Математичні моделі та методи

УДК 510.635

Н.В. Голян

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

О СВОЙСТВАХ КАНОНИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ ПОНЯТИЙ

В работе проанализированы множества элементов канонической алгебры понятий. Показано, что алгебра большей размерности является расширением алгебры меньшей размерности. Введены правила построения формул алгебр понятий и показано, что язык формул алгебры понятий любой размерности полон. Доказана теорема о существовании и единственности стандартной формы алгебры понятий.

Ключевые слова: *алгебра конечных предикатов, алгебра понятий, каноническая алгебра, стандартная форма.*

Введение

Работа является логическим продолжением статьи [1], в которой аксиоматически построена алгебра понятий - алгебраическая система, элементы множества-носителя которой интерпретируются как понятия интеллекта, а ее операции над этими элементами – как действия интеллекта над понятиями.

В настоящей статье проанализированы множества элементов канонической алгебры понятий. Показано, что алгебра большей размерности является просто расширением алгебры меньшей размерности. Иначе говоря, алгебра меньшей размерности является подалгеброй алгебры большей размерности. Введены правила построения формул алгебр понятий и показано, что язык формул алгебры понятий любой размерности полон.

Доказана теорема о существовании и единственности стандартной формы алгебры понятий.

1. Универсальная каноническая алгебра понятий

При доказательстве теоремы о существовании алгебр понятий нам пришлось построить ряд конкретных алгебр понятий $L_1, L_2, \ldots$. Эти алгебры будем называть каноническими алгебрами понятий. Носителем канонической алгебры понятий L_n служит множество S_n, образованное из всевозможных символов вида $0, e_1, e_2, \ldots, e_n$, а также из всевозможных символов вида $e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ip}$, где

$$e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ip} \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_p,\ 2 \le p \le n.$$

Каждый такой символ представляет собой последовательность, составленную из двух или более (не обязательно всех) символов, называемых базисными, которые расположены в порядке возрастания их номеров. Любой из базисных символов может входить в последовательность $e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ip}$ не более одного раза. Например, множество S_1 состоит из двух символов 0 и e_1, множество S_2 – из четырех символов $0, e_1, e_2, e_1e_2$ множество S_2 – из восьми символов $0, e_1, e_2, e_1e_2, e_3, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3$. Множество S_n состоит из 2^n символов.

В канонической алгебре понятий L_n операция дизъюнкции определена следующим образом. Для любого элемента x с нулем дает в результате элемент x. Например, $0 \vee e_1e_2 = e_1e_2$, $e_2e_3e_4 \vee 0 = e_2e_3e_4$. Логическая сумма $z = x \vee y$ любых ненулевых элементов $x = e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ip}$ и $y = e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jp}$ формируется по следующему правилу: $z = e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{kr}$, где $\{e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{kr}\} = \{e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ip}\} \cup \{e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jp}\}$.

Для получения логической суммы $z = x \vee y$ по этому правилу нужно выбрать из обоих слагаемых $x = e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ip}$ и $y = e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jp}$ все входящие в них базисные символы $e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ip}$, $e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jp}$ и составить из них последовательность $z = e_{k1}e_{k2} \ldots e_{kr}$, не допуская в ней повторений базисных элементов и располагая базисные символы в порядке возрастания их номеров. Например, $e_4 \vee e_1 = e_1$, $e_1e_2 \vee e_1 = e_1e_2$, $e_2e_3 \vee e_1e_3e_4 = e_1e_2e_3e_4$.

Элементы множества S_n канонической алгебры понятий L_n можно естественным образом расположить в ряд. Начинаем этот ряд символом 0, после него помещаем символ e_1. Это – первый шаг, в результате которого получаем $2 = 2^1$ члена ряда. На втором шаге получаем еще два члена ряда, формируя их из членов ряда, полученных на первом шаге: 0 заменяем на символ e_2, а к символу e_1 дописываем справа символ e_2. В результате имеем уже 2^2 членов ряда: $0, e_1, e_2, e_1e_2$. На третьем шаге получаем еще 2^2 членов ряда, формируя их из элементов уже имеющегося отрезка ряда: 0 заменяем символом e_3, а остальные члены ряда получаем дописыванием справа символа e_3 к последующим членам уже имеющегося отрезка ряда. В результате имеем уже 2^3 членов ряда: $0, e_1, e_2, e_1e_2, e_3, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3$. Процесс построения ряда продолжаем аналогичным образом. На n-ом шаге формируем 2^{n-1} элементов, заменяя в уже имеющемся отрезке ряда 0 на символ e_n и дописывая справа символ e_n к остальным членам ряда. В результате получаем искомый ряд элементов множества S_n, состоящий из 2^n элементов.

Пронумеруем элементы множества S_n в том порядке, в каком они располагаются в построенном нами ряду. Нулевому символу присваиваем номер 0, элементу e_1 – номер 1 и т.д. От каждого элемента нетрудно перейти к его порядковому номеру. Для этого символ e_1 снабжен весовым коэффициентом 2^0, символ e_2 – коэффициентом 2^1, символ e_n – весовым коэффициентом 2^{n-1}. Тогда произвольному элементу $e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{ip}$ соответствует порядковый номер $2^{i1-1}+2^{i2-1}+...+2^{ip-1}$, представляющий собой сумму весовых коэффициентов всех символов, составляющих этот элемент. Например, элемент $e_2e_4e_7$ имеет номер

$$2^{2-1}+2^{4-1}+2^{7-1}=2+8+32=42.$$

Нетрудно также от заданного номера N перейти к соответствующему ему элементу множества S_n. Для этого нужно перевести число N в двоичный код $\sigma_n\sigma_{n-1}...\sigma_2\sigma_1$. Здесь $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}, \sigma_n$ – двоичные цифры 0 или 1. Элемент множества S_n с номером N строим по следующему правилу. Если в двоичном коде числа $N\sigma_i = 1$, $(i = 1, 2, ..., n)$, то символ e_i включается в последовательность $e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{ip}$, представляющую искомый элемент. Если же $\sigma_i = 0$, то символ e_i в составе элемента $e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{ip}$ не включается.

К примеру, отыщем элемент, соответствующий номеру 154. Переводя число 154 из десятичной системы в двоичную, получаем двоичный код 10011010. В нем единицы стоят на втором, четвертом, пятом и восьмом местах (считая справа налево). Искомый элемент имеет вид $e_2e_4e_5e_8$.

Важно отметить, что если какой-либо элемент принадлежит множеству S_i, то он принадлежит также и всем множествам $S_{i+1}, S_{i+2}, ...$ $(i = 1, 2, ...)$ большей размерности. Например, элемент e_1e_2, входящий в состав множества S_2, входит также и в множество S_3. Номер любого элемента остается одним и тем же вне зависимости от того, в составе какой алгебры L_i он рассматривается. Например, в алгебрах L_2 и L_3 элемент e_1e_2 имеет один и тот же номер 3. Логическая сумма $x \vee y$ любых двух слагаемых x и y (а также ее номер) будет одной и той же во всех алгебрах, где имеются элементы x, y и $x \vee y$. Все сказанное приводит к выводу, что при любых $i < j$ $(i, j \in \{1, 2...\})$ алгебра L_j является просто расширением алгебры L_i. Иначе говоря, алгебра L_i является подалгеброй алгебры L_j. Имеет место вложение любой канонической алгебры меньшей размерности. Поэтому можно иметь дело всего лишь с одной алгеброй понятий L_n, размерность n которой выбрана остаточно большой с таким расчетом, чтобы все нужные нам алгебры понятий оказались фрагментами алгебры L_n. Алгебру понятий L_n, обладающую таким свойством, назовем универсальной канонической алгеброй понятий.

Для примера в табл. 1 представлены значения операции дизъюнкции $x \vee y$ в алгебре L_3.

Таблица 1

Значения операции дизъюнкции в алгебре L_3

x \ y	0	e_1	e_2	e_1e_2	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
0	0	e_1	e_2	e_1e_2	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
e_1	e_1	e_1	e_1e_2	e_1e_2	e_1e_3	e_1e_3	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$
e_2	e_2	e_1e_2	e_2	e_1e_2	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
e_1e_2	e_1e_2	e_1e_2	e_1e_2	e_1e_2	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$
e_3	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
e_1e_3	e_1e_3	e_1e_3	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	e_1e_3	e_1e_3	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$
e_2e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$

Части таблицы, имеющие размер 2*2 и 4*4 ячейки, характеризуют операции дизъюнкции соответственно в алгебрах L_1 и L_2. Таблица имеет размер 8*8 ячеек. Достраивая таблицу до размера 16*16 ячеек, можно получить таблицу, задающую операции дизъюнкции понятий в алгебре L_4.

Переход от таблицы дизъюнкции понятий в алгебре L_i к таблице дизъюнкции понятий в алгебре L_{i+1} можно осуществить следующим способом.

1. Удваиваем вертикальный и горизонтальный размеры уже имеющейся таблицы, добавляя к ней снизу 2^i строк и справа 2^i столбцов.

2. Новые строки и столбцы помечаем элементами множества S_{i+1}, отсутствующими в множестве S_i. Располагаем эти элементы в порядке роста их номеров.

3. Ячейки верхней правой четверти таблицы заполняем, приписывая справа символ e_{i+1} к элементам, расположенным на соответствующих местах верхней левой четверти таблицы. Исключение составляет лишь верхняя левая ячейка, в которую следует занести символ e_{i+1}.

4. Остальные две четверти таблицы (нижнюю левую и нижнюю правую) заполняем точно также, как и верхнюю правую четверть таблицы.

2. Изоморфизм алгебр понятий

Рассмотренные в предыдущем параграфе канонические алгебры понятий являются конкретным случаем алгебры понятий. Теперь мы снова возвратимся к изучению алгебр понятий в абстрактном их понимании. Для обозначения n-мерных понятий алгебры L_n вводим формулы алгебры понятий L_n. Формулы будем строить из символов $0, e_1, e_2, ..., e_n$, обозначающих образующие понятия алгебры L_n, символа $\vee$, обозначающего операцию дизъюнкции алгебры L_n, и двух вспомогательных символов – скобок (и). Символы $0, e_1, e_2, ..., e_n$ будем называть образующими символами алгебры L_n, а символы $e_1, e_2, ..., e_n$ – базисными символами алгебры L_n. Любые конечные последовательности введенных символов будем называть выражениями алгебры L_n.

Понятие формулы определяем индуктивно с помощью порождающей процедуры, основанной на следующих двух правилах.

1. Все образующие символы называем формулами алгебры L_n.

2. Если выражения A и B – формулы алгебры L_n, то выражение $(A \vee B)$ называем формулой алгебры L_n. Будем считать, что формула $(A \vee B)$ обозначает понятие, получаемое в результате дизъюнкции понятий, обозначенных формулами A и B. Нетрудно видеть, что введенные формулы представляют собой графическое изображение всевозможных способов получения понятий в алгебре L_n. Из аксиомы n-мерности следует, что для каждого понятия алгебры L_n найдется хотя бы одна обозначающая его формула. Это означает, что язык формул логической алгебры L_n при любом $n \in \{1, 2, ...\}$ полон. Отметим, что выражения и формулы алгебры понятий L_n являются вместе с тем выражениями и формулами любых алгебр понятий L_{n+1}, $L_{n+2}, \ldots$ большей размерности.

Рассмотрим примеры образования формул алгебры понятий. Берем трехмерную алгебру понятий. В роли символов e_1, e_2, e_3 используем в ней буквы a, b, c. По правилу 1) образуем формулу $(0 \vee b)$, из формул c и $(0 \vee b)$ образуем формулу $(c \vee (0 \vee b))$, из формул $(0 \vee b)$ и b образуем формулу $((0 \vee b) \vee b)$, из формул $(c \vee (0 \vee b))$ и $((0 \vee b) \vee b)$ образуем формулу $((c \vee (0 \vee b)) \vee ((0 \vee b) \vee b))$. Итак, мы построили ряд все более удлиняющихся формул:

$$0,\ b,\ c,\ (0 \vee b),\ (c \vee (0 \vee b)),\ ((0 \vee b) \vee b),$$
$$((c \vee (0 \vee b)) \vee ((0 \vee b) \vee b)).$$

Формулы, обозначающие одно и то же понятие, назовем тождественными формулами. Из аксиомы ассоциативности следует, что все формулы, отличающиеся друг от друга лишь положением имеющихся в них скобок, тождественны. Например, формулы

$$((c \vee (0 \vee b)) \vee ((0 \vee b) \vee b)),$$
$$((((c \vee 0) \vee b) \vee 0) \vee (b \vee b)) \text{ и } ((c \vee 0) \vee (((b \vee 0) \vee b) \vee b))$$

тождественны друг другу. В связи с этим появляется возможность выбросить из формулы все скобки и записывать любые понятия в виде выражений более простых, чем формулы. Выражения, получаемые из формул исключением всех скобок, будем называть бесскобочными формами. Например, всем трем только что записанным формулам соответствует одна и та же бесскобочная форма $c \vee 0 \vee b \vee 0 \vee b \vee b$.

Далее, из аксиомы коммутативности вытекает возможность сузить класс бесскобочных форм для обозначения всех понятий, оставив лишь те из них, у которых образующие символы следуют в порядке $0, e_1, e_2, ..., e_n$. К примеру, одно и то же понятие, представленное тремя различными скобочными формами $c \vee 0 \vee b \vee 0 \vee b \vee b$, $b \vee b \vee 0 \vee b \vee 0 \vee c$, $0 \vee c \vee 0 \vee b \vee b \vee b$, можно записать единственной формой $0 \vee 0 \vee b \vee b \vee b \vee c$. Кроме того, основываясь на аксиоме идемпотентности, можно упростить запись понятия, оставляя в обозначающей ее бесснобочной форме лишь по одному вхождению образующего символа. Например, понятие, записанное в форме $0 \vee 0 \vee b \vee b \vee b \vee c$, можно представить более короткой бесскобочной формой $0 \vee b \vee c$. Наконец, из аксиомы нуля вытекает возможность еще большего упрощения представления понятий: из любой бесскобочной формы, кроме формулы 0, можно исключить символ 0, если он там имеется. К примеру, понятие, представленное формой $0 \vee b \vee c$, после выбрасывания из этой формы символа 0 запишется более экономной бесскобочной формой $b \vee c$.

Формулу 0 и все бесскобочные формы, в которые не входит символ 0, а базисные символы входят не более, чем по одному разу и расположены в порядке роста их номеров, будем называть стандартными формами понятий. Формулу 0 будем называть нулевой стандартной формой. Ниже приводится теорема о стандартной форме.

Теорема. Для каждого понятия алгебры L_n $n = (1, 2, ...)$ существует единственная стандартная форма.

Доказательство. *Существование.* Каждая ненулевая стандартная форма алгебры L_n имеет вид

$$e_{i1} \vee e_{i2} \vee ... \vee e_{ip},$$

где $i_1, i_2, ..., i_p \in \{1, 2, ..., n\}$, $i_1 < i_2 < i_p$, $p \le n$. Как было сказано ранее, для каждого понятия алгебры L_n найдется хотя бы одна обозначающая ее формула. Вместе с тем, только что было установлено, что для каждой формулы A алгебры понятий L_n существует стандартная форма, обозначающая то же понятие, что и формула A. Таким образом, понятие алгебры L_n можно представить в стандартной форме.

Единственность. Пусть $A = e_{i1} \vee e_{i2} \vee ... \vee e_{ip}$ - произвольно выбранная ненулевая стандартная форма. Множество

$$E_A = \{e_{i1} \vee e_{i2} \vee ... \vee e_{ip}\}$$

всех базисных символов, присутствующих в форме A назовем ядром ненулевой стандартной формы A. Ядром ненулевой стандартной формы 0 назовем пустое множество $\varnothing$. Ядро каждой стандартной формы является одним из подмножеств множества

$$B_n = \{e_1 \vee e_2 \vee ... \vee e_n\}.$$

Каждому подмножеству множества B_n соответствует своя стандартная форма. Таким образом, между стандартными формами и подмножествами множества B_n имеет место взаимное однозначное соответствие. Всего имеется 2^n подмножеств множества B_n. Следовательно, всего существует 2^n различных стандартных форм. С другой стороны, множество B_n состоит из 2^n различных понятий алгебры L_n. Таким образом, каждому понятию алгебры L_n соответствует единственная стандартная форма. Теорема доказана.

Выводы

В работе проанализированы множества элементов канонической алгебры понятий. Показано, что алгебра большей размерности является расширением алгебры меньшей размерности. Иначе говоря, алгебра меньшей размерности является подалгеброй алгебры большей размерности. Введены правила построения формул алгебр понятий и показано, что язык формул логической алгебры любой размерности полон. Доказана теорема о существовании и единственности стандартной формы алгебры понятий.

Список литературы

1. Голян Н.В. Алгебра понятий как формальный аппарат моделирования действий интеллекта над понятиями / Н.В. Голян, В.В. Голян, Л.Д. Самофалов // Системи управління, навігації та зв'язку. – П.: ПНТУ, 2016. – Вип. 3(39). – С. 38-41.

Надійшла до редколегії 30.09.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.В. Шостак, Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

ПРО ВЛАСТИВОСТІ КАНОНІЧНОЇ АЛГЕБРИ ПОНЯТЬ

Н.В. Голян

У роботі проаналізована множина елементів канонічної алгебри понять. Показано, що алгебра більшої розмірності є розширенням алгебри меншої розмірності. Введені правила побудови формул алгебри понять і показано, що мова формул логічної алгебри будь-якої розмірності повна. Доведена теорема про існування і єдиність стандартної форми алгебри понять.

Ключові слова: *алгебра скінченних предикатів, алгебра понять, канонічна алгебра, стандартна форма.*

ABOUT PROPERTIES OF CANONICAL CONCEPTS ALGEBRA

N.V. Golian

The concepts canonical algebra elements sets are in-process analysed. It is shown that algebra of greater dimension is expansion of algebra of less dimension. The concepts algebras formulas construction rules are entered. It is shown that any dimension concepts algebra formulas language is full. A theorem about concepts algebra standard form existence and unicity is well-proven.

Keywords: *finite predicates algebra, algebra of concepts, canonical algebra, standard form.*