УДК 510.635

И.А. Лещинская

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

О СВОЙСТВАХ ПРЕДИКАТА РАВЕНСТВА ПОНЯТИЙ

В работе развивается алгебра понятий. Найдены и доказаны свойства предиката равенства понятий. Эти свойства проанализированы с точки зрения практического применения для идентификации интеллектуальной деятельности человека.

Ключевые слова: *алгебра конечных предикатов, алгебра понятий, интеллект, высказывание.*

Введение

В работе [1] был рассмотрен абстрактный эквивалент алгебры конечных предикатов - алгебра понятий. С помощью алгебры понятий формально описываются закономерности интеллектуальной деятельности человека. Это сложный объект для идентификации, поскольку интеллектуальная деятельность человека субъективна. Восприятие, понимание, мысли, образы, формируемые интеллектом человека, надо формализовать на основе объективных научных методов. Обсуждаются требования к экспериментам с испытуемым – однозначность, повторяемость; к подбору физических сигналов, выполняющих роль имен понятий, информационной подготовке испытуемого, обеспечению учета контекста эксперимента. Введен предикат равенства понятий и проанализирована его роль в механизме интеллекта.

В статье развивается алгебра понятий. Найдены и доказаны свойства предиката равенства понятий. Эти свойства проанализированы с точки зрения практического применения для идентификации интеллектуальной деятельности человека.

1. Свойства предиката равенства понятий

Найдем свойства предиката D_k, введенного в [1]. Предикат D_k подчиняется закону рефлексивности: для $\forall P \in M_k$ $D_k(P, P) = 1$. Действительно, согласно определению (1) из [1], для каждого предиката $P \in M_k$ имеем:

$$D_k(P, P) = \forall x\ (P\ (x) \sim P\ (x)) = \forall x\ (1) = 1 .$$

Предикат D_k подчиняется также закону, который называют законом подстановки: для $\forall P, Q \in M_k$, если $R(P) = 1$ и $D_k(P, Q) = 1$, то $R(Q) = 1$. Здесь $R(P)$ - произвольно выбранный предикат, заданный на множестве предикатов M_k.

Доказательство закона подстановочности: если $P, Q \in M_k$ таковы, что $P = Q$, то

$$R(P) \wedge D_k(P,Q) \supset R(Q) = R(P) \wedge D_k(P,P) \supset$$
$$\supset R(P) = R(P) \cdot 1 \supset R(P) = R(P) \supset R(P) = 1.$$

Если же $P \neq Q$, то

$$R\ (P) \wedge D_k(P,\ Q) \supset R\ (Q) = R\ (P) \wedge \forall x(P(x) \sim$$
$$\sim Q(x)) \supset R\ (Q) = R\ (P) \cdot 0 \supset R\ (Q) = 0 \supset R\ (Q) = 1.$$

Предикат D_k удовлетворяет закону симметричности: для $\forall P, Q \in M_k$ если $D_k(P,Q) = 1$, то $D_k(Q,P) = 1$. Действительно,

$$D_k(P,Q) \supset D_k(Q,P) = \forall x(P(x) \sim Q(x)) \supset \forall x(Q(x) \sim$$
$$\sim P(x)) = \forall x(P(x) \sim Q(x)) \supset \forall x(P(x) \sim Q(x)) = 1.$$

Предикат D_k подчиняется закону транзитивности: для $\forall P, Q, R \in M_k$ если

$$D_k(P,Q) = D_k(Q,R) = 1,$$

то $D_k(P,R) = 1$. В самом деле, для $\forall P, Q, R \in M_k$ по закону подстановочности выводим:

если $R(Q){=}D_k(P,R) = 1$ и $D_k(Q,R) = 1$, то $R(P){=}D_k(P,R) = 1$.

Предикат равенства идей D_k подчиняется закону рефлексивности: для $\forall x \in S_k$ имеет место равенство $D_k(x,x) = 1$. Действительно, согласно определению (2) из [1], имеем:

$$D_k(x,x) = D_k(\Phi(x), \Phi(x)) = 1 .$$

Предикат D_k подчиняется также закону подстановочности: для любого предиката R, заданного на множестве S_k, и для $\forall x, y \in S_k$ если $R(x) = 1$ и $D_k(x,y) = 1$, то $R(y) = 1$. В самом деле, пусть

$$P = \Phi(x),\ Q = \Phi(y),\ R(P) = R(\Phi^{-1}(P)),$$
$$D_k(P,Q) = D_k(\Phi^{-1}(P), \Phi^{-1}(Q)) .$$

Тогда по закону подстановочности предиката равенства предикатов имеем: $R(P) = 1$ и $D_k(P,Q) = 1$ влечет $R(Q) = 1$. Иными словами, $R(\Phi^{-1}(P)) = 1$ и $D_k(\Phi^{-1}(P), \Phi^{-1}(Q))$ влечет $R(\Phi^{-1}(Q)) = 1$. Учитывая, что $\Phi^{-1}(P) = x$, $\Phi^{-1}(Q) = y$, приходим к закону подстановочности

© И.А. Лещинская

для предиката равенства идей. Аналогично выводятся для предиката D_k закон симметричности: для $\forall x, y \in S_k$ если $D_k(x,y)=1$, то $D_k(y,x)=1$, и закон транзитивности: для $\forall x, y, z \in S_k$ если $D_k(x,y)=D_k(y,z)=1$, то $D_k(x,z)=1$.

2. Экспериментальная проверка свойств предиката равенства понятий

Сначала рассмотрим психологическую интерпретацию закона симметричности. В содержательной формулировке закон симметричности гласит: если испытуемый признал понятия x и y идентичными, то он обязательно признает идентичными также и понятия y и x. Мы затрудняемся привести какой-нибудь конкретный случай, в котором при ясном и четком восприятии двух понятий и при выполнении условия повторяемости результат сравнения понятий зависел бы от того, в каком порядке они предъявлены человеку. Таким образом, факты, которые бы опровергали закон симметричности, не удается обнаружить. Из закона симметричности следует, что области задания для переменных x и y предиката $D_k(x,y)$ совпадают, а это означает, что множество T, на котором определен предикат D_k, можно представить, причем единственным образом, в виде декартова квадрата некоторого множества Q, т.е. $T=Q\times Q$. Множество Q мы примем в роли носителя алгебры понятий S_k.

Несколько сложнее будет обстоять дело с выполнением закона симметричности, если мы захотим распространить термин «понятие» не только на мысли, но и на ощущения. Известны такие опыты из области психофизики ощущений, которые, казалось бы, опровергают закон симметричности для предиката D_k. Опишем один из таких опытов. Испытуемому предъявляются два коротких звука, имеющих специально подобранные спектры и следующих друг за другом с секундным интервалом. Предлагается установить, равны ли они по громкости. Для тех случаев, когда громкости оказываются одинаковыми, звуки меняют местами и снова предъявляют испытуемому. Оказывается, что теперь первый звук слышится громче, чем второй.

Описанный эффект, однако, легко объясняется маскирующим действием первого звука на второй, снижающим слышимую громкость последнего. Стало быть, здесь мы имеем неконтролируемый побочный фактор, нарушающий условие повторяемости. Громкость одного и того же физического звука меняется в зависимости от наличия или отсутствия предшествующего звука. К закону симметричности это не имеет никакого отношения.

Переходим к психологической интерпретации закона рефлексивности. В содержательной формулировке закон рефлексивности гласит: равные понятия должны восприниматься испытуемым как равные. Иными словами, на равные понятия испытуемый всегда должен реагировать положительным ответом. В такой формулировке закон рефлексивности выглядит как довольно бессодержательное утверждение. Действительно, если с самого начала два понятия принимаются равными, то как они после этого могут оказаться неравными? И все же, в законе рефлексивности содержится нечто такое, что требует экспериментального подтверждения. Дело в том, что понятия фактически могут быть равными, однако испытуемый недоброкачественно их проанализирует и в результате вместо положительного выработает отрицательный ответ.

Закон рефлексивности, по существу, представляет собой требование корректности проведения эксперимента: при выработке двоичного ответа, сигнализирующего о равенстве или неравенстве понятий, испытуемый не должен ошибиться. При фактическом равенстве понятий он обязан отреагировать положительным ответом. Ясно, что из-за невнимательности или по злому умыслу испытуемый это требование вполне может нарушить. Отметим, что закон рефлексивности весьма близок к закону тождества, который рассматривается в курсах формальной логики. Закон тождества требует, чтобы в процессе рассуждения все понятия оставались равными самим себе, нельзя производить подмены понятий. Закон тождества в формальной логике расценивается как одно из важнейших требований, без выполнения которого интеллектуальная деятельность человека становится невозможной.

Рассмотрим, далее, психологическую интерпретацию закона транзитивности. В содержательной формулировке закон транзитивности гласит: если для некоторого испытуемого понятие x равно понятию y, а понятие y равно понятию z, то понятие x тем же испытуемым должно восприниматься как равное понятию z. В применении к смыслам фраз закон транзитивности выполняется на практике безупречно. Когда люди замечают, что кто-то из них нарушает закон транзитивности, то это неизменно квалифицируется ими как сбой в мыслительной деятельности. В практике математических доказательств встречаются длинные ряды равносильных друг другу высказываний, и при этом всегда оказывается, что первое высказывание в ряду равносильно последнему. Если же это не так, то всегда может быть обнаружена ошибка в доказательстве.

Несколько сложнее обстоит дело с выполнением закона транзитивности в случае с ощущениями. Известен следующий опыт, который обычно приводится для опровержения закона транзитивности.

Испытуемому предъявляется световое излучение красного цвета определенной мощности. К красному цвету предлагается подравнять по видимой яркости (светлоте) оранжевый цвет путем регулирования мощности вызывающего его светового излучения. Далее, к оранжевому цвету подравнивается по светлоте желтый цвет, а затем то же самое проделывается с салатным, зеленым, лазурным, голубым, синим, фиолетовым и сиреневым цветами. Наконец, к сиреневому цвету подравнивается по светлоте исходный красный цвет. В итоге оказывается, что мощность исходного светового излучения, как правило, не совпадает с мощностью излучения, полученного в конце процесса подравнивания.

Опровергает ли этот опыт закон транзитивности? Мы полагаем, что нет. Если описанный опыт выполнить многократно с одними и теми же цветами и одной и той же исходной мощностью излучения, то результирующая мощность светового излучения не получается в разных опытах одной и той же, но меняется случайным образом от опыта к опыту. При этом она колеблется вокруг первоначальной мощности излучения, то приближаясь к ней, то удаляясь от нее в сторону увеличения или уменьшения. И чем больше опытов проведено, тем более среднее значение результирующей мощности, вычисленное по всем опытам, будет приближаться к исходной мощности светового излучения. Этот факт можно истолковать таким образом, что светлота световых излучений, предъявляемых испытуемому, не остается стабильной и испытывает небольшие случайные колебания. При движении по длинному ряду цветов эти колебания светлоты накапливаются (опять-таки случайным образом), и в результате появляется заметное различие начальной и конечной светлот. Так что в этом и в любых других подобных опытах нарушается не закон транзитивности, а условие повторяемости.

Переходим к психологической интерпретации закона подстановочности. В содержательной формулировке закон подстановочности гласит: если какое-нибудь понятие x для некоторого испытуемого обладает свойством R_k, то тем же свойством для этого испытуемого будет обладать и любое понятие y, равное понятию x. Рассмотрим пример, иллюстрирующий содержание закона подстановочности. Предикат $R_k(x)$ задаем условием «Из высказывания x логически следует высказывание «Идет дождь»». В роли x берем смысл высказывания «Идет дождь, и светит солнце», в роли y - смысл высказывания «Светит солнце, и идет дождь». Последние два высказывания логически равносильны, так что $x = y$. Производя подстановку в исходное условие вместо x высказывания «Идет дождь, и светит солнце», получаем тавтологию «Из высказывания «Идет дождь, и светит солнце» логически следует высказывание «Идет дождь»», при этом $R_k(x) = 1$. Заменяя в исходном условии x на y и подставляя вместо y высказывание «Светит солнце, и идет дождь», получаем высказывание «Из высказывания «Светит солнце, и идет дождь» логически следует высказывание «Идет дождь»». В строгом соответствии с требованием закона подстановочности оно также является тавтологией, при этом $R_k(x) = 1$.

Как в повседневной речи, так и особенно в математике люди постоянно пользуются законом подстановочности, и нет никаких свидетельств, чтобы это приводило к каким-либо сбоям в мышлении. Отметим, что закон подстановочности родственен правилу подстановки, которое рассматривается в курсах исчисления высказываний. Это правило формулируют следующим образом: «Пусть A - формула, содержащая букву A. Тогда, если A - истинная формула в исчислении высказываний, то, заменяя в ней букву A всюду, где она входит, произвольной формулой B, мы также получим истинную формулу».

Множество S_k можно образовать только из имен понятий. Но одно и то же понятие можно представить в виде различных по виду, но тождественных по смыслу высказываний. Таким образом, в зависимости от выбора способа обозначения одних и тех же понятий, мы приходим к тому или иному множеству высказываний. Поэтому и предикаты равенства понятий получаются разными. Более точно можно сказать, что предикат равенства понятий задается единственным образом с точностью до обозначений или изоморфизма. Изоморфизм моделей $\langle S'_k, D'_k \rangle$ и $\langle S''_k, D''_k \rangle$ означает, что существует биекция

$$\Omega : S'_k \to S''_k ,$$

для которой предикат D'_k совпадет с предикатом D''_k.

3. Операции над понятиями

Для дальнейшего развития алгебры понятий необходимо ввести достаточный набор операций над понятиями. Для экспериментальной работы с испытуемым и формализации его понятий введем операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и следования.

Операции практически реализуются соответствующими предикатами.

Операцию отрицания понятий зададим с помощью бинарного предиката $OTP(x, y)$, определенного на множестве $S_k \times S_k$. Его значения определяются правилом:

$$\text{ОТР}(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y=\bar{x}, \\ 0, \text{ если } y \neq \bar{x}. \end{cases}$$

Операцию конъюнкции понятий вводим с помощью тернарного предиката $\text{КОН}(x, y, z)$, определенного на множестве $S_k \times S_k \times S_k$.

Его значения определяются правилом:

$$\text{КОН}(x, y, z) = \begin{cases} 1, \text{ если } z=x \wedge y, \\ 0, \text{ если } z \neq x \wedge y. \end{cases}$$

Операцию дизъюнкции понятий задаем с помощью тернарного предиката $\text{ДИЗ}(x, y, z)$, определенного на множестве $S_k \times S_k \times S_k$. Его значения определяются правилом:

$$\text{ДИЗ}(x, y, z) = \begin{cases} 1, \text{ если } z=x \vee y, \\ 0, \text{ если } z \neq x \vee y. \end{cases}$$

Говоря о переменных, мы обязаны ввести их области определения. Т.е. существуют конечный универсум переменных $B = \{x_1, x_2,.., x_n\}$ и конечный универсум букв $A = \{a_1, a_2,...a_k\}$, на котором заданы переменные из B. Предполагается, что множества A и B настолько обширны и неопределенны, что в них содержатся все нужные нам буквы и переменные. Поэтому при практическом задании конкретных моделей множества A и B остаются как бы за кадром, они присутствуют лишь потенциально.

Именно благодаря их существованию мы можем ввести буквы $a_1, a_2, ... \in A$ и переменные $x_1, x_2, ... \in B$ и оперировать ими.

Под буквами множества A будем понимать понятия, которые могут быть предъявлены исследователем испытуемому в процессе изучения закономерностей его интеллектуальной деятельности. Будем предполагать, что число k понятий, содержащихся в множестве A, достаточно велико, а их состав достаточно разнообразен.

Сказанное означает, что каждый исследователь, вне зависимости от степени обширности и сложности решаемых им задач, всегда найдет в множестве A любые понятия, нужные ему для работы с испытуемым. Напомним, что под понятиями понимаются лишь субъективные состояния испытуемого, в роли которых могут выступать ощущения, восприятия, представления, мысли, эмоции, намерения.

Кроме того, нуждается в пояснении запись предиката D в виде $D(x_1, y_2)$, где указаны только две переменные x_1, x_2, а не все те переменные $x_1, x_2,.., x_n$, которые содержатся в универсуме B.

Запись $D(x_1, y_2)$, в отличие от записи $D(x_1, x_2,.., x_n)$, не полная, а сокращенная, в ней несущественные переменные не указаны. Несущественными будем считать те из переменных $x_1, x_2,.., x_n$, от значений которых значение предиката $D(x_1, x_2,.., x_n)$ не зависит.

Необходимость такой записи определяется невозможностью перечислить все переменные $x_1, x_2,.., x_n$.

Выводы

В работе развивается формальный аппарат для описания закономерностей интеллектуальной деятельности человека - алгебра понятий. Это абстрактный эквивалент алгебры конечных предикатов.

Основной инструмент метода сравнения в алгебре понятий для изучения интеллекта человека - предикат равенства понятий.

В работе проанализированы свойства предиката равенства понятий и особенности их применения для формализации понятий.

Список литературы

1. *Лещинский В.А. О теоремах исчисления высказываний / В.А. Лещинский // Системи обробки інформації. — 2016. — № 9. — С. 97-100.*
2. *Лещинский В.А. О формульном описании переменных сложных высказываний / В.А. Лещинский, И.А. Лещинская // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. — 2016. — № 3. — С. 92-95.*

Надійшла до редколегії 26.12.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.В. Шостак, Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

О СВОЙСТВАХ ПРЕДИКАТА РАВЕНСТВА ПОНЯТИЙ

І.О. Лещинська

У роботі розвивається алгебра понять. Знайдені і доведені властивості предиката рівності понять. Ці властивості проаналізовані з точки зору практичного застосування для ідентифікації інтелектуальної діяльності людини.

***Ключові слова:** алгебра скінченних предикатів, алгебра понять, інтелект, висловлювання.*

О СВОЙСТВАХ ПРЕДИКАТА РАВЕНСТВА ПОНЯТИЙ

I.O. Leshchynska

Algebra of concepts develops in-process. The properties of concepts equality predicate are found and well-proven. These properties are analyzed from the point of view of practical application for authentication of intellectual activity of man.

***Keywords:** finite predicates algebra, algebra of concepts, intellect, utterance.*