УДК 621.391

С.Г. Рассомахин, Е.И. Князев

Харьковский Национальный университет имені В.Н. Каразина, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Разработан математический метод синтеза цифровой модели частотно селективных цифровых устройств на основе фильтров рекурсивной структуры. Синтезирована математическая модель универсального фильтра нижних частот, получены аналитические описания частотных характеристик. Показана возможность формулировки и решения задач синтеза цифровых устройств с заданными характеристиками в линейном алгебраическом виде.

Ключевые слова: *цифровой рекурсивный фильтр, частотные характеристики, метод наименьших квадратов, система линейных алгебраических уравнений.*

Введение

Настоятельная необходимость перехода от аналоговой к цифровой реализации регуляторов в автоматических системах управления является, в настоящее время, объективной реальностью. Это обусловлено включением в контуры управления технологическими процессами и системами цифровых микропроцессорных интеллектуальных устройств. Цифровые устройства и цифровые технологии с успехом заменяют своих, морально устаревших аналоговых предшественников, что привносит в системы управления значительные улучшения характеристик и показателей точности управления за счет сокращения переходных процессов и уменьшения статических и динамических ошибок [1].

Постановка проблемы. На сегодняшний день существует достаточно много алгоритмов синтеза цифровых регуляторов и фазо-частотных избирательных схем [2-3], основанных на использовании свойств дискретных частотных преобразований [4], Z-преобразований и отображений Лапласа. Кроме того, разработан ряд формальных алгоритмов, основанных на аппроксимации нулей и полюсов дробно рациональных передаточных функций аналоговых прототипов [5]. При этом, для рекурсивных цифровых структур с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ) известные алгоритмы приводят к чрезвычайно громоздким математическим формулировкам задач расчета коэффициентов ветвей прямой и обратной связи цифровых фильтров (ЦФ).

В данной статье разработан корректный, значительно более простой метод аппроксимации частотных характеристик аналоговых прототипов цифровых регуляторов, основанный на решении квадратичной задачи оптимизации, которая, в свою очередь, позволяет легко перейти к линейной алгебраической форме представления и решения.

Целью статьи является разработка математического метода синтеза цифровой модели частотно селективных цифровых устройств на основе ЦФ рекурсивной структуры.

Основная часть

В типичную систему управления входят управляемый объект, регулятор, исполнительный механизм и датчики. Однако, набор этих элементов – еще не система. Для превращения в систему нужны каналы связи, через них идет обмен информацией между элементами. Для передачи информации могут использоваться компьютерные сети. Взаимосвязанные элементы – это уже система, которая обладает особыми свойствами, которых нет у отдельных элементов и любой их комбинации. Основная проблема управления связана с тем, что на управляемый объект и орган управления действуют внешние возмущения, которые препятствуют нормальному функционированию регулятора. Большинство возмущений заранее непредсказуемы, то есть носят случайный характер. Кроме того, неизбежным является присутствие шумов измерений параметров, используемых в цикле управления. Для достижений требуемых показателей качества управления в цифровых системах автоматического управления (САУ) используются частотно избирательные фильтры, которые вырабатывают выходной сигнал, противодействующий отклонению регулируемой величины от заданного значения. ЦФ способны формировать сигналы рассогласования с минимальным уровнем искажений даже в условиях интенсивных помех.

Рекурсивные ЦФ, обладающие БИХ, являются более функциональными, чем нерекурсивные, поскольку нерекурсивные ЦФ, по сути, представляют собой частный (вырожденный) случай ЦФ БИХ при нулевых коэффициентах в цепях обратных связей. Поэтому разработка эффективного метода синтеза именно рекурсивных структур ЦФ представляется наиболее актуальной. Цифровой рекурсивный фильтр характеризуется структурой, показанной на рис. 1.

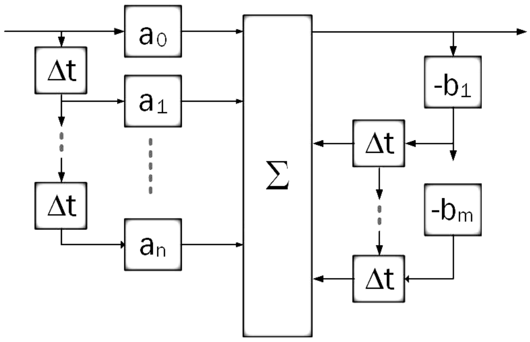

Рис. 1. Структура ЦФ с БИХ

Под синтезом ЦФ БИХ будем понимать нахождение значений векторов коэффициентов

$$A=\{a_i\},\ i\in 0,\ldots,n;\qquad B=\{b_i\},\ i\in 0,\ldots,m; \tag{1}$$

при которых частотные характеристики ЦФ удовлетворяют заданным требованиям. Строго говоря, в задачу проектирования входит и выбор подходящей структуры фильтра с учётом конечной точности вычислений.

Пусть передаточная функция аналогового прототипа регулятора, подлежащего реализации в цифровом виде, задана изображением по Лапласу $W(s)=W(j\omega)$, где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица, ω – круговая частота. Необходимо найти векторы (1), обеспечивающие наилучшим образом аппроксимацию частотных свойств регулятора $W(j\omega)$ с помощью ЦФ, структура которого задана на рис.1, а передаточная функция имеет вид:

$$D(j\omega)=\sum_{i=0}^{n}a_ie^{-ji\omega}\Bigg/\left(1+\sum_{k=1}^{m}b_ie^{-jk\omega}\right)=\frac{A(j\omega)}{1+B(j\omega)}. \tag{2}$$

Математическая задача аппроксимации может быть записана в форме:

$$\min_{A,B}\left\{C=\int_{\omega\in\Omega}\left|W(j\omega)-D(j\omega)\right|^2d\omega\right\}, \tag{3}$$

где C – целевая функции задачи; Ω – частотный диапазон аппроксимации.

С учетом (2) задача преобразуется к виду

$$\min_{A,B}\left\{C=\int_{\omega\in\Omega}\left|\frac{W(j\omega)(1+B(j\omega))-A(j\omega)}{1+B(j\omega)}\right|^2d\omega\right\}. \tag{4}$$

Поскольку интерес представляет нахождение значений векторов (1) для обеспечения требуемых частотных характеристик $W(\omega)$, то задача (4) может быть, без потери общности, преобразована к виду

$$\min_{A,B}\left\{C=\int_{\omega\in\Omega}\frac{\left|W(j\omega)(1+B(j\omega))-A(j\omega)\right|^2}{\left|1+B(j\omega)\right|^2}d\omega\right\}. \tag{5}$$

Поскольку числитель и знаменатель целевой функции (5) – строго неотрицательны на $\omega\in\Omega$, можно перейти к эквивалентной задаче максимизации

$$\max_{\substack{A,B\\ \omega\in\Omega}}\left\{\begin{aligned}C^*=\int_{\omega\in\Omega}\Big\{&\left|W(j\omega)(1+B(j\omega))-A(j\omega)\right|^2-\\ &-\left|1+B(j\omega)\right|^2\Big\}d\omega\end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Полученная целевая функция C^* представляет собой стандартную квадратичную форму метода наименьших квадратов. Это позволяет легко преобразовать задачу синтеза ЦФ БИХ к поиску экстремума унимодальной целевой функции на ограниченном интервале изменения параметров, что, в свою очередь, приводит к линейной алгебраической задаче.

Рассмотрим пример определения векторов (1) для получения рекурсивной реализации минимально-фазового фильтра нижних частот. В силу периодичности частотных характеристик ЦФ достаточно рассмотреть интервал $\omega\in[0,\pi]$. Пусть передаточная функция для данного примера $W(j\omega)$, имеет вид:

$$W(j\omega)=\begin{cases}1, & \text{при } 0\le\omega\le\pi/2;\\ 0, & \text{при } \pi/2\le\omega\le\pi.\end{cases} \tag{7}$$

Для наилучшей аппроксимации (7), при помощи (2) запишем исходную целевую функцию задачи в следующей форме:

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|1-\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}a_ie^{-ji\omega}}{1+\sum\limits_{j=1}^{m}b_je^{-ij\omega}}\right|^2d\omega+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}a_ie^{-ji\omega}}{1+\sum\limits_{j=1}^{m}b_je^{-ij\omega}}\right|^2d\omega. \tag{8}$$

На основании выражений (3–6) перейдем к целевой функции эквивалентной задачи

$$\max_{\substack{A,B\\ \omega\in\Omega}}\left\{\begin{aligned}C^*=\int_0^{\pi/2}\Big\{&\left|(1+B(j\omega)-A(j\omega))\right|^2-\\ &-\left|1+B(j\omega)\right|^2\Big\}d\omega+\\ +\int_{\pi/2}^{\pi}\Big\{&\left|A(j\omega)\right|^2-\left|1+B(j\omega)\right|^2\Big\}d\omega\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Упрощение полученной задачи вычислением квадратов модулей комплексных функций дает следующее выражение:

$$\begin{aligned}\max_{A,B}C^*=&\int_0^{\pi/2}\left\{2\sum_{i=0}^{n}a_i\cos(i\omega)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}a_ib_k\times\right.\\ &\left.\times\cos[(i-k)\omega]-\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}a_ia_k\cos[(i-k)\omega]\right\}d\omega\Bigg\}+\\ &+\int_{\pi/2}^{\pi}\left\{1+2\sum_{i=1}^{m}b_i\cos(i\omega)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}b_ib_k\times\right.\\ &\left.\times\cos[(i-k)\omega]-\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}a_ia_k\cos[(i-k)\omega]\right\}d\omega.\end{aligned} \tag{10}$$

Экстремум целевой функции(10) ищется в стационарной точке

$$\frac{dC^*}{da_i}=0,\ i=0,\ldots,n;\quad \frac{dC^*}{db_k}=0,\ k=1\ldots m\,. \qquad (11)$$

Поскольку операции интегрирования и дифференцирования являются линейными, то можно поменять порядок их выполнения. Дифференцирование подынтегрального выражения дает:

$$\frac{dC^*}{da_i}=\int\limits_0^{\pi/2}\left\{\cos(i\omega)+\sum_{k=1}^{m}b_k\cos\left[(i-k)\omega\right]-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{n}a_k\cos\left[(i-k)\omega\right]\right\}d\omega-\quad i=\overline{0,n}. \qquad (12)$$
$$-\int\limits_{\pi/2}^{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}a_k\cos\left[(i-k)\omega\right]\right\}d\omega=0;$$

$$\frac{dC^*}{db_i}=\int\limits_0^{\pi/2}\left\{\sum_{k=0}^{n}a_i\cos(i-k)\omega\right\}d\omega+$$
$$+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left\{\cos(i\omega)+\sum_{k=1}^{m}b_k\left[\cos(i-k)\omega\right]\right\}d\omega=0. \qquad (13)$$

Вычисление определенных интегралов в (12) и (13) дает формулы для записи уравнений линейной системы в следующем виде:

– первая часть СЛАУ – $(n+1)$-уравнения

$$\sum_{k=0}^{m}\begin{cases}b_k\cdot\pi/2, & i=k;\\ b_k\cdot\sin\left[(i-k)\pi/2\right]/\ (i-k), & i\neq k;\end{cases}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\begin{cases}-\pi a_k, & i=k;\\ 0, & i\neq k;\end{cases}=\begin{cases}\pi/2 & i=0;\\ \sin(i-\pi/2)/i, & i\neq 0;\end{cases} \qquad (14)$$

– вторая часть СЛАУ – m уравнений

$$\sum_{k=1}^{m}\begin{cases}b_k\cdot\pi/2, & k=i;\\ b_k\cdot\left(-\sin\left[(i-k)\pi/2\right]\right)/(i-k), & k\neq i;\end{cases}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\begin{cases}a_k\cdot\pi/2, & k=i;\\ a_k\cdot\sin(k-i)/(k-i), & k\neq i;\end{cases}=\frac{\sin(i\pi/2)}{i}. \qquad (15)$$

В выражении (14) переменная i обозначает номер уравнения (начиная с нулевого), а k – порядковый номер искомой координаты (коэффициента ЦФ БИХ) в векторах A и B. В выражении (15) номер уравнения определяется суммой (i+n). И используя левые части равенств (14) и (15), можно составить матрицу коэффициентов при неизвестных коэффициентах ЦФ. Использование правых частей (14), (15) дает матрицу-столбец свободных членов СЛАУ. Таким образом, для полного определения параметров ЦФ БИХ достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов при неизвестных, обладающей размером $(n+m+1)\times(n+m+1)$. Данная СЛАУ всегда является хорошо определенной и имеет единственное решение. Это является следствием унимодальности целевой функции (10) на интервале поиска решения. Структурная схема алгоритма моделирования разработанного метода представлена на рис. 2.

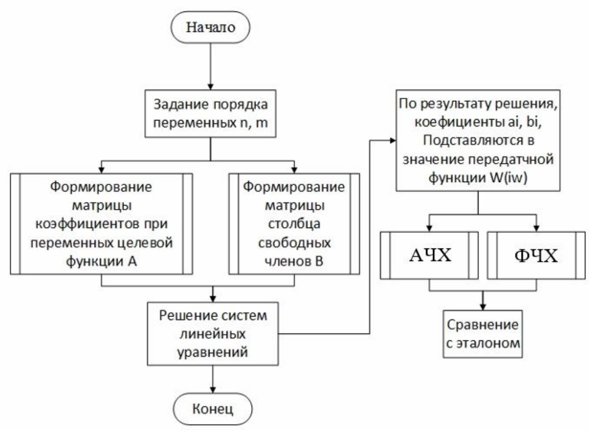

Рис. 2. Схема алгоритма моделирования расчета параметров ЦФ БИХ и оценки их характеристик

Моделирование производится в несколько этапов. Сначалf, на основе выражений (14) и (15) формируется СЛАУ в матричном виде при произвольно заданном порядке ЦФ БИХ m и n. Пример результата формирования матричной СЛАУ для рассматриваемого минимально-фазового ФНЧ при $n=m=4$ представлен на рис. 3. Решение СЛАУ методом Гаусса дает значения коэффициентов ЦФ, показанные на рис. 4.

$$A=\begin{pmatrix}-3.142 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.333 & 0\\ 0 & -3.142 & 0 & 0 & 0 & 1.571 & 1 & 0 & -0.333\\ 0 & 0 & -3.142 & 0 & 0 & 1 & 1.571 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3.142 & 0 & 0 & 1 & 1.571 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.142 & -0.333 & 0 & 1 & 1.571\\ 1 & 1.571 & 1 & 0 & -0.333 & 1.571 & -1 & 0 & 0.333\\ 0 & 1 & 1.571 & 1 & 0 & -1 & 1.571 & -1 & 0\\ -0.333 & 0 & 1 & 1.571 & 1 & 0 & -1 & 1.571 & -1\\ 0 & -0.333 & 0 & 1 & 1.571 & 0.333 & 0 & -1 & 1.571\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1.571\\ -1\\ 0\\ 0.333\\ 0\\ 1\\ 0\\ -0.333\\ 0\end{pmatrix}$$

Рис. 3. Результат формирования СЛАУ ФНЧ

$$x := \mathrm{lsolve}(A,B)\qquad x=\begin{pmatrix}0.5\\ 0.285\\ -0.038\\ -0.104\\ 0.042\\ 0\\ -0.077\\ 0\\ 0.084\end{pmatrix}$$

Рис. 4. Решение СЛАУ ФНЧ

Первые 5 полученных значений определяют искомые коэффициенты ЦФ прямой ветви ЦФ, а последние 4 – коэффициенты рекурсии.

Подстановка найденных значений в выражение передаточной функции ЦФ (2) позволяет вычислить модуль (АЧХ – амплитудно-частотную характеристику) и аргумент (ФЧХ – фазо-частотную характеристику). Частотные характеристики ЦФ БИХ, реализующего ФНЧ с минимальными фазовыми искажениями представлены на рис. 5 и 6.

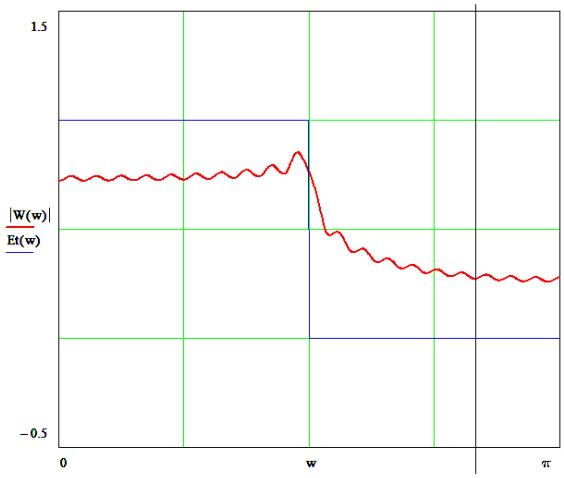

Рис. 5. АЧХ ЦФ БИХ ФНЧ.

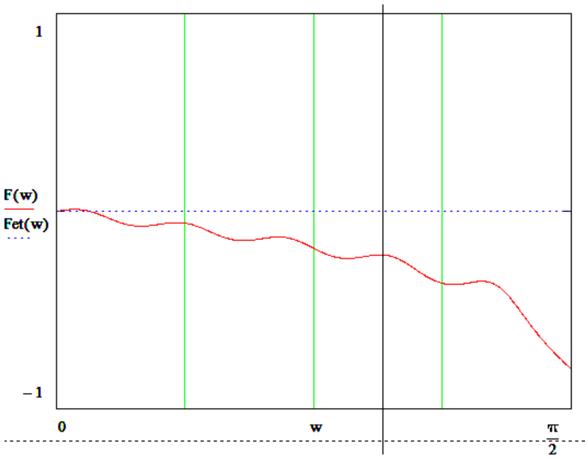

Рис. 6. ФЧХ ЦФ БИХ ФНЧ

На рис. 5 представлены 2 кривые: Et(w) – АЧХ эталонной функции аналогового прототипа ФНЧ; W(w) – АЧХ полученной модели рекурсивного ЦФ ФНЧ. Для получения зависимостей использован порядок ЦФ $n = m = 20$. На рис. 6 показаны 2 зависимости: $F(w)$ –эталонная ФЧХ аналогового прототипа идеального фильтра нижних частот; $Fet(w)$ – ФЧХ ЦФ БИХ. Зависимости получены при тех же значениях порядка ЦФ. С увеличением порядка ЦФ точность аппроксимации характеристик аналогового прототипа, естественно, повышается.

Выводы

Разработанный метод синтеза рекурсивных ЦФ, основанный на нахождении точки экстремума унимодальной целевой функции, является более эффективным по сравнению с известными методами. Данная эффективность достигается за счет перехода от дробно-рациональной формы записи целевой функции к обычной квадратичной форме, позволяющей решать эквивалентную линейную задачу. При этом минимизация исходной сложной целевой функции заменяется максимизацией эквивалентной простой квадратичной формы. Для поиска стационарной точки целевой функции достаточно решить систему уравнений в частных производных, вырождающуюся в обыкновенную, хорошо определенную систему линейных алгебраических уравнений. Вычислительная сложность решения СЛАУ является полиномиальной и не превышает третей степени, от размерности матрицы коэффициентов. Таким образом, предложенный метод синтеза рекурсивных ЦФ обеспечивает минимальную вычислительную сложность при максимальной точности аппроксимации частотных характеристик аналоговых прототипов.

Список литературы

1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: «Наука»,1975.–374 с.*
2. *Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход: Пер. с англ. – М. «Вильямс», 2004. – 992 с.*
3. *Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд; пер. с англ. – М.: МИР, 1978. – 834 с.*
4. *Гостев В. И. Системы управления с цифровыми регуляторами: Справочник. – К.:Техника, 1990. – 290 с.*
5. *Franklin. Gene F. Digital control of dynamic sytems / Gene F. Franklin. J. David Powell. Michael L. Workman. Addison Wesley Longman. Inc.1998. – 741 p.*

Надійшла до редколегії 26.10.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.А. Краснобаєв, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків.

МАТЕМАТИЧНИЙ МЕТОД СИНТЕЗУ ЦИФРОВИХ ЧАСТОТНО-ВИБОРЧИХ РЕКУРСИВНИХ ФІЛЬТРІВ

С.Г. Рассомахін, Є.І. Князев

Розроблено математичний метод синтезу цифрової моделі частотно селективних цифрових засобів на основі фільтрів рекурсивної структури. Синтезована математична модель універсального фільтра нижчих частот, отримані аналітичний опис частотних характеристик. Показана можливість формульовання та вирішення задач синтезу цифрових засобів с заданими характеристиками в лінійному алгебраїчному вигляді.

***Ключові слова:** цифровий рекурсивний фільтр, частотні характеристики, метод найменших квадратів, система лінійних алгебраїчних рівнянь.*

THE MATHEMATICAL METHOD OF SYNTHESIS OF DIGITAL FREQUENCY-SELECTIVE RECURSIVE FILTERS

S.G. Rassomakhin, E.I. Knyazev

A mathematical method for synthesizing a digital model of frequency-selective digital devices based on filters of the recursive structure is developed. A mathematical model of a universal low-pass filter has been synthesized, analytical descriptions of frequency characteristics are obtained. The possibility of formulating and solving problems of the synthesis of digital devices with given characteristics in a linear algebraic form has been shown.

***Keywords:** digital recursive filter, frequency characteristics, least squares method, system of linear algebraic equations.*