УДК 519.85

Ю.Е. Стоян, Т.Е. Романова, А.В. Панкратов

Институт проблем машиностроения имени А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ КОМПОНОВКИ МНОГОГРАННИКОВ В ВЫПУКЛОЙ МНОГОГРАННОЙ ОБЛАСТИ

Рассматривается задача компоновки заданного набора произвольных многогранников, допускающих непрерывные вращения, в прямоугольный параллелепипед минимального объема. Учитываются ограничения на минимально допустимые расстояния. Строится математическая модель в виде задачи нелинейного программирования с использованием псевдонормализованных квази-phi-функций и phi-функций.

***Ключевые слова**: упаковка, многогранники, непрерывные вращения, минимально допустимые расстояния, прямоугольный контейнер, математическое моделирование.*

Введение

Рассматривается класс оптимизационных задач размещения [1], которые имеют широкий спектр применения, например, в машиностроении, судостроении, авиастроении, строительстве, а также в задачах современной биологии, логистике, минералогии, медицине, материаловедении, нанотехнологиях, робототехнике, системах распознавания образов.

Задача оптимальной упаковки многогранников является NP-сложной [2], и, как следствие, методологии решения обычно используют эвристики, например, [3 – 6]. Некоторые исследователи предлагают подходы, основанные на математическом моделировании и оптимизационных процедурах; например, [7 – 9].

В данной работе рассматривается задача упаковки заданного набора произвольных и, в общем случае, невыпуклых многогранников, допускающих непрерывные вращения, в выпуклом многограннике (контейнер) минимального размера (с минимальным коэффициентом гомотетии) с учетом минимально допустимых расстояний. Осуществляется математическое моделирование отношений между геометрическими объектами с помощью метода phi-функций (см. например, [10]), что позволяет сформулировать задачу упаковки в виде задачи нелинейного программирования. К настоящему моменту определены phi-функции для таких объектов как параллелепипеды, выпуклые многогранники, шары [11]. Некоторые из phi-функций (в частности, для многогранников) – достаточно сложны, что затрудняет использование NLP-солверов для поиска локальных экстремумов.

В этой связи с целью аналитического описания ограничений на минимально допустимые расстояния между невыпуклыми многогранниками, допускающими непрерывные повороты и трансляции, в данном исследовании используется класс псевдонормализованных квази-phi-функций [12]. Квази-phi-функции существенно проще, чем phi-функции для многогранников, однако за это приходится “платить” путем включения дополнительных переменных. Свободные от радикалов псевдонормализованные квази-phi-функции позволяют представить задачу оптимальной упаковки многогранников в виде задачи нелинейного программирования, в которой область допустимых решений описывается одной системой неравенств с гладкими функциями, что позволяет применить для ее решения современные NLP-солверы.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу упаковки многогранников в следующей постановке. Имеется выпуклый ограниченный многогранный контейнер Ω и набор многогранников $\mathbb{Q}_q$, $q \in \{1,2,...,N\} = J_N$. С каждым многогранником $\mathbb{Q}_q$ ассоциируется его собственная система координат, начало которой v_q называется полюсом. Не теряя общности, полагаем, что v_q совпадает с центром описанной вокруг $\mathbb{Q}_q$ сферы S_q радиуса r_q.

Положение и ориентация многогранника $\mathbb{Q}$ определяется вектором его переменных параметров размещения (v,θ), где $v=(x,y,z)$ – вектор трансляции, θ=($\theta^1,\theta^2,\theta^3$) – вектор углов поворота. Транслированный на вектор v и повернутый на углы $\theta^1,\theta^2,\theta^3$, многогранник $\mathbb{Q}$ обозначается как

$$\mathbb{Q}(u)=\{p\in R^3 : p=v+M(\theta)\cdot p^0, \forall p^0 \in \mathbb{Q}^0\},$$

где $\mathbb{Q}^0$ – исходный многогранник, $M(\theta)$ – матрица поворота.

Между каждой парой многогранников $\mathbb{Q}_q$ и $\mathbb{Q}_g$, $q<g\in I_N$, так же, как и между многогранни-

ком $\mathbb{Q}_q$, $q \in I_N$, и границей области Ω заданы минимально допустимые расстояния $\rho_{qg} > 0$, $q < g \in I_N$, и $\rho_q > 0$, $q \in I_N$, соответственно.

Полагаем, что

$$\operatorname{dist}(\mathbb{Q}_q, \mathbb{Q}_g) = \min_{a \in \mathbb{Q}_q, b \in \mathbb{Q}_g} d(a,b) \geq \rho_{qg},$$

$$\operatorname{dist}(\mathbb{Q}_q, \Omega^*) = \min_{a \in \mathbb{Q}_q, b \in \Omega^*} d(a,b) \geq \rho_q,$$

где $d(a,b)$ – евклидово расстояние между $a, b \in R^3$, $\Omega^* = R^3 \setminus \operatorname{int}\Omega$.

Задача оптимальной компоновки многогранников в многограннике (в дальнейшем OPPP) может быть сформулирована следующим образом.

Упаковать набор многогранников $\mathbb{Q}_q$, $q \in I_N$, внутри многогранного контейнера Ω минимального размера (с минимальным коэффициентом гомотетии $F = \lambda$), учитывая заданные минимально допустимые расстояния.

Моделирование ограничений размещения

Для описания ограничений непересечения и включения используются phi-функции и квази-phi-функции, а для формализации ограничений на допустимые расстояния – псевдонормализованные phi-функции и псевдонормализованные квази-phi-функции.

Квази-phi-функция для двух невыпуклых многогранников формируется из квази-phi-функций для всех пар выпуклых многогранников, которые образуют исходные невыпуклые многогранники. Если два выпуклых многогранника не пересекаются, то всегда существует разделяющая плоскость, которая делит 3D-пространство на два полупространства. В свою очередь, каждая квази-phi-функция для двух выпуклых многогранников использует phi-функции для выпуклого многогранника и полупространства. Phi-функция для выпуклого многогранника и полупространства очень проста, а, следовательно, квази-phi-функция двух выпуклых многогранников значительно проще, чем обычная phi-функция для двух выпуклых многогранников. Тем не менее, использование дополнительных разделяющих плоскостей для всех пар выпуклых многогранников увеличивает число переменных в математической модели.

Пусть

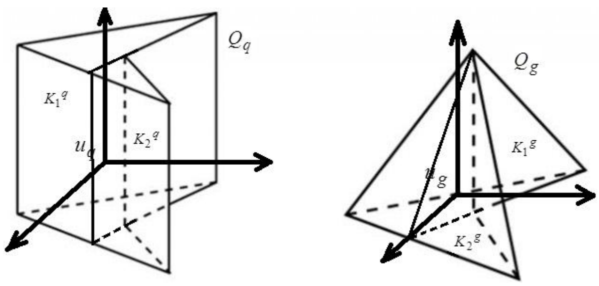
$$\mathbb{Q}_q(u_q) = \bigcup_{i=1}^{n_q} K_i(u_q)$$

и

$$\mathbb{Q}_g(u_g) = \bigcup_{j=1}^{n_g} K_j(u_g) \text{ –}$$

невыпуклые многогранники.

Каждый выпуклый многогранник $K_i \subset \mathbb{Q}_q$ (пример – на рис. 1) задается своими вершинами p_s^i, $s = 1,....,m_i$, $i \in I_n$, в собственной системе координат $\mathbb{Q}_q$.



а б

Рис. 1. Декомпозиция невыпуклых многогранников $\mathbb{Q}_q$ и $\mathbb{Q}_g$ на выпуклые многогранники:
а – $Q_q = K_{q1} \bigcup K_{q2}$, б – $Q_g = K_{g1} \bigcup K_{g2}$

Обозначим минимально допустимое расстояние между каждой парой выпуклых многогранников $K_i \subset \mathbb{Q}_q$ и $K_j \subset \mathbb{Q}_g$, $q < g \in I_N$, через ρ_{qg}, а между каждым многогранником $K_i \subset \mathbb{Q}_q$, $q \in I_N$, и границей области Ω – через ρ_q.

Полагая, что каждый невыпуклый многогранник $\mathbb{Q}_q$ может быть представлен в виде объединения n_q выпуклых многогранников, определим набор

$$n = \sum_{q=1}^{N} n_q$$

выпуклых многогранников K_i, $i \in \{1,2,...,n\} = I_n$ и так называемый “склеивающий” вектор $\mathbf{a} = (a_1,,,,a_n)$, $a_i \in J_N$, где $a_i = q$, если K_i принадлежит многограннику $\mathbb{Q}_q$, $q \in I_N$.

Псевдонормализованная квази-phi-функция для пары невыпуклых многогранников $\mathbb{Q}_q(u_q)$ и $\mathbb{Q}_g(u_g)$ может быть определена в виде

$$\widehat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, u_{qg}) =$$
$$= \min\left\{\widehat{\Phi}'^{K_iK_j}(u_q, u_g, u'_{ij}), i = 1,...,n_q, j = 1,...,n_g\right\},$$

где $\widehat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, u'_{ij})$ – псевдонормализованная квази-phi-функция для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g)$, u'_{ij} – вектор дополнительных переменных, $i = 1,...,n_q$, $j = 1,...,n_g$,

$$u_{qg} = (u'_{ij}, i = 1,...,n_q, j = 1,...,n_g).$$

Псевдонормализованная phi-функция для невыпуклого многогранника $\mathbb{Q}_q(u_g)$ и объекта Ω^* может быть определена так:

$$\hat{\Phi}_q(u_q) = \min\{\hat{\Phi}^{K_i}(u_q), i = 1,...,n_q\},$$

где $\hat{\Phi}^{K_i}(u_q)$ – phi-функция для выпуклого многогранника $K_i(u_q)$ и объекта Ω^*, $i = 1,...,n_q$.

Далее приводится конкретный вид псевдонормализованной квази-phi-функции для пары выпуклых многогранников, а также псевдонормализованной phi-функции для выпуклого многогранника и объекта Ω^*.

Пусть задано минимально допустимое расстояние ρ_{12} между двумя выпуклыми многогранниками $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$. Для описания ограничения $\text{dist}(K_1, K_2) \ge \rho_{12}$, используется псевдонормализованная квази-phi-функция для выпуклых многогранников $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$:

$$\hat{\Phi}'^{K_1K_2}(u_1, u_2, u_P) = \Phi'^{K_1K_2}(u_1, u_2, u_P) - 0.5\rho_{12}, \quad (1)$$

где $\Phi'^{K_1K_2}(u_1, u_2, u_P)$ – псевдонормализованная квази-phi-функция для выпуклых многогранников $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$, заданных вершинами p_i^1, $i = 1,....,m_1$, и p_j^2, $j = 1,....,m_2$, вида

$$\Phi'^{K_1K_2}(u_1, u_2, u_P) = \\ = \min\left\{\Phi^{K_1P}(u_1, u_P), \Phi^{K_2P^*}(u_2, u_P)\right\};$$

$\Phi^{K_1P}(u_1, u_P)$ – phi-функция для $K_1(u_1)$ и полупространства $P(u_P)$, $\Phi^{K_2P^*}(u_2, u_P)$ – phi-функция для $K_2(u_2)$ и полупространства $P^*(u_P) = R^3 \setminus \text{int}\, P(u_P)$.

Здесь

$$P(u_P) = \{(x, y, z) : \psi_P = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \mu_P \le 0\} \text{ –}$$

полупространство,

$$\alpha = \sin\theta_{yP}, \ \beta = -\sin\theta_{xP} \cdot \cos\theta_{yP},$$

$$\gamma = \cos\theta_{xP} \cdot \cos\theta_{yP} \text{ и } u_P = (\theta_{xP}, \theta_{yP}, \mu_P),$$

θ_{xP} и θ_{yP} – соответствующие переменные углы поворота полупространства $P(u_P)$ от оси OY до OZ и от оси OX до OZ. В формуле (4):

$$\Phi^{K_1P}(u_1, u_P) = \min_{1 \le i \le m_1} \psi_P(p_i^1);$$

$$\Phi^{K_2P^*}(u_2, u_P) = \min_{1 \le j \le m_2} (-\psi_P(p_j^2)).$$

Таким образом,

$$\max_{u' \in U} \hat{\Phi}'^{K_1K_2} \ge 0 \Leftrightarrow \text{dist}(K_1, K_2) \ge \rho_{12}.$$

Пусть задано минимально допустимое расстояние ρ_1^- между выпуклым многогранником $K(u_1)$ и объектом Ω^*. Для описания ограничения $\text{dist}(K, \Omega^*) \ge \rho_1$ используется псевдонормализованная phi-функция для выпуклого многогранника $K(u_1)$ и объекта Ω^* вида

$$\hat{\Phi}^{K\Omega^*}(u_1) = \Phi^{K\Omega^*}(u_1) - \rho_1. \quad (2)$$

где

$$\Phi^{K\Omega^*}(u_1) = \min\{\min_{1 \le i \le m_k} \varphi_j(p_i), j = 1,...,m_\Omega\},$$

$\varphi_j(x, y, z) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через j-ую грань выпуклого многогранника Ω, при этом $\varphi_j(p_i) > 0$, если вершина p_i многогранника $K(u_1)$ является внутренней точкой области Ω.; $\Phi^{K\Omega^*}$ – псевдонормализованная phi-функция для многогранника $K(u_1)$ и объекта Ω^* [10].

Математическая модель

Вектор $u \in R^\sigma$ переменных задачи может быть описан следующим образом:

$$u = (\varsigma, \tau),$$

где $y = 1 + 6N + 3m$, $\varsigma = (\lambda, u_1, u_2, ..., u_N)$, λ – переменный коэффициент гомотетии контейнера Ω и $u_{a_i} = (v_{a_i}, \theta_{a_i}) = (x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i}, \theta^1_{a_i}, \theta^2_{a_i}, \theta^3_{a_i})$ – вектор параметров размещения выпуклого многогранника K_i, $i \in I_n$, $a_i \in \{1, 2, ..., N\}$ – компоненты вектора "склейки" $\mathbf{a}$, $\tau = (u^1_p, ..., u^m_p)$, $u^s_p = (\theta_{x^s_p}, \theta_{y^s_p}, \mu^s_p)$ – вектор дополнительных переменных для s-й пары выпуклых многогранников, определенных в (1), $s = 1, ..., m$, $m = \text{card}(\Xi)$,

$$\Xi = \{(i, j), a_i \ne a_j, i < j = 1, ..., n\}. \quad (3)$$

Математическая модель задачи ОРР может быть сформулирована в виде

$$\min_{u \in W \subset R^y} F(u), \quad (4)$$

$$W = \left\{ \begin{array}{c} u \in R^y : \hat{\Phi}'_{ij}(u_{a_i}, u_{a_j}) \ge 0, \\ (i, j) \in \Xi, \hat{\Phi}_i(u_{a_i}) \ge 0, i = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}, \quad (5)$$

где $F(u) = \lambda$; $\hat{\Phi}'_{ij}$ – псевдонормализованная квази-phi-функция вида (1) при $a_i, a_j \in I_N$, учитывающая минимально допустимое расстояние $\rho_{ij} > 0$, Ξ определено в (3); $\hat{\Phi}_i$ – псевдонормализованная phi-функция вида (2) для выпуклого многогранника K_i и объекта Ω^*, учитывающая минимально допустимое расстояние $\rho_i > 0$.

Следует отметить, что для того, чтобы избежать избыточных неравенств в ограничениях включения, вместо набора псевдонормализованных квази-phi-функций $\hat{\Phi}_i(u_{a_i}) \geq 0, \quad i = 1,...,n$, для выпуклых многогранников K_i, $i = 1,...,n$, можно использовать набор псевдонормализованных квази-phi-функций $\hat{\Phi}_q(u_q) \geq 0, \quad q = 1,...,N$, для выпуклых оболочек невыпуклых многогранников $\mathbb{Q}_q$, $q = 1,...,N$.

Каждое phi-неравенство в (5) может быть описано системой неравенств с гладкими функциями. Математическая модель (4)-(5) является непрерывной задачей нелинейного программирования и содержит все глобально оптимальные решения. Для решения задачи можно использовать современные глобальные NLP-солверы (например, Baron) и получить оптимальное решение задачи (4)-(5). Однако на практике мы имеем дело с большим числом переменных и огромным числом неравенств, в результате чего поиск даже локально оптимального решения становится нереальной задачей. Для поиска «хороших» локально оптимальных решений за разумное время может быть использована модификация алгоритма, предложенного в работе [12] для задачи оптимальной упаковки эллипсов в прямоугольном контейнере минимальной площади.

Выводы

В данном исследовании построена математическая модель оптимальной упаковки произвольных многогранников, допускающих непрерывные трансляции и повороты, в виде задачи нелинейного программирования, используя псевдонормализованные квази-phi-функции и phi-функции.

Область допустимых решений описывается системой неравенств с гладкими функциями.

Список литературы

1. *Wascher, G., Hauner, H., Schumann, H.: An improved typology of cutting and packing problems. Eur. J. Oper. Res.* ***183****(3,16), 1109–1130 (2007).*
2. *Chazelle, B., Edelsbrunner, H., Guibas, L.J.: The complexity of cutting complexes. Discr. & Comput. Geom.* ***4****(2), 139–81 (1989).*
3. *Egeblad, J., Nielsen, B.K., Odgaard, A.: Fast neighborhood search for two- and three-dimensional nesting problems. Eur. J. Oper. Res.* ***183****(3),1249–1266 (2007).*
4. *Fasano, G.: MIP-based heuristic for non-standard 3D-packing problems. 4OR: Quart. J. Belgian, French and Italian Oper. Res. Soc.* ***6****(3), 291–310 (2008).*
5. *Korte, A.C.J, Brouwers H.J.H.: Random packing of digitized particles. Powder Techn.* ***233****, 319–324 (2013).*
6. *Egeblad, J., Nielsen, B.K., Brazil, M.: Translational packing of arbitrary polytopes. Comp. Geom.* ***42****(4), 269–288 (2009).*
7. *Fasano, G. A.: Global Optimization point of view for non-standard packing problems. J. Glob. Optim.* ***55****(2), 279–299 (2013).*
8. *Torquato, S., Jiao, Y.: Dense polyhedral packings: Platonic and Archimedean solids. Phys. Rev.* ***80****, 041104, (2009).*
9. *Xiao Liu, Jia-min Liu, An-xi Cao, Zhuang-le Yao, 2015. HAPE3D – a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering.* ***16(****5), 380–390.*
10. *Chernov, N., Stoyan, Y., Romanova, T.: Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. Comput. Geom.: Theory and Appl.* ***43****(5): 535–553 (2010).*
11. *Stoyan, Y., Chugay, A.: Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. Cyber. and Syst. Anal.* ***48*** *(6), 837–845 (2012).*
12. *Chernov, N., Stoyan, Y., Pankratov, A., Romanova, T.: Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. Subm. to J. of Glob. Optim. (2014).*

Поступила в редакцию 7.04.2016

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. С.В. Смеляков, Харьковский национальный университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОЇ КОМПОНОВКИ БАГАТОГРАННИКІВ У ОПУКЛІЙ БАГАТОГРАННІЙ ОБЛАСТІ

Ю.Є. Стоян, Т.Є. Романова, О.В. Панкратов

Розглядається задача упаковки заданого набору багатогранників, що допускають безперервні обертання, у опуклому многогранному контейнері. Враховуються обмеження на мінімально допустимі відстані. Будується математична модель у вигляді задачі нелінійного програмування з використанням псевдонормалізованих квазі-phi-функцій та phi-функцій.

Ключевые слова*: упаковка, багатогранники, безперервні обертання, допустимі відстані, математичне моделювання.*

MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMAL LAYOUT PROBLEM OF POLYHEDRONS INTO A CONVEX POLYHEDRAL REGION

Yu.E. Stoyan, T.E. Romanova, A.V. Pankratov

We study the problem of arrangement a given collection of polyhedrons into a polytope of minimal sizes taking into account minimal allowable distances. Continuous rotations and translations of polyhedrons are allowed. We provide a mathematical model of the problem as a nonlinear programming problem, using phi-function technique.

Keywords: *arrangement, polyhedrons, continuous rotations, polyhedral container, mathematical model.*