Математичні моделі та методи

УДК 621.396.26

Ю.Н. Корж, А.И. Тыртышников, М.А. Маврина, В.Н. Курчанов

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Украина

ОСОБЕННОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИЗВЕСТНЫМ ТРЕНДОМ

В статье рассмотрены особенности моделирования нестационарных случайных процессов с участками различными по величине и скорости изменения дисперсии. Показано, что непосредственный расчёт корреляционной матрицы по реализациям равносилен произведению нормированной корреляционной функции, которая может быть априорно известна, и тренда. Результаты моделирования показали также адаптацию значений весовых коэффициентов прогнозирующего фильтра к величине и знаку градиента дисперсии.

Ключевые слова: *цифровой фильтр, ошибка предсказания, нестационарный случайный коррелированный процесс.*

Введение

Задача прогнозирования случайных процессов (СП) в настоящее время является актуальной и находит широкое применение в различных технических системах [1 – 3].

Оценка отсчётов коррелированного СП осуществляется фильтрами предсказания (прогнозирующими фильтрами, фильтрами предикторами) [1,2] которые, используя статистическую связь отсчётов, позволяют посредством весового суммирования получить с приемлемой точностью оценку требуемого параметра.

Такие фильтры – это неотъемлемая составляющая оборудования радиоэлектронных систем различного назначения: адаптивных антенных и акустических решеток; компенсаторов сигналов электрического эха в системах проводной связи; компенсаторов сигналов акустического эха в системах голосовой связи; эквалайзеров каналов связи в модемах; компенсаторов шумов; стабилизаторов напряжения в блоках питания.

Эффективность функционирования (длительность переходного процесса, уровень ошибок в установившемся режиме) устройств зависит от алгоритма, лежащего в основе используемого фильтра. Основной показатель качества фильтра предсказания – среднеквадратичная ошибка предсказания σ_e.

Линейное предсказание текущего значения отсчёта $y(n)$ – это вычислительная процедура, позволяющая по некоторой линейной комбинации предшествующих взвешенных отсчетов СП оценить это значение.

Линейный предиктор дает оптимальное по критерию минимума σ_e предсказание только для стационарных случайных процессов (ССП). В данной статье рассматриваются процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем.

Случайный процесс с дискретным временем называют стационарным, если распределение величин Y_{t1}, Y_{t2},…, Y_{tn} совпадает с распределением Y_{t1+t}, Y_{t2+t},…, Y_{tn+t} для любого конечного множества целых чисел $\{t_1,…t_n\}$ и любого целого t [3]. Случайная функция $X(t)$ называется *стационарной в широком смысле*, если ее математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов t_1 и t_2: $R[x(t_1,t_2)] = R[x(\tau)]$, где $\tau = t_2 - t_1$. Случайная функция X(t) называется стационарной в узком смысле, если ее n-мерный закон распределения при любом n зависит только от интервалов t_2-t_1, и совсем не зависит от положения этих интервалов в области изменения аргумента t. В практических задачах обычно применяют понятие стационарной функции в широком смысле [8].

Если характеристики ССП (математическое ожидание, дисперсия и пр.) удалось, с заданной степенью точности найти, то задача прогноза становится достаточно простой.

Одним из важнейших свойств ССП является эргодичность, состоящая в том, что каждая отдельная реализация СП является как бы полномочным представителем всей совокупности возможных реализаций, что позволяет по одной реализации находить все необходимые характеристики СП. Понятно, что оценки этих величин с увеличением размера выборки будут только улучшаться и приближаться к их истинным значениям.

К нестационарным относятся все СП, не обладающие свойства стационарности хотя бы в широком смысле. Характеристики нестационарного случайного процесса (НСП) в общем случае представляют собой некоторые функции времени, определить которые можно только осреднением по ансамблю реализаций, образующих процесс. В практических задачах часто представляется невозможным получить достаточно большое число реализаций для отыскания характеристик процесса с необходимой достоверностью. Исключением можно считать периодическое повторение реализаций, например отражённые от подстилающей поверхности эхо-сигналы в РЛС кругового обзора или переходные процессы в любой динамической системе при включении и выключении радиоэлектронной аппаратуры.

Во многих случаях в классе нестационарных процессов, соответствующих реальным физическим явлениям, можно выделить особые типы нестационарности, для которых задача оценивания и анализа упрощается. Например, некоторые случайные явления описываются НСП $\{Y(t)\}$, каждая реализация которого имеет вид $Y(t)=A(t)X(t)$, где X(t) – реализация ССП $\{X(t)\}$, $A(t)$ – детерминированный множитель. Процессы такого типа имеют общий детерминированный тренд. Если нестационарный процесс соответствует конкретной модели такого типа, то для его описания нет необходимости производить осреднение по ансамблю: любые требуемые характеристики можно оценить по одной реализации, как и для эргодических процессов.

По своей природе ССП проще, чем нестационарные СП, и описываются более простыми характеристиками. Линейные преобразования ССП также обычно осуществляются проще, чем нестационарных.

Поэтому большинство известных нерекурсивных и рекурсивных алгоритмов используемых в фильтрах предсказания ориентировано на оценивание ССП. Простые градиентные алгоритмы, (Least Mean Squares, LMS) как правило, используются при аппаратной реализации адаптивных фильтров. Сложные RLS (Recursive Least Squares) и FAP (Fast Affine Projections) – алгоритмы в основном ориентированы на программную реализацию [2].

На практике большинство процессов являются нестационарными и получение оптимальных оценок усложняется. Это связано с тем, что, как правило, априори неизвестны характер нестационарности и закон её изменения во времени.

Существующие способы: сведения (НСП) к стационарному за счёт низкочастотной фильтрации [5]; разбитие на участки стационарности; выделение тренда среднего фильтровыми или регрессионными методами с последующим определением характера нестационарности (быстрая, медленная) [7] требуют анализа индивидуальных характеристик конкретного процесса.

Целью данной работы является разработка предложений по уменьшению ошибки прогноза отсчётов дискретного НСП. Эта задача решается путём упрощения и повышения точности расчёта корреляционной матрицы для априори известного или определяемого в наблюдениях тренда.

Расчёт весового вектора прогнозирующего фильтра для НСП

Оценка $\hat{\dot{y}}(n)$ n-го отсчёта НСП в прогнозирующем фильтре формируется после линейного весового суммирования его предыдущих *N* значений.

Соответственно

$$\hat{\dot{y}}(n) = \sum_{k=1}^{N} \dot{y}(n-k)w(n)_k , \qquad (1)$$

где $w(n)_k$ – весовые коэффициенты фильтра, которые в общем случае зависят от номера отсчёта.

В матрично-векторной форме выражение (1) можно записать в виде

$$\hat{\dot{y}}(nT) = \dot{Y}^T(n)\dot{\mathbf{W}}(n) , \qquad (2)$$

где $\dot{Y}^T(n) = \|y[(n-1)], y[(n-2)],\dots, y[(n-N)]\|$; $\dot{\mathbf{W}}(n)^T = \|w(n)_1, w(n)_2, \dots, w(n)_N\|$ – вектор-столбцы входных отсчётов и весовых коэффициентов фильтра соответственно.

Здесь и далее верхний индекс T обозначает транспонирование вектора.

В свою очередь, ошибка оценивания определяется как

$$e(n) = \dot{y}(n) - \dot{Y}^T(n)\dot{\mathbf{W}}(n) . \qquad (3)$$

Соответственно дисперсия ошибки оценивания

$$\begin{aligned}\sigma_e^2(n) &= \langle e^2(n)\rangle = \langle \dot{y}(n)\dot{y}(n)^*\rangle - \\ &-2\dot{\mathbf{W}}(n)^T\langle \dot{y}(n)\dot{Y}(n)\rangle + \\ &+\dot{\mathbf{W}}(n)^T\langle \dot{Y}^*(n)\dot{Y}^T(n)\rangle\dot{\mathbf{W}}(n).\end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь: <·>, * - операции статистического усреднения по ансамблю реализаций и комплексного сопряжения соответственно.

Соответственно $\sigma(n)_п^2 = \langle \dot{y}(n)\dot{y}(n)^*\rangle$ – дисперсия СП; $\dot{\mathbf{P}}(n)^T = \langle \dot{y}(n)\dot{\mathbf{U}}^T(n)\rangle$ – вектор-столбец взаимных ковариаций между оцениваемым отсчётом и отсчётами, которые подвергаются весовому суммированию; $\mathbf{\Phi}(n)_п = \langle \dot{Y}(n)^* \dot{Y}(n)^T\rangle$ – автоковариационная матрица (АКМ) СП.

Из уравнения $\partial y(n)_e^2/\partial\dot{\mathbf{W}}(n)^T = 0$ можно определить весовой вектор, обеспечивающий минимальную дисперсию ошибки предсказания.

Дифференцируя (4) по $\dot{\mathbf{W}}(n)^T$, получаем [1]

$$\dot{\mathbf{W}}(n)^T_{опт} = \mathbf{Ц}(n)_п^{-1}\dot{\mathbf{P}}(n) . \qquad (5)$$

Следует отметить, что весовые коэффициенты фильтра предсказания для НСП определяются АКМ, которая изменяется во времени. Таким образом, возможно ожидать существенного изменения весового вектора для различных временных интервалов НСП.

Имитационная модель НСП

Введение формирующего фильтра для НСП имеет еще большее значение, чем для стационарных процессов, так как при этом представляется возможным решение задач анализа на имитационной модели. Это важное обстоятельство, так как системы с переменными параметрами не поддаются точным аналитическим расчетам [5].

Анализ по ансамблю реализаций соответствует принятию априорной модели НСП, так как только путем усреднения по множеству можно получить ту или иную функцию времени – текущую статистическую характеристику СП.

Для формирования квадратурных компонент коррелированных отсчётов ССП $y(n)$ использовалась имитационная модель дискретного СП скользящего среднего порядка q. Реализация модели осуществлялась в программе MathCad. Косинусные и синусные компоненты – мгновенные значения отсчётов СП вычисляются в выражении

$$y(n)^{C(S)} = \sum_{k=0}^{q} d_k Z_{k+жn}^{C(S)}, \qquad (6)$$

где $d_k = e^{-2\pi(k-\frac{q}{2})^2}$ – весовые коэффициенты формирующего фильтра в соответствующих точках отсчета $k = 0..q$; Z_i – независимые случайные гауссовские величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Значение ζ определяет степень статистической взаимосвязи отсчётов процесса, т.е. корреляционной функции

$$R(ф) = R(0)e^{-(\tau/\tau_k)^2}, \qquad (7)$$

где τ_k – интервал (коэффициент) корреляции.

Таким образом, генерируются отсчёты ССП с постоянной дисперсией и нулевым математическим ожиданием. Соответствие параметров имитационной модели ожидаемым характеристикам подтверждается графиками рис. 1, на котором приведены расчётные (обработка ансамбля реализаций) и теоретические, полученные по формуле (7) зависимости нормированной корреляционной функции СП $\rho(\tau) = R(\tau)/R(0)$.

В данном примере для расчета по формуле $ф_k = \int_0^\infty \rho(\tau)d\tau$ интервал корреляции составляет 10,05 Δ, где Δ – период дискретизации цифрового фильтра.

С приемлемой точностью τ_k так же можно определять и графически по уровню 0,5 (см. рис 1). Для этого же примера, максимальная относительная погрешность расчётного значения ρ(τ) при усреднении по $5{\cdot}10^3$ реализациям не превышает единиц процента.

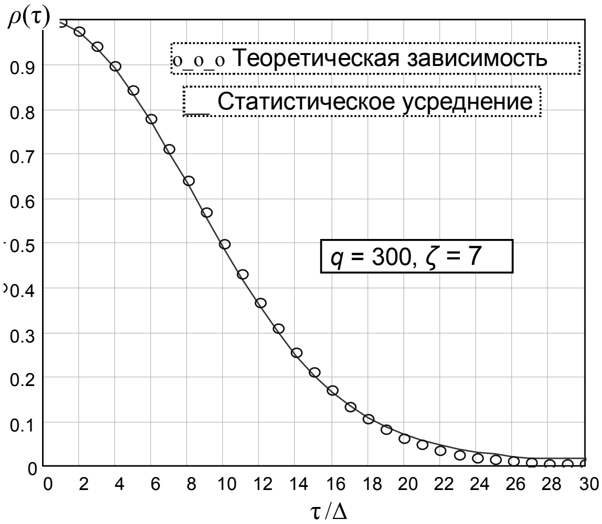

Рис. 1. Расчётная и теоретическая нормированные корреляционные функции ССП

На рис. 2 приведены несколько реализаций модульного значения ССП с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 30 db, нормированных по единичному уровню спектральной плотности собственных шумов, и интервалом корреляции 10Δ по уровню 0,5 $\rho(\tau)$.

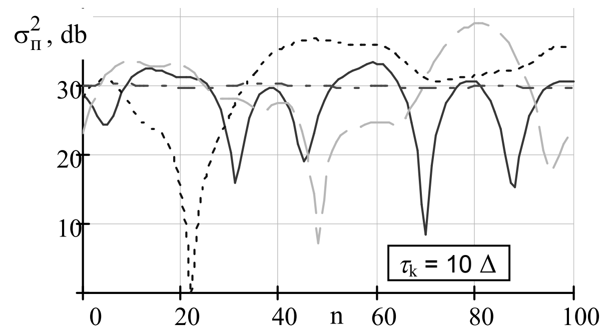

Рис. 2. Реализации ССП

При моделировании НСП учитывался тот факт, что зависимость математического ожидания от времени не является признаком нестационарности, так как всегда можно перейти к центрированной случайной функции, для которой математическое ожидание тождественно равно нулю и СП можно изучать как стационарный.

Таким образом, в качестве модели нестационарного процесса применялся СП с нулевым математическим ожиданием и дисперсией зависящей от времени.

Для формирования реализаций нестационарного по дисперсии СП использовалось ступенчатое, начиная с некоторого отсчёта, изменение уровня мощности Z_i. В результате, согласно (6) формирующий фильтр генерирует отсчёты НСП, реализации которого приведены на рис. 3. Интервал корреляции, который можно определить на участках стационарности, как и для ССП составляет 10Δ.

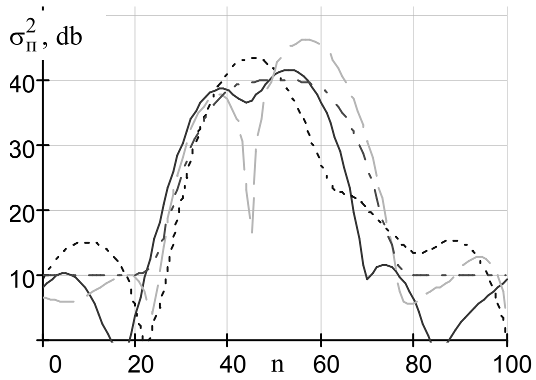

Рис. 3. Реализации НСП

На последующем рис. 4 представлен график закономерной зависимости дисперсии от времени – номера отсчёта.

График получен в результате статистического усреднения 10^4 реализаций. Имитационная модель позволяет изменять значение мощности СП в произвольные моменты времени за счёт стекового объединения Z_i. Модель позволяет также менять и одну из важных характеристик НСП – скорость изменения дисперсии НСП, значения модуля которой на участках возрастания и убывания в размерности db/Δ приведены на рис. 4.

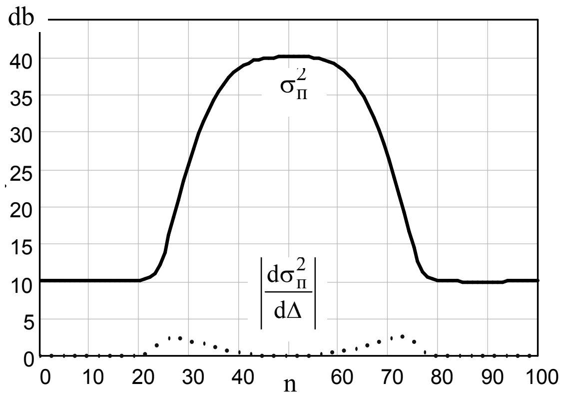

Рис. 4. Зависимость дисперсии НСП от номера отсчёта

Основные результаты исследований

Для оценки точности прогнозирования НСП необходимо рассчитывать весовой вектор по формуле (5) с дальнейшим определением ошибки оценивания по выражению (3).

Основная проблема обработки НСП состоит в трудности получения статистических характеристик по множеству реализаций, так как в большинстве случаев СП наблюдается одной реализацией, в лучшем случае, с известным трендом. Следует отметить также, что для многих СП априори известна нормированная корреляционная функция. В данной модели имеется возможность многократной прогонки с формированием ансамбля реализаций достаточного для расчёта компонент АКМ с удовлетворительной точностью.

Но точнее и с меньшим количеством операций компоненты АКМ можно вычислять как произведение нормированной корреляционной функции и закономерной зависимости дисперсии (тренда) по формуле

$$\varphi(i,j) = \rho|(i-j)|\ \sigma(j)^2. \qquad (8)$$

На рис. 5 показана зависимость компонент АКМ нестационарного по дисперсии СП с τ_k = 7Δ.

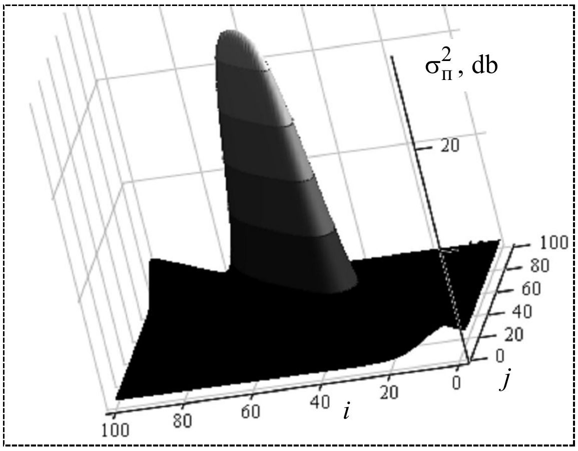

Рис. 5. Корреляционная функция НСП с участками возрастания и убывания дисперсии

На рис. 6 приведена зависимость весовых коэффициентов фильтра предсказания восьмого порядка от номера отсчёта для тех же параметров НСП.

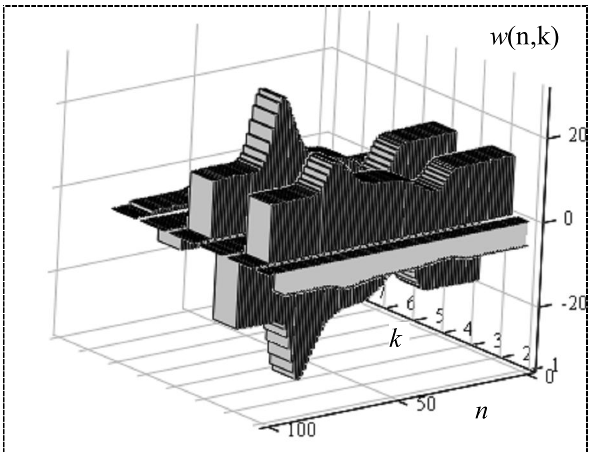

Рис. 6. Весовые коэффициенты фильтра предсказания для НСП с участками возрастания и убывания дисперсии

Можно отметить адаптацию значений весовых коэффициентов к изменению дисперсии: на участке возрастания (положительный градиент дисперсии) все веса убывают, на участке убывания (отрицательный градиент) наоборот значения коэффициентов возрастают.

Значения ошибки предсказания, для фильтров различных порядков, рассчитанной по формуле (3) и нормированной по дисперсии СП показаны на рис. 7. Усреднение проводилось по $5 \cdot 10^3$ реализациям, $\tau_k = 7{,}5\Delta$. Можно отметить, что максимальная ошибка возникает на участке с максимальным градиентом дисперсии для фильтров всех порядков. Видно, что начиная с 5-6 порядка фильтра, точность оценивания практически не изменяется.

Эти зависимости приведены для НСП с участком только возрастания дисперсии.

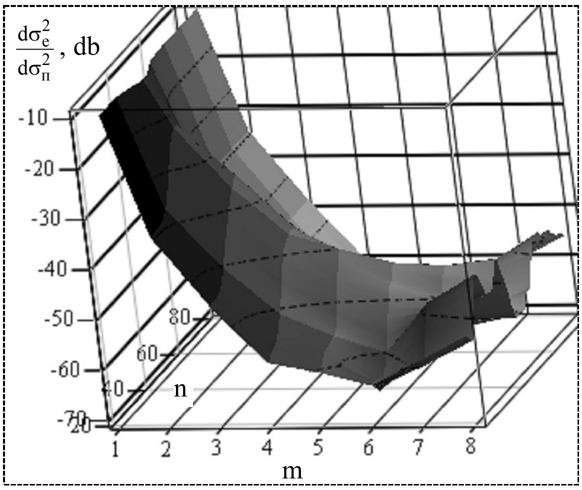

Рис. 7. Результаты обработки НСП в фильтрах предсказания различных порядков

Выводы

По результатам имитационного моделирования можно сделать следующие выводы:

1. Непосредственный расчёт АКМ по реализациям НСП можно заменить произведением нормированной корреляционной функции и закономерной зависимости дисперсии (тренда), что упрощает вычисления и увеличивает точность расчёта.

2. Ошибка предсказания нестационарного по дисперсии случайного процесса существенно зависит от скорости изменения дисперсии процесса – максимальна при наибольшем градиенте и минимизируется при порядке фильтра 5-6 и большем.

Список литературы

1. *Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов: пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.*
2. *Джиган В.И. Быстрый RLS-алгоритм линейно-ограниченной адаптивной фильтрации нестационарных сигналов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. 2005. №2. С. 72–80.*
3. *Радиоэлектронные системы: основы построения и теория. Справочни. / Под ред. проф. Я.Д. Ширмана. М.: ЗАО «МАКВИС», 1998, 828. с.*
4. *Справочник по математике для экономистов: Учеб. пособие / Пед ред. проф. В.И.Ермакова. М.: ИНФРАМ, 2007. 361 с.*
5. *Пивоваров Ю.Н., Тарасов В.Н., Селищев Д.Н.. Методы и средства оперативного анализа случайных процессов: Учебное пособие. Оренбург: ГОУ ВПО ОГУ. 2004*
6. *Ljung L., Soderstrom T. Theory and practice of recursive identification. Cambridge, Massachusetts, London, England: MIT Press, 1986. 529 p.*
7. *Diniz P. S. R. Adaptive filtering algorithms and practical implementation. Third edition. New York, Springer Science + Business Media, 2008. 627 p.*
8. *Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.*
9. *Ю.Н. Корж, С.В. Сомов, В.Н. Курчанов Оценка эффективности симметричных цифровых нерекурсивных фильтров предсказания // Системи обробки інформації. 2016. № 1(138). С. 22-25.*

Надійшла до редколегії 29.03.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Л. Ляхов, Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Полтава.

ОСОБЛИВОСТІ ПРОГНОЗУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ВІДОМИМ ТРЕНДОМ

Ю.М. Корж, О.І. Тиртишніков, М.О. Мавріна, В.М. Курчанов

У статті розглянуто особливості моделювання нестаціонарних випадкових процесів з ділянками різними за величиною і швидкістю зміни дисперсії. Показано, що безпосередній розрахунок кореляційної матриці по реалізаціям еквівалентний добутку нормованої кореляційної функції, яка може бути апріорно відома, і тренда. Результати моделювання показали також адаптацію значень вагових коефіцієнтів прогнозуючого фільтра до величини і знаку градієнта дисперсії.

Ключові слова: *цифровий фільтр, помилка передбачення, нестаціонарний випадковий корельований процес.*

PECULIARITIES OF THE PREDICTION OF NON-STATIONARY RANDOM PROCESSES WITH A KNOWN TREND

Y.M. Korzh, A.I. Tyrtyshnikov, M.A. Mavrina, V.M Kurchanov

In the article the features of modeling of non-stationary random processes with sections of variance in magnitude and rate of change of variance are considered. It is shown that the direct calculation of the correlation matrix for realizations is equivalent to the product of the normalized correlation function, which can be a priori known, and the trend. The simulation results also showed the adaptation of the values of the weighting coefficients of the predictive filter to the value and the sign of the dispersion gradient.

Keywords: *digital filter error prediction transient correlated random process.*