ШАПОВАЛ АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

Кандидат технических наук, заведующий комплексной лаборатории обеспечения надежности зданий и сооружений.

Основные направления научной деятельности: численное моделирование совместной работы системы «основания - фундаменты - здания».

Автор 7 опубликованных работ.

E-mail: shapoval@creator.dp.ua

УДК 624.15.001

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ключевые слова: сдвиги, сейсмические влияния, расчеты сдвигов.

Предложена модификация метода граничных элементов, позволяющая при прочих равных условиях повысить точность аппроксимации контактных эпюр по подошве фундаментов. Основным отличием предлагаемого варианта метода граничных элементов от классического является возможность аппроксимации эпюр давления в пределах каждого из граничных с использованием полиномов n-й степени или иной непрерывной функцией координат.

Запропонована модифікація методу граничних елементів, що дозволяє за інших рівних умов підвищити точність апроксимації контактних епюр по підошві фундаментів. Основною відмінністю пропонованого варіанта методу граничних елементів від класичного є можливість апроксимації епюр тиску в межах кожного із граничних з використанням поліномів n-му ступені або іншою безперервною функцією координат

Updating of a method of the boundary elements is offered, allowing with other things being equal to raise accuracy of approximation contact эпюр on a sole of the bases. The basic difference of an offered variant of a method of boundary elements from classical is approximation possibility эпюр pressure within each of boundary polynoms with use n degrees or other continuous function of co-ordinates.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными практическими задачами. Контактные напряжения играют важную роль при расчете фундаментов по материалу, а также при расчете оснований по прочности, несущей способности и деформациям.

В настоящее время при определении контактных напряжений наиболее распространенными являются методы граничных и конечных элементов (последний в настоящей работе не рассматривается).

В основу общепринятого варианта метода граничных элементов положено допущение о том, что контактные напряжения имеет вид ступенчатой линии (это не соответствует действительности), а осадки фундамента и основания совпадают в точке, соответствующей центру граничного элемента. Поэтому для достижения приемлемой точности приходится разбивать область контакта основания с фундаментом на большое число граничных элементов. Одним из вариантов достижения необходимой точности расчета при малом количестве граничных элементов является аппроксимация действующих в пределах граничных элементов нагрузок не константами, а полиномами первой, второй и третьей степени (по мере надобности степень полинома может быть повышена).

Анализ последних исследований и публикаций, в которых положено начало решению данной проблемы. Решению задач механики грунтов и горных пород методом граничных элементов посвящено большое число работ [4, 6]. Однако во всех перечисленных работах рассматриваются постоянные в пределах граничных элементов нагрузки, и минимизируется поточечная невязка.

М.И. Горбуновым - Посадовым [2] было выдвинуто допущение о перспективности минимизации среднего квадратического уклонения разности осадок основания и расположенного на нем фундамента при определении контактных напряжений. Однако им рассматривалась вся область контакта основания с фундаментом, а не отдельные граничные элементы. Поэтому предложенный им подход мало приемлем для определения контактных напряжений по подошве фундаментов сложной формы и совместного расчета нескольких отдельных фундаментов.

Близкая по смыслу к рассмотренной в настоящей работе идея решения задач гидродинамики методом конечных элементов изложена в монографиях К.Васидзу [1] и К. Флетчера [5].

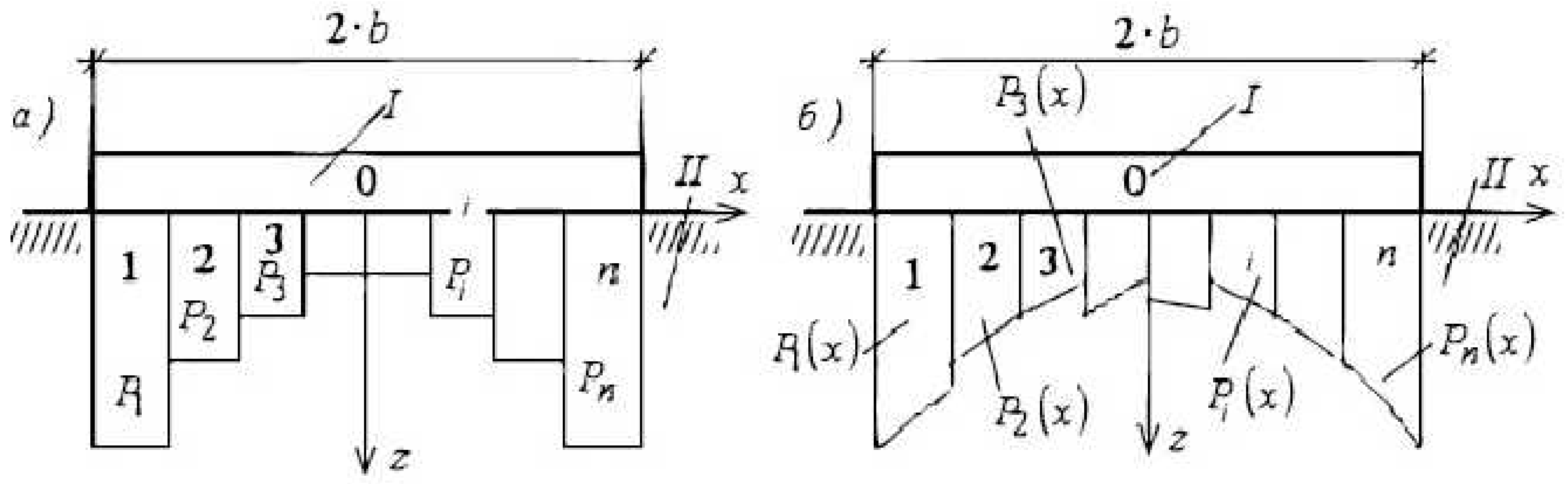

Рис. 1. К определению контактных напряжений. а - классический метод граничных элементов; б - то же, предлагаемый нами. 1,2,3,…i,…n- номера граничных элементов.

Выделение ранее не решенных частей общей проблемы, которым посвящена данная статья. В данном случае задача исследований была сформулирована так. Область контакта между фундаментом и основанием разбита на *n* граничных элементов, в пределах каждого из которых зависимость искомого контактного давления от координаты описывается полиномом *m*-й степени. Требуется определить неизвестные коэффициенты полинома. В данном случае не решенной является проблема определения неизвестных коэффициентов аппроксимирующего эпюру контактных напряжений полинома (это также может быть отрезок ряда Фурье, Бесселя или иного ряда).

Цель работы - разработка обоснование алгоритма определения контактных напряжений по подошве фундамента вариационным методом граничных элементов.

Изложение основного материала исследования. Для иллюстрации предлагаемого метода рассмотрим задачу о вдавливании плоского абсолютно - жесткого штампа в упругую изотропную полуплоскость (рис.1).

В данном случае известным является вертикальное перемещение штампа W_0, а искомыми - контактные давления $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Решение этой задачи классическим методом граничных элементов изложено в работах [5, 6].Согласно [6] для определения неизвестных давлений следует решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\left[B_{ij}\right]\cdot\vec{P}=\vec{W}_0, \tag{1}$$

где $\vec{W}_0$ - известные (заданные) перемещения центров граничных элементов; $\left[B_{ij}\right]$ - матрица податливости,

$$B_{ij}=-\frac{1-\nu}{\pi\cdot G}\cdot\begin{bmatrix}(x_i-x_j+a)\cdot ln\left|x_i-x_j+a\right|-\\ -(x_i-x_j-a)\cdot ln\left|x_i-x_j-a\right|-\\ -(L-x_j+a)\cdot ln\left|L-x_j+a\right|+\\ +(L-x_j-a)\cdot ln\left|L-x_j-a\right|\end{bmatrix} \tag{2}$$

$\vec{P}$ - вектор- столбец искомых контактных напряжений; *a*- осадка центра *i* - того граничного элемента под воздействием распределенной по площади *j* - того граничного элемента единичной нагрузки. Элементы матрицы влияния B_{ij} также называют коэффициентами влияния. Здесь *G* и ν - соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона основания; x_i и x_j - центры соответственно *i* - того и *j* - того граничных элементов; 2×*a* - ширина граничного элемента; *L*=1,25×*b* - точка, относительно которой отсчитывается осадка фундамента; 2×*b* - ширина подошвы фундамента.

Установленная с использованием зависимостей (1) и (2) эпюра контактных давлений представлена на рисунке 2. При ее построении с использованием формул

$$P^*=P\cdot\frac{(1-\nu)\cdot ln(2)\cdot b^2}{G\cdot W_0\cdot\pi}\quad и\quad x^*=\frac{x}{b} \tag{3}$$

была выполнена нормировка точного и приближенного решений задачи. В заключение отметим, что коэффициенты B_{ij} были рассчитаны по известной формуле:

$$B_{ij}=-\frac{1-\nu}{\pi\cdot G}\cdot\lim_{x\to\left(x_i-x_j\right)}\left\{\int_{-a}^{a}\left[ln\left|x-\xi\right|-ln\left|L-\xi\right|\right]d\xi\right\}, \tag{4}$$

где в квадратных скобках представлено фундаментальное решение Фламана для полуплоскости (0*xz*) при $z\to 0$.

Далее найдем контактные напряжения с использованием предлагаемого нами вариационного метода граничных элементов. Вначале для простоты изложения положим, что в пределах каждого из граничных элементов контактное давление постоянно. Тогда осадка поверхности основания в точке *x* под воздействием распределенной в пределах *i* - того граничного элемента шириной 2×*a* и центром в точке *x*=0 нагрузки P_i равна:

$$S_i(x)=-\frac{1-\nu}{\pi\cdot G}\cdot P_i\cdot\int_{-a}^{+a}\left[ln\left|x-\xi\right|-ln\left|L-\xi\right|\right]\cdot d\xi=$$

$$=\frac{1-\nu}{\pi\cdot G}\cdot P_i\cdot\left\{\begin{matrix}(x+a)\cdot ln\left|x+a\right|-(x-a)\cdot ln\left|x-a\right|-\\ -(L+a)\cdot ln\left|L+a\right|+(L-a)\cdot ln\left|L-a\right|\end{matrix}\right\}. \tag{5}$$

При этом, если центр граничного элемента находится в

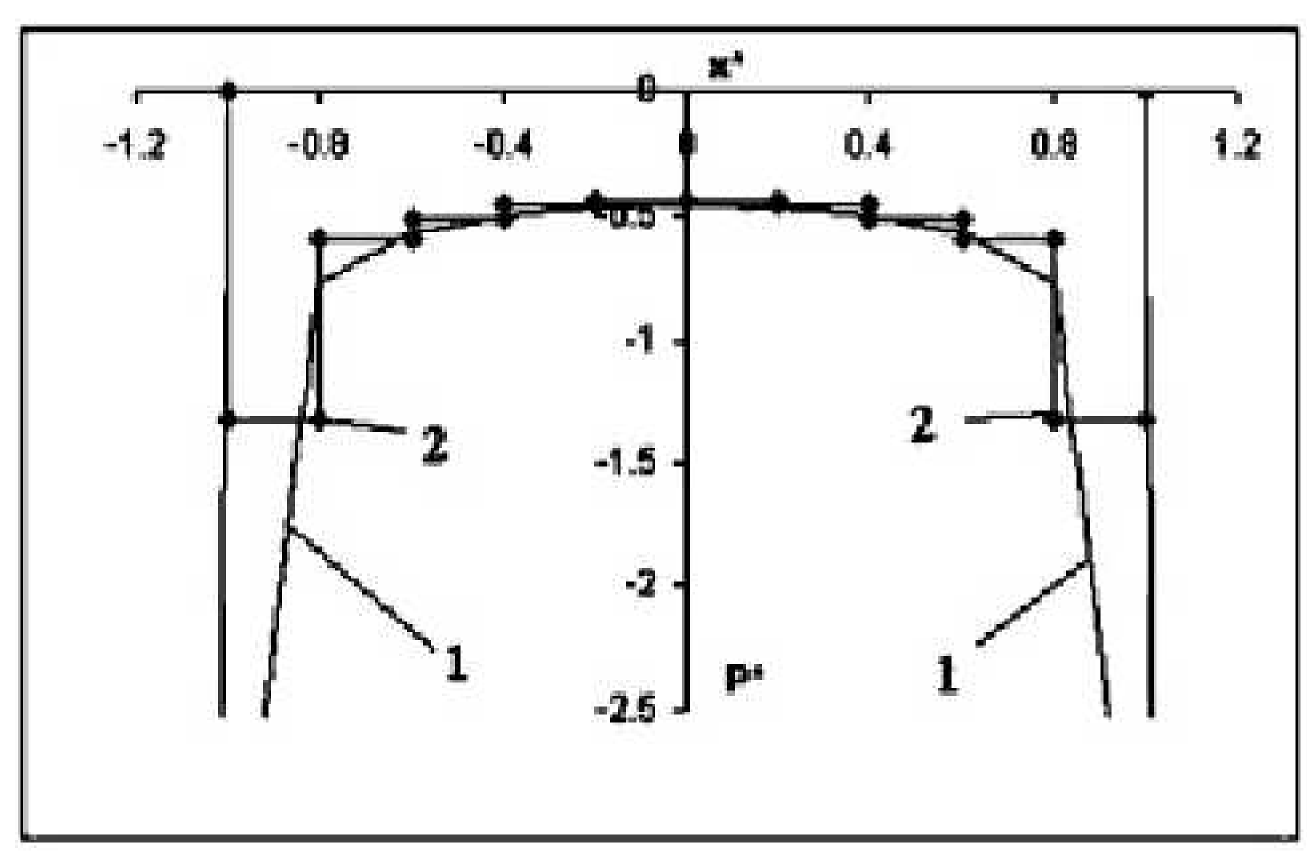

Рис. 2. Распределение напряжений в основании жесткого ленточного фундамента. 1-точное решение; 2 – то же, полученное с использованием классического метода граничных элементов.

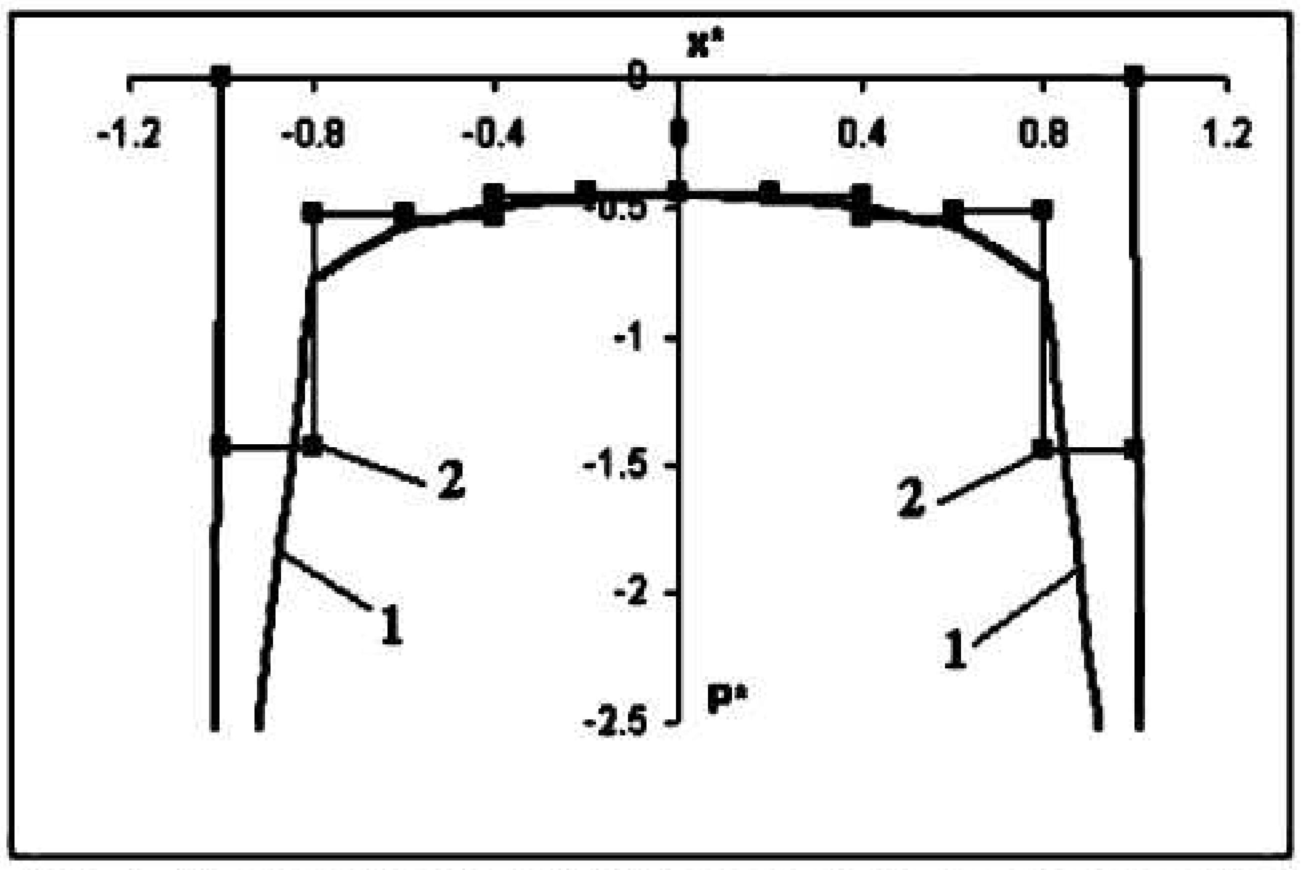

Рис. 3. Распределение напряжений в основании жесткого ленточного фундамента. 1-точное решение; 2 – то же, полученное с использованием вариационного метода граничных элементов.

точке с координатой x_i, осадка основания в точке x равна:

$$S_i(x) = -\frac{1-\nu}{\pi\cdot G}\cdot P_i\cdot\begin{bmatrix}(x-x_i+a)\cdot ln|x-x_i+a|-\\ -(x-x_i-a)\cdot ln|x-x_i-a|-\\ -(L-x_i+a)\cdot ln|L-x_i+a|+\\ +(L-x_i-a)\cdot ln|L-x_i-a|\end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Осадка поверхности основания в любой произвольной точке x под воздействием контактного давления равна:

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} S_i(x), \qquad (7)$$

где $S_i(x)$ - см. формулу (6). Далее найдем квадрат невязки между заданной осадкой фундамента W_0 и искомой осадкой $S(x)$ и проинтегрируем полученное таким образом выражение в пределах $x\in(-b,b)$. Имеем:

$$\Phi = \int_{-b}^{b}\left[W_0 - \sum_{i=1}^{n} S_i(x)\right]^2\cdot dx. \qquad (8)$$

Здесь Φ - строго положительный функционал, параметрически зависящий от n неизвестных давлений P_i [3]. Эти давления следует определять и условия $\Phi \rightarrow min$, откуда:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial P_1}=0;\frac{\partial\Phi}{\partial P_2}=0;\ldots\frac{\partial\Phi}{\partial P_n}=0.\right\} \qquad (9)$$

Результаты определения с использованием изложенной выше методики контактных напряжений представлены на рисунке 3.

Далее положим нагрузку в пределах каждого из граничных элементов равной:

$$P_i(x) = A_i + C_i\cdot x, \qquad (10)$$

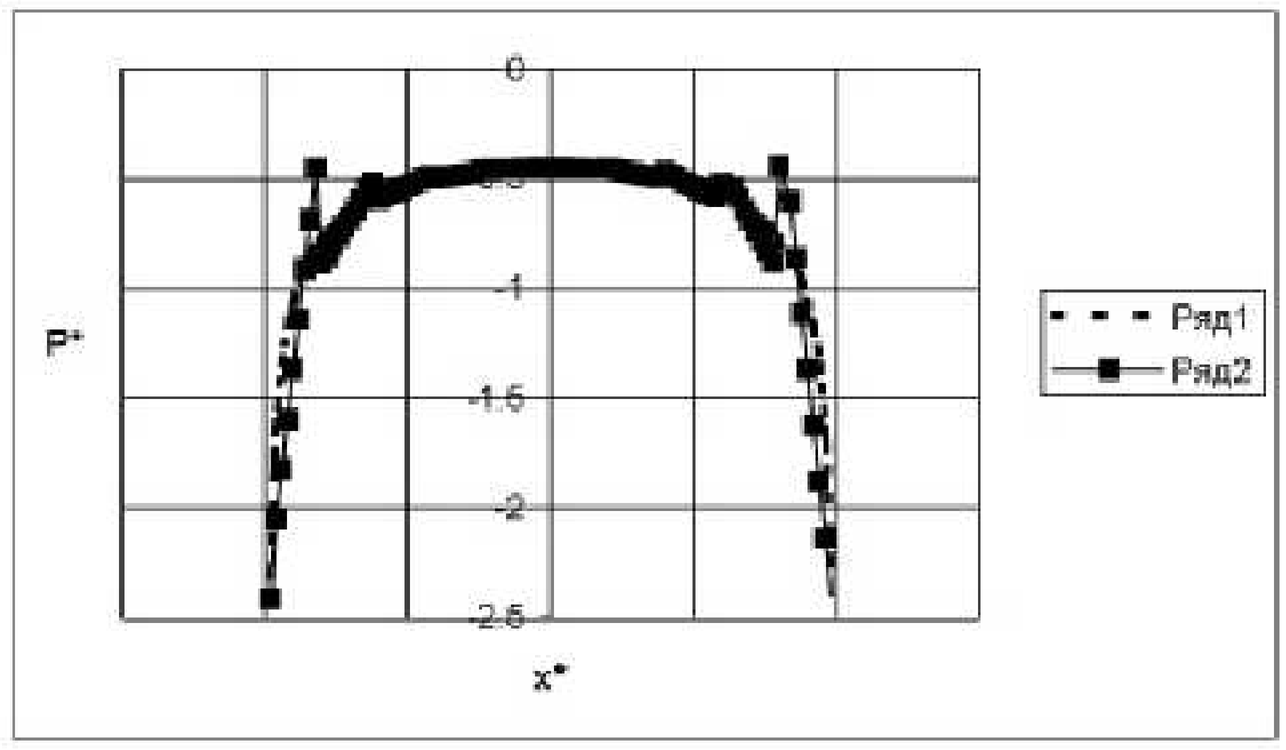

Рис. 4. Распределение напряжений в основании жесткого ленточного фундамента. 1-точное решение; 2 – вариационный метод граничных элементов.

где A_i и C_i - подлежащие определению коэффициенты.

Поступив по аналогии с изложенным выше алгоритмом, найдем:

$$\begin{aligned}S_i(x) &= -\frac{1-\nu}{\pi\cdot G}\cdot\int_{-a}^{+a} P_i(\xi)\cdot\left[ln|x-\xi|-ln|L-\xi|\right]\cdot d\xi = \\ &= -\frac{1-\nu}{\pi\cdot G}\cdot\int_{-a}^{+a}(A_i + C_i\cdot\xi)\cdot\left[ln|x-\xi|-ln|L-\xi|\right]\cdot d\xi\end{aligned} \qquad (11)$$

откуда с учетом (8) и (9) найдем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial A_1}=0;\frac{\partial\Phi}{\partial A_2}=0;\ldots\frac{\partial\Phi}{\partial A_n}=0;\\ &\frac{\partial\Phi}{\partial C_1}=0;\frac{\partial\Phi}{\partial C_2}=0;\ldots\frac{\partial\Phi}{\partial C_n}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Результаты решения сформулированной таким образом задачи определения контактных напряжений представлено на рисунке 4.

Сопоставление кривых на рисунках 2, 3 и 4 позволило нам сделать вывод о том, что предложенная нами модификация метода граничных элементов позволила обеспечить значительно более высокую точность определения контактных напряжений, чем это позволяет сделать классический метод граничных элементов.

ВЫВОДЫ:

Предложенный нами вариант метода граничных элементов имеет большие перспективы для применения при решении практических задач механики грунтов и фундаментостроения. При этом для построения функционала Ф могут быть использованы методы взвешенных невязок, энергетические и им подобные методы [1,3,4,5].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности.- М.: Мир, 1987- 542 с.
2. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. изд. 3-е. - М.: Стройиздат 1984 - 679 с.
3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1974. - 840 с.
4. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина.- М.: Мир, 1988- 352 с.
6. Шаповал А.В. Алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния обладающих свойством ползучести водонасыщенных грунтовых оснований методом граничных элементов// Будівельні конструкції: Міжвідомчий науково-технічний збірник. – Вип. 65.- К.: НДІБК, 2006.-С. 305-310.