УДК 681.5

Р.В. Захарченко

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава

АНАЛІЗ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ МАСИВУ ВІДНОСНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПІДСИЛЕННЯ

У статті розглянуто можливість застосування масиву відносних коефіцієнтів підсилення для аналізу багатовимірних систем та побудови систем управління з домінантними зв'язками.

Ключові слова: *багатовимірні системи, відносні коефіцієнти підсилення, матриця передавальних функцій, канонічне представлення.*

Вступ

Процеси, що управляється однією керуючою дією та мають один вихід, класифікуються як системи з одним входом і одним виходом (SISO, single-input single-output). Однак, багато процесів не відповідають такій простій конфігурації управління. Наприклад, в обробній промисловості, будь-який функціональний блок виробництва не може керуватися за допомогою тільки одного контуру управління. Кожен функціональний блок, як правило, потрібно контролювати принаймні за двома змінними, наприклад, продуктивністю і якістю продукції. Тому, існує принаймні два контури управління. Системи з двома і більше контурами управління відомі як багатовимірні системи або системи з кількома входами і кількома виходами (MIMO, multi-input multi-output).

В загальному випадку кожен вхід системи впливає на кожен її вихід. Тому, для того, щоб кілька контурів управління успішно функціонували, кожен контур повинен не заважати іншим. Інакше, при спробі досягнення своїх відповідних цілей, контури можуть протидіяти один одному. Це явище відоме як перехресні зв'язки [1].

До нестабільності системи призводять перехресні зв'язки не враховані при її розробці.

Розглянемо простий підхід до боротьби з перехресними зв'язками: визначення найбільш домінантних пар входів–виходів для управління багатовимірними системами і створення систем керування з домінантними зв'язками.

Аналіз багатовимірних систем

Доступність методів побудови системи управління залежить від наявності лінійних моделей системи, оскільки результуюча схема управління має точно відповідати динаміці процесу. Тому багатовимірна система спочатку моделюється або аналітично, за допомогою системи диференційних рівнянь, що описують її поведінку, або емпіричним шляхом застосування даних, отриманих експериментально. Очевидно, що відповідність стратегії управління залежить від точності моделі. У випадках, коли характеристики системи відомі, як правило, приймається перший підхід. Прикладом може бути процес сушіння зерна у шахтній зерносушарці конвективним методом, який може бути адекватно змодельований за допомогою рівнянь процесу теплопередачі [6]. У таких випадках, як правило, моделі сформульовані в вигляді простору станів.

В обробній промисловості, де є високий ступінь невизначеності поведінки процесу, часто використовується для моделювання емпіричний підхід. Тим не менш, для цілей проектування систем управління передавальної функції, отриманої за допомогою останнього підходу, як правило, достатньо. Крім того, існує відповідність між моделями простору станів та передавальними функціями. Тому будемо розглядати лише передавальні функції багатовимірних процесів при розробці та аналізі систем управління.

Зазначимо, що багатовимірні системи можна розкласти для простоти на множину підсистем розмірності (2×2), тому будемо розглядати тільки процес (2×2) з двома входами і двома виходами. Двома загальними (2×2) моделями входів-виходів багатовимірних систем є P– і V–канонічні представлення (рис. 1) [1].

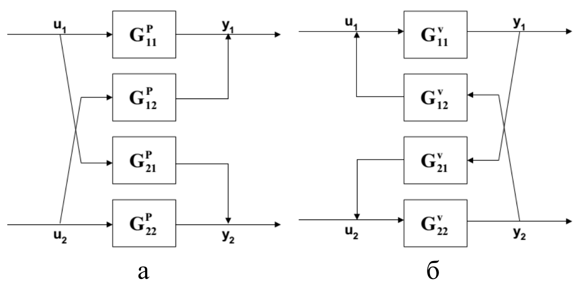

Рис. 1. Моделі входів–виходів систем (2×2): P–канонічна форма (а) і V–канонічна форма (б)

Різницю між цими двома формами видно з рис. 1. В P-канонічній структурі, перехресні зв'язки розглядаються як прямі зв'язки в той час як в V-канонічній структурі – як зворотні зв'язки.

Всередині блоків структурних схем вказані передавальні функції, що визначають зв'язки між відповідними парами входу–виходу [1].

P–канонічне представлення.

Виходи зв'язані з входами відповідно до:

$$y_1 = u_1 G_{11}^p + u_2 G_{12}^p , \tag{1}$$

$$y_2 = u_1 G_{21}^p + u_2 G_{22}^p , \tag{2}$$

де y_i – виходи системи, а u_i – керовані входи. Наведені вище співвідношення виглядають більш компактно в матрично–векторних позначеннях:

$$Y = G^p U , \tag{3}$$

де $Y = \left[y_1, y_2\right]^T$; $U = \left[u_1, u_2\right]^T$; $G^p = \begin{bmatrix} G_{11}^p & G_{12}^p \\ G_{21}^p & G_{22}^p \end{bmatrix}$.

V-канонічне представлення.

Це представлення багатовимірних систем має наступний математичний опис:

$$y_1 = \left[y_2 G_{12}^v + u_1\right] G_{11}^v , \tag{4}$$

$$y_2 = \left[y_1 G_{21}^v + u_2\right] G_{22}^v , \tag{5}$$

або в матрично–векторній формі:

$$Y = \left[I - G_m^v G_i^v\right]^{-1} G_m^v U , \tag{6}$$

де $G_m^v = \begin{bmatrix} G_{11}^v & 0 \\ 0 & G_{22}^v \end{bmatrix}$; $G_i^v = \begin{bmatrix} 0 & G_{12}^v \\ G_{21}^v & 0 \end{bmatrix}$.

Зв'язок між P- та V- канонічними моделями.

Очевидно, що якщо система може бути змодельована з використанням як P– так і V– структури, передавальні функції обох структур повинні бути зв'язані між собою. Матриця передавальних функцій G^p P–канонічної форми пов'язана з матрицями передавальних функцій V–канонічної форми як:

$$G^p = \left[I - G_m^v G_i^v\right]^{-1} G_m^v . \tag{7}$$

Враховуючи існування двох форм моделі процесу, виникає питання про те, яке представлення є більш корисним. Не існує жорстких правил прийняття остаточного вибору. Тим не менш, наступні фактори повинні бути прийняті до уваги:

а) має бути можливість експериментального визначення параметрів моделі;

б) модель повинна відповідати процесу і, бути достатньо загальною, щоб охоплювати інші подібні процеси;

в) модель повинна надавати відповідну інформацію для проектування систем управління;

г) модель повинна бути простою.

Розглянемо спершу V–канонічне представлення. Отримати елементи матриць передавальних функцій G_m^v і G_i^v не можливо шляхом подачі одиничної функції на вхід розімкненої системи. Це тому, що зміна одного входу буде впливати не тільки на всі виходи але і на входи також. Тим не менше, передавальні функції, зв'язані з V–канонічною структурою можуть бути отримані за допомогою методів чисельної ідентифікації [1].

Процеси, як правило, залежать від зовнішніх чинників, таких як зміни навколишнього середовища або умов експлуатації. Для врахування цих ефектів, збурення навантаження також мають бути включені в модель. Рівняння V-канонічної моделі можуть бути розширені таким чином:

$$Y = \left[I - G_m^v G_i^v\right]\left[G_m^v U + G_d V\right], \tag{8}$$

де $G_d = \begin{bmatrix} G_{d1} & 0 \\ 0 & G_{d2} \end{bmatrix}$; $V = \left[v_1, v_2\right]^T$ – вектор збурень.

Включення збурення навантаження в P-канонічне представлення призводить до:

$$Y = G^p U + G_d V . \tag{9}$$

Відзначимо, що в цьому випадку кожна пара вхід-вихід однозначно визначена. Таким чином, передавальні функції матриць G^p і G_d в P-канонічній структурі можуть бути безпосередньо визначені з експериментів при розімкненій системі. Додатковою перевагою P-канонічного представлення є те, що модель є спостережуваною і керованою. Іншими словами, виходи можуть бути виміряні і входи контрольованими.

Таким чином P-канонічна модель є прийнятнішою, тому будемо використовувати саме її при багатофакторному аналізі систем та синтезі систем управління.

Постановка проблеми зв'язності

Розглянемо два незалежних, процеси першого порядку без запізнення, кожен з яких керується пропорційним регулятором. Характеристичні рівняння двох контурів визначаються як [1]:

$$1 + K_{p1} G_{11} = 0 \ \text{ і } \ 1 + K_{p2} G_{22} = 0 . \tag{10}$$

Оскільки системи першого порядку при пропорційному управлінні завжди є стійкими, обидва контури залишатимуться стійкими незалежно від величини коефіцієнта підсилення регулятора.

Тепер припустимо, що контури взаємодіють і динаміка взаємодії описується передавальними функціями G_{12} і G_{21} (рис. 1а). Шляхом алгебраїчних перетворень можна показати, що стійкість такої системи визначається характеристичним рівнянням:

$$\left(1 + K_{p1} G_{11}\right)\left(1 + K_{p2} G_{22}\right) - G_{12} K_{p2} G_{21} K_{p1} = 0 . \tag{11}$$

Це рівняння показує, що система буде стійкою тільки для діапазону значень коефіцієнтів підсилення пропорційних регуляторів. Таким чином, взаємодія контурів може привести до нестійкої роботи, якщо вони не будуть прийняті до уваги при проектуванні системи управління.

Проблему, пов'язану зі зв'язністю контурів управління можна сформулювати формально [3]:

Якщо стійкий стан або динамічне підсилення заданої регульованої змінної змінюється у відповідь на зміну у заданій керуючій змінній, коли інші (початково розімкнені) контури замкнені, то в системі існує зв'язність. Якщо регулятор контуру був налаштований вручну, налаштування буде неправильним, коли всі інші контури будуть налаштовані автоматично через їх вплив на коефіцієнт підсилення цього конкретного контуру управління. Залежно від ступеня взаємодії це призведе до втрати стійкості або, принаймні, до погіршення характеристик перехідного процесу.

Проблема зв'язності контурів може бути вирішена шляхом правильного вибору пар входу–виходу, таких, що вплив зв'язності буде зведено до мінімуму. Для розглянутої системи (2 × 2) це досить просто. Наприклад, якщо u_1 в парі з y_2, то іншою парою, очевидно, є u_2 з y_1. Якщо ці пари не забезпечують необхідної продуктивності, то наступною комбінацією явно є u_1 з y_1 і y_2 з u_2. Системи більшої розмірності дають більшу кількість можливих комбінацій пар входу-виходу для управління. Наприклад, система розмірності (n × n) має до n! Можливих пар входу-виходу. Тому важливо мати можливість кількісно оцінити ступінь взаємодії контурів управління. Ця інформація потім може бути використана для побудови схеми управління з мінімальною зв'язністю. Однією з таких методик є техніка аналізу відносних коефіцієнтів підсилення.

Масив відносних коефіцієнтів підсилення

Методика відносних коефіцієнтів підсилення є не тільки цінним інструментом підбору пар змінних управління, вона також використовується для прогнозування поведінки керованих реакцій [2, 4]. Аналіз будується навколо отримання масиву відносних коефіцієнтів підсилення (МВКП, RGA, Relative Gain Array). Для оцінки концепції відносних коефіцієнтів підсилення, побудуємо МВКП для системи, представленої (2 × 2) P–канонічною формою.

Нехай K_{ij} буде коефіцієнтом підсилення відповідної передавальної функції G_{ij}. Якщо при u_i, що залишається постійним, стрибкоподібна зміна входу u_j на величину Δu_j призводить до зміни на Δy_i виходу y_i, то коефіцієнт підсилення між u_j і y_i визначається за формулою:

$$K_{ij}\Big|_{u_i=\mathrm{const}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\Bigg|_{u_i=\mathrm{const}}. \quad (12)$$

Встановимо константою y_i, шляхом замикання контуру між y_j і u_i. Тоді стрибкоподібна зміна входу u_j на величину Δu_j призведе до іншої зміни виходу y_i. Коефіцієнт підсилення при цій сукупності умов визначається:

$$K_{ij}\Big|_{y_j=\mathrm{const}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\Bigg|_{y_j=\mathrm{const}}. \quad (13)$$

Хоча отримані коефіцієнти підсилення зв'язують ту ж саму пару змінних, вони можуть мати різні значення, бо були отримані при різних умовах. Якщо існує зв'язність, то зміна y_i від зміни u_j для цих двох випадків будуть різними. Відношення

$$\lambda_{ij} = K_{ij}\Big|_{u_i=\mathrm{const}} \Big/ K_{ij}\Big|_{y_j=\mathrm{const}}, \quad (14)$$

де λ_{ij} є безрозмірною величиною, визначає відносний коефіцієнт підсилення між виходом y_i і входом u_j і відразу дає наступну інформацію:

а) Якщо $\lambda_{ij} = 0$, то зміна u_j не впливає на y_i і, отже, не повинен використовуватися для управління y_i.

б) Якщо $\lambda_{ij} = 1$, це означає, що $K_{ij}\Big|_{u_i=\mathrm{const}}$ і $K_{ij}\Big|_{y_j=\mathrm{const}}$ мають ті ж самі значення. Таким чином, за визначенням, коефіцієнт посилення між виходом y_i і входом u_j не залежить від контуру між y_j і u_i, тобто зв'язності немає.

Матриця елементів λ_{ij} утворює МВКП. Для системи (n×n) вона має вигляд:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Елементи МВКП мають такі властивості:

а) сума елементів кожного стовпця дорівнює одиниці, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} = 1$, j = 1, 2, …, n;

б) сума елементів кожного рядка дорівнює одиниці $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} = 1$, i = 1, 2, …, n.

Описаний вище спосіб побудови МВКП базується на даних, отриманих під час експериментальних вимірів. Також можливе аналітичне визначення МВКП. Можна показати, що для системи розмірністю (n×n) з матрицею коефіцієнтів підсилення K, МВКП може бути обчислена як:

$$\Lambda = K \circ \left(K^T\right)^{-1}, \quad (16)$$

де $\circ$ – оператор, що позначає поелементне множення елементів матриць.

При побудові МВКП можуть виникнути наступні випадки (для випадку системи (2 × 2):

а) Якщо $\lambda_{11} = 0$, то МВКП має діагональ з нулів і одиничні не діагональні елементи. Це вказує на те, що управління системою може бути досягнуто тільки шляхом утворення пар y_1 з u_2 і y_2 з u_1. Результуюча система управління при цьому є незв'язною.

б) Якщо $\lambda_{11} = 1$, то система складається з незалежних контурів $y_1 – u_1$ і $y_2 – u_2$. При цьому u_1 не може бути використаний для управління y_2, а u_2 не може бути використаний для управління y_1.

в) Якщо $\lambda_{11} = 0,5$, то обидва керованих входи впливають на обидва виходи однаково. Це відображає найгірший випадок – незалежно від того, які пари використовується, ступінь зв'язності буде однаковою.

г) Якщо $0 < \lambda_{11} < 0,5$, то діагональні елементи МВКП менші 0,5, а недіагональні елементи – більші. Більші елементи вказують на більш придатні пари входу–виходу, а саме y_1 з u_2 і y_2 з u_1.

д) Якщо $0,5 < \lambda_{11} < 1$, то виникає випадок, протилежний випадку г), найбільш придатними парами будуть y_2 з u_2 і y_1 з u_1.

е) Якщо $\lambda_{11} > 1$, то недіагональні елементи МВКП будуть негативними. Це означає, що зміна y_1 від зміни u_1 зменшується, якщо контур між y_2 і u_2 замкнений. Іншими словами, контрольований перехідний процес стримується впливом іншого контуру. Чим більший відносний коефіцієнт підсилення одиниці, тим більшим буде цей ефект. Тому зазначені пари входів-виходів потребують використання великих коефіцієнтів підсилення регуляторів. Альтернативні пари y_1 з u_2, і y_2 з u_1 не можуть бути використані, оскільки відповідні відносні коефіцієнти підсилення є негативними. Це означає, що в результуюча взаємодія контурів буде уводити контрольовані виходи в напрямку, протилежному від того, якого намагається досягнути управління. В результаті цього управління втрачається.

Наведені вище випадки разом з відповідними правилами вибору пар входу-виходу не охоплюють всі можливі випадки. Строгий аналіз має включати розгляд систем, де кількість входів відрізняється від кількості виходів, або у системі наявні збурення. Знаки коефіцієнтів підсилення моделі процесу також є важливими факторами в аналізі МВКП. Тим не менш, можна сформулювати загальне правило для вибору контурів управління: контури управління повинні мати пари входів-виходів, які мають додатні відносні коефіцієнти підсилення, які мають значення якомога ближчі до одиниці.

Використання відносних коефіцієнтів підсилення для визначення кращих пар входу–виходу для багатовимірного управління призводить до того, що називається стратегією управління домінуючої взаємодії. Існують і інші методи, наприклад, засновані на декомпозиції годографа системи або частотні методи, які також прагнуть досягти мінімальної взаємодії між контурами управління. Хоча методи, засновані на аналізі відносних коефіцієнтів підсилення базуються переважно на дослідженні статичних характеристик, однак, вони є досить популярними через інтуїтивний характер цих підходів.

Висновок

Область застосування багатовимірного управління є дуже широким і охопити всі аспекти цієї теми досить складно. В статті розглянуті проблеми, пов’язані з взаємозв'язаними контурами управління, та доцільність застосування відносно простого методу розв'язання цих проблем, а саме побудови системи управління з домінантними зв'язками за допомогою аналізу відносних коефіцієнтів підсилення.

Список літератури

1. Tham M.T. Multivariable control: an introduction to decoupling control. An Introduction to Decoupling Control, MTT, July 1999.

2. Bristol, E.H. On a new measure of interaction for multivariable process control. IEEE Trans. on Auto. Control, 1966, AC-11, pp133-134.

3. Shinskey, F.G. Process Control Systems. 2nd Ed., McGraw Hill, 1979.

4. Shinskey, F.G. Predict distillation column response using relative gains. Hydrocarbon Processing, May, 1981

5. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2 Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. Учеб. пособие / Д.П. Ким. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

6. Остапенко Ю.О. Ідентифікація та моделювання технологічних об’єктів керування / Ю.О. Остапенко. – К: Задруга, 1999. – 420 с.

Надійшла до редколегії 30.6.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Козелков, Державний університет телекомунікацій, Київ.

АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МАССИВА ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УСИЛЕНИЯ

Р.В. Захарченко

В статье рассмотрена возможность применения массива относительных коэффициентов усиления для анализа многомерных систем и построения систем управления с доминантными связями.

Ключевые слова: *многомерные системы, относительные коэффициенты усиления, матрица передаточных функций, каноническое представление.*

MULTIVARIABLE SYSTEMS ANALYSIS WITH RELATIVE GAIN ARRAY

R.V. Zaharchenko

The article considers the possibility of relative gain array using for multivariable systems analysis and dominant interaction control systems design.

Keywords: *multivariable system, relative gain array, transfer functions matrix, canonical representation.*