

Математичні моделі та методи

УДК 514.74+519.85

Н.И. Гиль, В.Н. Пацук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УСЛОВИЙ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЛИПСА И ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ПАРАБОЛОЙ

В статье рассмотрен метод построения Φ -функции эллипса и параболы, что позволяет моделировать условия непересечения и включения в различных задачах геометрического проектирования: упаковки, раскроя, компоновки и т. п. Требуемые для построения Φ -функции выражения могут быть получены с учётом условий равенства угловых коэффициентов касательных в точках касания параболы и гомотетически преобразованного эллипса. Для получения условий включения применяется преобразование системы координат. В общем случае для нахождения точек эллипса и параболы, определяющих значение Φ -функции, допустимо и даёт хороший результат применение методов второго порядка для поиска оптимума.

Ключевые слова: Φ -функция, эллипс, парабола, непересечение, включение.

Описание задачи

Аналитическое представление условий взаимодействия геометрических объектов (непересечение, включение) является основой построения математических моделей при решении целого ряда практических задач геометрического проектирования, в том числе задач моделирования размещения в заданных областях объектов различной физической природы. Для некоторых классов геометрических объектов реализация этих условий осуществлена на основе Φ -функций [1], которые зависят от параметров размещения объектов и принимают отрицательные, равные нулю или положительные значения в зависимости от того, объекты пересекаются, касаются или не пересекаются.

Наиболее сложными с точки зрения формализации являются условия включения и взаимного непересечения объектов, ограниченных кривыми второго порядка. Известен подход к реализации условий взаимодействия эллипсов, основанный на аппроксимации границы эллипса дугами окружностей [2]. Однако, несмотря на простоту его реализации, погрешности аппроксимации, в связи с их накоплением, могут отрицательно сказываться на конечном результате решения задач размещения, особенно при достаточно большом количестве размещаемых объектов. В [3] рассмотрен подход к реализации этих условий, основанный на использовании уравнений эллипсов, который не требует аппроксимации, хотя является более трудоёмким в реализации по сравнению с [2].

В настоящей статье рассмотрен аналогичный подход к реализации условий взаимного расположения эллипса и области, ограниченной параболой.

Постановка и решение задачи непересечения

Пусть в системе координат xOy задана парабола P с параметром p и эллипс $L\{A, B, x_0, y_0, \vartheta\}$ с параметрами размещения (x_0, y_0, ϑ) и полуосями A, B , уравнения которых

$$y - px^2 = 0$$

и

$$B^2[(x - x_0) \cos \vartheta + (y - y_0) \sin \vartheta]^2 + A^2[-(x - x_0) \sin \vartheta + (y - y_0) \cos \vartheta]^2 - A^2B^2 = 0$$

соответственно (рис. 1).

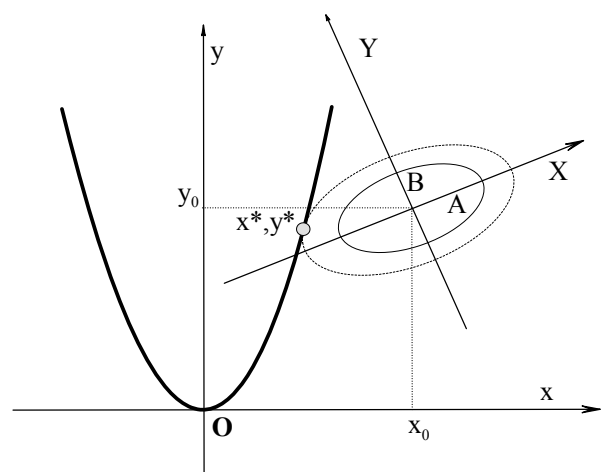


Рис. 1. Парабола и эллипс в произвольной ориентации

Обозначим через \bar{P} , \bar{L} области, ограниченные P и L соответственно.

Условия взаимного непересечения. Эллипс L не пересекается с областью \bar{P} , если существует точка (x^*, y^*) , для которой выполняются условия:

- точка (x^*, y^*) принадлежит параболе P и эллипсу $L_k \{kA, kB, x_0, y_0, \vartheta\}$;
- точка (x^*, y^*) не принадлежит области \bar{L} ;
- точки (O, p) и (x_0, y_0) находятся по разные стороны от касательной к параболе P в точке (x^*, y^*) ;
- угловые коэффициенты касательных к эллипсу L_k и к параболе P в точке (x^*, y^*) равны.

Представив эти условия в аналитическом виде, после необходимых преобразований имеем систему неравенств

$$\begin{cases} B^2[(x^* - x_0) \cos \vartheta + (px^{*2} - y_0) \sin \vartheta]^2 + \\ + A^2[-(x^* - x_0) \sin \vartheta + (px^{*2} - y_0) \cos \vartheta]^2 - \\ - A^2 B^2 \geq 0, \\ -y_0 + px^*(2x_0 - x^*) \geq 0 \end{cases}$$

и равенство

$$(D + 2pSx^*)(x^* - x_0) + (S + 2pRx^*)(px^{*2} - y_0) = 0,$$

где

$$D = B^2 \cos^2 \vartheta + A^2 \sin^2 \vartheta,$$

$$R = B^2 \sin^2 \vartheta + A^2 \cos^2 \vartheta,$$

$$S = (B^2 - A^2) \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Значение x^* , удовлетворяющее равенству при заданных значениях $(A, B, p, x_0, y_0, \vartheta)$, может быть найдено одним из вычислительных методов. Тогда выполнение неравенств, при полученном значении x^* , гарантирует непересечение эллипса и области, ограниченной параболой.

При $\vartheta = 0$ (эллипс ориентирован) имеем:

$$D = B^2, R = A^2, S = 0.$$

Тогда условия непересечения принимают вид:

$$\begin{cases} B^2(x^* - x_0)^2 + A^2(px^{*2} - y_0)^2 - A^2 B^2 \geq 0, \\ -y_0 + 2px_0 x^* - px^{*2} \geq 0, \end{cases}$$

где x^* удовлетворяет уравнению

$$B^2(x^* - x_0) + 2pA^2 x^*(px^{*2} - y_0) = 0.$$

Если $A = B = r_0$ (круг), то условия имеют вид:

$$\begin{cases} (x^* - x_0)^2 + (px^{*2} - y_0)^2 - r_0^2 \geq 0, \\ -y_0 + 2px_0 x^* - px^{*2} \geq 0, \end{cases}$$

где x^* удовлетворяет уравнению

$$(x^* - x_0) + 2px^*(px^{*2} - y_0) = 0.$$

Таким образом, Φ -функцию в задаче непересечения можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0, \vartheta) = \\ = \min \{ B^2[(x^* - x_0) \cos \vartheta + (px^{*2} - y_0) \sin \vartheta]^2 + \\ + A^2[-(x^* - x_0) \sin \vartheta + (px^{*2} - y_0) \cos \vartheta]^2 - A^2 B^2, \\ -y_0 + 2px_0 x^* - px^{*2} \}, \end{aligned}$$

где x^* удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} 2p^2 R x^{*3} + 3pS x^{*2} - [D - 2p(Sx_0 + Ry_0)] x^* - \\ - Dx_0 - Sy_0 = 0 \end{aligned}$$

и может быть найдено одним из численных методов.

Постановка и решение задачи включения

Условия включения эллипса L в область \bar{P} (рис. 2).

В результате ряда преобразований системы координат xOy (поворот на угол ϑ , “сжатие” по оси Ox с коэффициентом A/B , поворот на угол

$$2\alpha = \arctg \frac{2AB \sin \vartheta \cos \vartheta}{B^2 \sin^2 \vartheta - A^2 \cos^2 \vartheta})$$

парабола P в новой системе координат XOY превращается в параболу P'

$$Y^2 - 2p'X = 0,$$

а эллипс L превращается в круг $C\{B, X_0, Y_0\}$ радиуса B с центром в точке (X_0, Y_0) , где p', X_0, Y_0 выражаются через p, A, B, ϑ (рис. 3).

Тогда круг C является включением в область \bar{P}' , ограниченную параболой P' , а значит эллипс L является включением в область \bar{P} , если существует точка (X^*, Y^*) , для которой выполняются условия:

- точка (X^*, Y^*) принадлежит параболе P' и окружности

$$C_k \{kB, X_0, Y_0\};$$

- точка (X^*, Y^*) находится по ту же сторону от оси OX , что и центр (X_0, Y_0) ;

- точка (X_0, Y_0) принадлежит области \bar{P}' ;

- $X^* > \bar{X}$, где \bar{X} — абсцисса точки соприкосновения круга и параболы при $Y_0 = 0$ (рис. 3).

Значение \bar{X} однозначно определяется через B и p' , если кривизна k параболы в точке $(0, 0)$ больше кривизны окружности, в противном случае $\bar{X} = 0$;

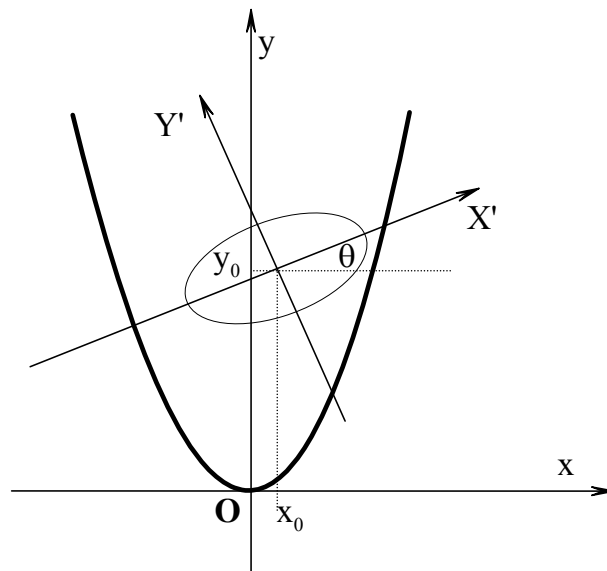


Рис. 2. Включення еліпса в область, ограниченную параболой.

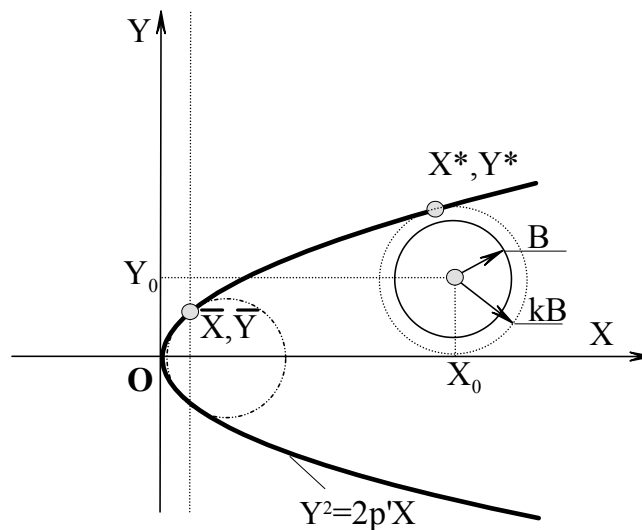


Рис. 3. Включення круга в область, ограниченную параболой, после преобразования.

- точка (X^*, Y^*) не принадлежит кругу C ;
- угловые коэффициенты касательных к параболе P' и к окружности C_k в точке (X^*, Y^*) равны.

и равенство

$$p'(Y^* - Y_0) + Y^* \left(\frac{1}{2p'} Y^{*2} - X_0 \right) = 0.$$

Представив эти условия в аналитическом виде, после необходимых преобразований имеем систему неравенств

Здесь

$$\begin{cases} Y^* \cdot Y_0 \geq 0, \\ X_0 - \frac{1}{2p'} Y_0^2 \geq 0, \\ \frac{1}{2p'} Y^{*2} - \bar{X} \geq 0, \\ \left(\frac{1}{2p'} Y^{*2} - X_0 \right)^2 + (Y^* - Y_0)^2 - B^2 > 0 \end{cases}$$

$$p' = \frac{AB^2}{2p(A^2 \cos^2 \vartheta + B^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}},$$

$$X_0 = \frac{B}{A} (x_0 \cos \vartheta + y_0 \sin \vartheta) \cos 2\varphi - (x_0 \sin \vartheta - y_0 \cos \vartheta) \sin 2\varphi,$$

$$Y_0 = -\frac{B}{A} (x_0 \cos \vartheta + y_0 \sin \vartheta) \sin 2\varphi - (x_0 \sin \vartheta - y_0 \cos \vartheta) \cos 2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi = -\frac{2AB\sin \vartheta \cos \vartheta}{A^2 \cos^2 \vartheta + B^2 \sin^2 \vartheta},$$

$$\cos 2\varphi = -\frac{A^2 \cos^2 \vartheta - B^2 \sin^2 \vartheta}{A^2 \cos^2 \vartheta + B^2 \sin^2 \vartheta},$$

$$\bar{X} = \frac{4p^2(A^2 \cos^2 \vartheta + B^2 \sin^2 \vartheta)^3 - A^2 B^2}{4pA(A^2 \cos^2 \vartheta + B^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}},$$

$$\kappa = \frac{2p(A^2 \cos^2 \vartheta + B^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}{AB^2}.$$

Значение Y^* , удовлетворяющее равенству при заданных значениях $A, B, p, x_0, y_0, \vartheta$, может быть вычислено одним из вычислительных методов. Тогда выполнение неравенств, при полученном значении Y^* , гарантирует включение эллипса в область, ограниченную параболой.

Включение эллипса L в область \bar{P} , ограниченную параболой P , можно рассматривать как непересечение эллипса L и области $R^2 \setminus \bar{P}$, являющейся дополнением к области \bar{P} .

Исходя из вышеизложенного, соответствующую Φ -функцию можно представить в виде:

$$\Phi(x_0, y_0, \vartheta) =$$

$$= \min\left\{Y^* \cdot Y_0, X_0 - \frac{1}{2p'} Y_0^2, \frac{1}{2p'} Y^{*2} - \bar{X}, \left(\frac{1}{2p'} Y^{*2} - X_0\right)^2 + (Y^* - Y_0)^2 - B^2\right\},$$

где Y^* удовлетворяет условию

$$Y^{*3} + 2p'(p' - X_0)Y^* - 2p'^2 Y_0 = 0$$

и может быть найдено одним из численных методов.

Выводы

Получены условия, позволяющие построить Φ -функции эллипса и обеих бесконечных областей, границей которых является парабола.

В обоих случаях полученные выражения позволяют получить требуемые значения комбинацией аналитических выражений и применением одного из простейших вычислительных методов решения одномерной гладкой задачи оптимизации.

Список литературы

1. Stoyan Yu.G. Φ -function and its basic properties // Докл. АН Украины. Сер. А. – 2001. – № 8. – С. 112–117.
2. Stoyan Yu. Cutting and Packing problems for irregular objects with continuous rotations: mathematical modeling and nonlinear optimization / Yu. Stoyan, A. Pankratov, T. Romanova // Journal of Operational Research Society, Volume 67, Issue 5, P. 786–800.
3. Гиль Н.И. Аналитическое представление условий включения и взаимного непересечения эллипсов / Гиль Н.И., Пацук В.Н. // Материалы 5-й международной конференции "Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии", 22-25 марта 2016 г., Кишинэу, Молдова. – 2016. – Том 2. – С. 59–65.

Надійшла до редколегії 30.10.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Більчук, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків.

АНАЛИТИЧНИЙ ОПИС УМОВ ВЗАЄМНОГО РОЗТАШУВАННЯ ЕЛІПСА ТА ОБЛАСТІ, ОБМЕЖЕНОЇ ПАРАБОЛОЮ

М.І. Гіль, В.М. Пацук

В статті розглянуто метод побудови Φ -функції еліпса та параболі. Φ -функція дозволяє моделювати умови неперетину та включення в різних задачах геометричного проектування: упакування, розкряю, компоновки і т. п. Необхідні для побудови Φ -функції вирази можна отримати з урахуванням умов рівності кутових коефіцієнтів дотичних прямих у точках дотику параболі і гомотетично перетвореного еліпса. Для отримання умов включення застосовується перетворення системи координат. У загальному випадку для знаходження точок еліпса і параболі, що визначають значення Φ -функції, допустимо і дає добрий результат застосування методів другого порядку для пошуку оптимума.

Ключові слова: Φ -функція, еліпс, парабола, неперетин, включення.

AN ANALYTICAL DESCRIPTION OF MUTUAL PLACEMENT CONDITIONS FOR AN ELLIPSE AND A REGION RESTRICTED BY A PARABOLA

M.I. Gil, V.M. Patsuk

A method of construction of a Φ -function of an ellipse and a parabola is considered. Φ -function allows to model non-intersection and inclusion conditions in different geometric design problems: packing, cutting, arrangement, etc. Necessary expressions for Φ -function construction can be obtained using the conditions of tangent coefficient equality in tangent points of the parabola and the homothetically transformed ellipse. To obtain inclusion condition a coordinate system transformation is applied. In the general case an application of second-order methods for optimum search is acceptable and gives a good result for finding the points of the ellipse and the parabola which determine Φ -function value.

Keywords: Φ -function, ellipse, parabola, non-intersection, inclusion.