет на область искажений, а влияет только на характер искажений в данной области.

Предположим, что ошибка $\Delta W(\tau) = \Delta \tilde{W}(\tau)$ является случайным процессом. В данном случае все приведенные рассуждения сохраняют силу. Только вместо спектра ошибки $G(v)$ следует пользоваться понятием энергетического спектра $|G(v)|^2$. Без учета множителя $1/(2\pi)$ среднее по множеству мощности ошибки $\Delta \tilde{W}(\tau)$ на интервале $0, t_3$ равно:

$$m \left\{ |G(v)|^2 \right\} = \int_0^{t_3} \int_0^{t_3} B(t_1, t_2) e^{-jv(t_2-t_1)} dt_1 dt_2, \quad (21)$$

где $B(t_1, t_2) = m \left\{ \Delta \tilde{W}(t_1) \Delta \tilde{W}(t_2) \right\}$.

Таким образом, все полученные выше результаты можно использовать и при статистических возмущениях волнового сопротивления. Только при определении области искажений μ (20) вместо понятия $G(v)$ надо пользоваться (21).

Вывод

Все полученные выше результаты позволяют нам определить частотные области, в которых ошибки в реализации волнового сопротивления влияют наиболее сильно на характеристики линии.

Список литературы

1. Левитан М.Л. Введение в спектральную теорию: самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы / М.Л. Левитан, И.С. Саргсян. – М.: Наука, 1990. – 671 с.
2. Литвиненко О.Н. Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике / О.Н. Литвиненко, В.И. Соиников. – М.: Сов. радио, 1964. – 535 с.

Надійшла до редколегії 1.02.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Козелков, Державний університет телекомунікацій, Київ.

СПЕКТРАЛЬНА МОДЕЛЬ ВПЛИВУ ЗБУРЕННЯ ХВИЛЬОВОГО ОПОРУ НА ОБЛАСТЬ ЧАСТОТНИХ СПОТВОРЕНЬ РОЗПОДІЛЕНИХ МАГІСТРАЛЕЙ

Д.П. Чирва

Встановлено зв'язок між детермінованим і статистичними обуренням хвильового опору розподіленої магістралі (неоднорідною лінією) і областю частотних спотворень

Ключові слова: хвильовий опір; частота; спектр.

SPECTRAL MODEL OF INFLUENCE OF DISTURBANCE WAVE RESISTANCE TO AREA FREQUENCY DISTORTION DISTRIBUTED HIGHWAYS

D.P. Chyryva

The connection between deterministic and statistical perturbation wave resistance line distributed (inhomogeneous line) and the area of frequency distortion

Keywords: wave resistance; frequency; range.