

**КЛОВАНИЧ СЕРГЕЙ ФЕДОРОВИЧ**

Профессор, доктор технических наук, профессор Варминско-Мазурского университета в г. Ольштын (Польша), иностранный член Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН).

Основные направления научной деятельности: моделирование работы бетона и железобетона, грунтов при сложном напряженном состоянии, численные исследования железобетонных конструкций, грунтовых сооружений, теоретические и прикладные аспекты метода конечных элементов, нелинейные расчеты на основе МКЭ.

Автор 150 научных работ.

E-mail: adm-inst@ndibk.kiev.ua

УДК 624.131.4

МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СВЯЗНЫХ ГРУНТОВ

Ключевые слова: нормативна база, геотехнічне проектування, основа, фундамент.

Формулюється фізична модель для ґрунту у вигляді асоційованої теорії пластичного плину, заснованої на поверхні нагруження замкненої форми.

Пропонується аналітична форма цієї поверхні. Ураховується дилатансія, деформаційне зміцнення й разупрочнення матеріалу. Модель орієнтована на метод кінцевих елементів у нелінійній постановці. Приводяться приклади розрахунків, що підтверджують вірогідність моделі.

Формулируется физическая модель для грунта в виде ассоциированной теории пластического течения, основанной на поверхности нагружения замкнутой формы.

Предлагается аналитическая форма этой поверхности. Учитывается дилатансия, деформационное упрочнение и разупрочнение материала. Модель ориентирована на метод конечных элементов в нелинейной постановке. Приводятся примеры расчетов, подтверждающие достоверность модели.

The physical model for a ground in a kind ассоциированной the theory of the plastic current based on of a surface нагруження of the closed form is formulated.

The analytical form of this surface is offered. It is considered dilatancy, deformation hardening and разупрочнение a material. The model is focused on a method of final elements in nonlinear statement. The examples of calculations confirming reliability of model are resulted.

ВВЕДЕНИЕ.

Классические теории пластичности, используемые в механике грунтов, основанные на гипотезах Мора-Кулона, Друкера-Прагера, Мизеса-Боткина, применяют для описания предельных поверхностей линейные образующие, приводящие к бесконечным значениям прочности материала при бесконечных уровнях гидростатического сжатия. Это остоятельство обусловлено предположением, что предельное состояние материала наступает только за счет сдвиговых составляющих напряжений, и не учитывался факт возможного разрушения «по отрыву-сжатию» [2]. При этом пластическое течение ассоциируется с поверхностью нагружения, которая строится как модификация (изотропная деформация и (или) перемещение) поверхности прочности и тоже является разомкнутой в области гидростатического сжатия. Между тем, исследования последних лет для большинства материалов свидетельствуют в пользу того, что поверхность пластичности должна быть замкнута как в области изотропного растяжения, так и в области изотропного (гидростатического) сжатия, т.е. в материале реализуется смешанный механизм предельного состояния как по сдвигу, так и по сжатию-растяжению (отрыву) [2,4,5]. В этом направлении опубликовано значительное число работ [7-13]. Однако, в большинстве этих исследований принимают в качестве исходной бесконечную поверхность и замыкают ее в области всестороннего сжатия сферой или эллипсоидом вращения. При этом нарушается методологическое единство описания свойств материала при различных уровнях гидростатического сжатия, поверхность перестает быть гладкой, параметры замыкающей поверхности трудно определимы опытным путем.

Здесь предлагается обобщение известной предельной поверхности Друкера-Прагера, симметричной относительно диагонали пространства главных напряжений, имеющей в качестве образующей замкнутую кривую, в качестве направляющей – криволинейный треугольник. Эта поверхность является исходной для построения поверхностей нагружения. Другими словами, речь идет о варианте ассоциированной теории пластического течения с деформационным упрочнением [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

В общем виде, теория пластического течения с упрочнением формулируется в виде связи между приращениями деформаций и напряжений [10]

$$d\{\sigma\} = [D]_{ep} d\{\varepsilon\}, \tag{1}$$

где $[D]_{ep}$ - упругопластическая матрица

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{[D] \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D]}{\left(\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D] \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} + \Lambda}; \tag{2}$$

$[D]$ – начальная матрица упругости, отвечающая закону Гука для изотропного материала; здесь F и Q - некие функции, называемые функцией нагружения и пластическим потенциалом, при этом $Q \neq F$ соответствует неассоциированной, а $Q = F$ - ассоциированной формулировке теории течения. При разгрузке, когда $F = 0$; $dF < 0$; $(\partial F / \partial \{\sigma\})^T d\{\sigma\} < 0$, второе слагаемое в (2) принимается равным нулю.

Функция Λ называется функцией упрочнения. Если в качестве параметра упрочнения χ принимается работа напряжений на пластических деформациях, а $d\chi = \{\sigma\}^T d\{\varepsilon_p\}$, то функция упрочнения определяется так

$$\Lambda = - \frac{\partial F}{\partial \chi} \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = - \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}. \tag{3}$$

Рассмотрим, так называемый, ассоциированный вариант течения, когда $Q = F$. В этом случае F представляет собой поверхность, по нормали к которой происходит пластическое течение. В случае учета упрочнения эта поверхность всегда проходит через точку текущего напряжения и меняется в процессе нагружения. Однако, в большинстве современных теорий поверхность строится не в шестимерном пространстве напряжений, а в местной текущей цилиндрической октаэдрической системе координат $\sigma_\theta, \tau_\theta, \theta$, где θ - так называемый, угол вида напряженного состояния $0 \leq \theta \leq \pi/3$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z); \tau_\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{J_2}; \theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\sqrt{2} \frac{J_3}{\tau_\theta^3} \right). \tag{4}$$

Здесь J_2 и J_3 - второй и третий инварианты девиатора напряжений

$$J_2 = -s_x s_y - s_y s_z - s_x s_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2;$$

$$s_x = \sigma_x - \sigma_\theta; s_y = \sigma_y - \sigma_\theta; s_z = \sigma_z - \sigma_\theta;$$

$$J_3 = s_x s_y s_z - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{xz}^2 - s_z \tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}.$$

В этой системе координат $\{\sigma\} = \{\sigma_\theta, \tau_\theta\}$ и $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_\theta, \gamma_\theta\}$, где

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z); \gamma_\theta = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{J_{2\varepsilon}};$$

$$J_{2\varepsilon} = -e_x e_y - e_y e_z - e_x e_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2);$$

$$e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_\theta; e_y = \varepsilon_y - \varepsilon_\theta; e_z = \varepsilon_z - \varepsilon_\theta,$$

ε_θ и γ_θ - октаэдрические продольные и сдвиговые деформации; $J_{2\varepsilon}$ - второй инвариант девиатора деформаций. Начальная матрица упругости $[D]$, входящая в выражение (2) в данном случае будет иметь вид

$$[D] = \begin{bmatrix} 3K_\theta & 0 \\ 0 & G_\theta \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где K_θ и G_θ - объемный модуль и модуль сдвига.

Осуществив матричные перемножения и сложение, выражение (2) можно представить в обычной форме

$$[D]_{ep} = \begin{bmatrix} 3K & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где

$$3K = 3K_\theta - \lambda \left(a_{11} + a_{12} \frac{d\varepsilon_\theta}{d\gamma_\theta} \right) / \Delta; \quad G = G_\theta - \lambda \left(a_{22} + a_{12} \frac{d\gamma_\theta}{d\varepsilon_\theta} \right) / \Delta.$$

Здесь

$$a_{11} = 9K_\theta^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta} \right)^2; a_{12} = 3K_\theta G_\theta \frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta} \frac{\partial F}{\partial \tau_\theta}; a_{22} = G_\theta^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_\theta} \right)^2;$$

$$\Delta = - \frac{a_{11} + a_{12}}{3K_\theta} - \frac{\partial F}{\partial \chi} \left(\sigma_\theta \frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta} + \tau_\theta \frac{\partial F}{\partial \tau_\theta} \right).$$

ФУНКЦИЯ НАГРУЖЕНИЯ.

Представим выражение для поверхности нагружения в следующем виде

$$F(\sigma_\theta, \tau_\theta, \theta) = \tau_\theta - A_\theta (b + \sigma_\theta) \sqrt{a - \sigma_\theta} = 0, \tag{7}$$

$$\text{или } \tau_\theta = A_\theta (b + \sigma_\theta) \sqrt{a - \sigma_\theta}.$$

Эта поверхность всегда проходит через точку с координатами текущего нагружения $\sigma_\theta, \tau_\theta$, замкнута с двух сторон и пересекает ось σ_θ в точках $\sigma_\theta = -b$ и $\sigma_\theta = a$ (рис.1 а). Кроме того наложим на (7) следующие условия

$$\tau_\theta|_{\sigma_\theta=0} = c_\theta; \quad \partial \tau_\theta / \partial \sigma_\theta|_{\sigma_\theta=0} = M_\theta, \tag{8}$$

которые позволяют установить следующие соотношения между параметрами кривой (7)

$$A_\theta = \frac{2\sqrt{a}}{2a+b} M_\theta; \quad b = \frac{2ac_\theta}{2aM_\theta - c_\theta}. \tag{9}$$

Параметр a также может быть установлен точно исходя из условий (8), но при этом выражения для него получаются достаточно громоздкими. Но его можно установить по при-

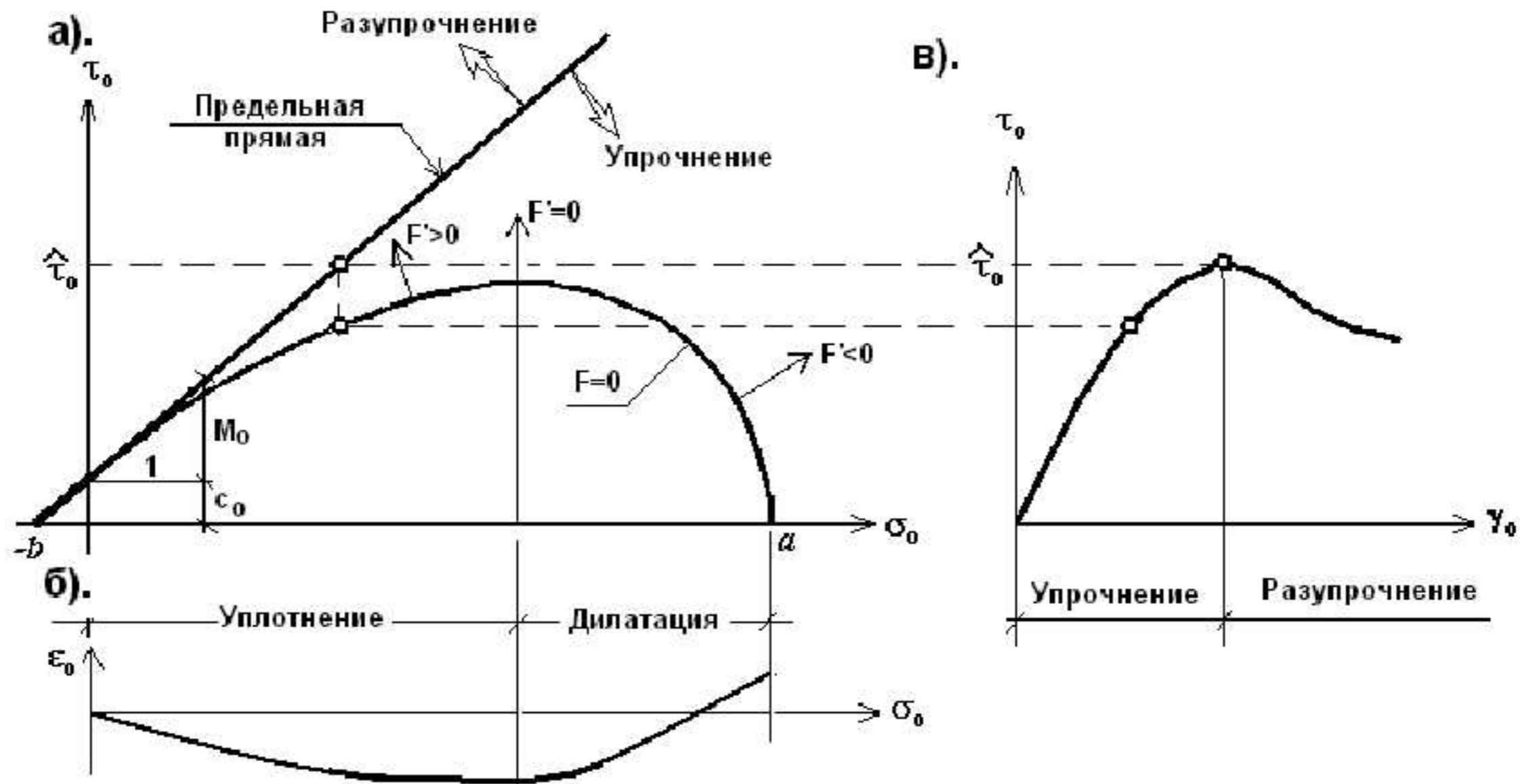


Рис. 1 Функция нагружения

ближенной, более простой зависимости

$$a \approx \frac{\sigma_0}{1 - \left(\frac{\tau_0}{M\sigma_0}\right)^2} + b \quad (10)$$

Рассмотрим подробно участки кривой (6) на рис.1 а. Прежде всего она асимптотически приближается к предельной по Мору прямой $\tau_0 = M_0 \sigma_0 + c_0$. При этом зона под прямой соответствует зоне упрочнения, над прямой – разупрочнения. На условной диаграмме $\tau_0 - \gamma_0$ (рис.1в) это соответственно восходящие и нисходящие участки. Кроме того, производная функции (6) меняет знак на участке от $-b$ до a . Смена знака производной отвечает участкам уплотнения и дилатации на условной диаграмме $\sigma_0 - \epsilon_0$ (рис.1б).

Общий вид поверхности нагружения в пространстве главных напряжений и ее характерные сечения представлены на рис.2а. Меридиональное сечение этой поверхности представлено на рис.2б. Так называемое, девиаторное сечение той поверхности не окружность, а криволинейный треугольник с максимальным τ_1 и минимальным τ_2 радиусами (рис.2в), соответствующими экстремальным значениям угла $\theta = \pi/3$ и $\theta = 0$ при $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ и $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. При этом по Кулону

$$M_1 = 2\sqrt{2} \frac{\sin \varphi}{3 - \sin \varphi}; M_2 = 2\sqrt{2} \frac{\sin \varphi}{3 + \sin \varphi};$$

$$c_1 = 2\sqrt{2} \frac{\cos \varphi}{3 - \sin \varphi} c; c_2 = 2\sqrt{2} \frac{\cos \varphi}{3 + \sin \varphi} c,$$

где φ и c - кулоновские угол внутреннего трения и сцепление.

Интерполяцию между двумя предельными случаями $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ можно осуществить с помощью следующего выражения [3]

$$\rho(\theta) = 1 - 4(1 - g)\cos \vartheta(1 - \cos \vartheta),$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{3} - \theta \quad (11)$$

где $g = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi}$.

При этом $\rho(0)=1$ и $\rho(\pi/3)$. Тогда параметры формулы (9) могут быть определены так $M_0 = \rho(\theta)M_1$; $c_0 = \rho(\theta)c_1$, а

$$A_0 = \rho(\theta)A_1; \quad A_1 = \frac{2\sqrt{a}}{2a + b} M_1. \quad (12)$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЯ НАГРУЖЕНИЯ.

Вектор-столбец производных $\partial F / \partial \{\sigma\}$, входящий в выражения (2) и (3), имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_0} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_0} \right\}. \quad (13)$$

Дифференцируя (6) по σ_0 и τ_0 будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_0} = -A_0 \left(\sqrt{a - \sigma_0} - \frac{b + \sigma_0}{2\sqrt{a - \sigma_0}} \right);$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_0} = 1 - (b + \sigma_0)\sqrt{a - \sigma_0} \frac{\partial A_0}{\partial \tau_0}. \quad (14)$$

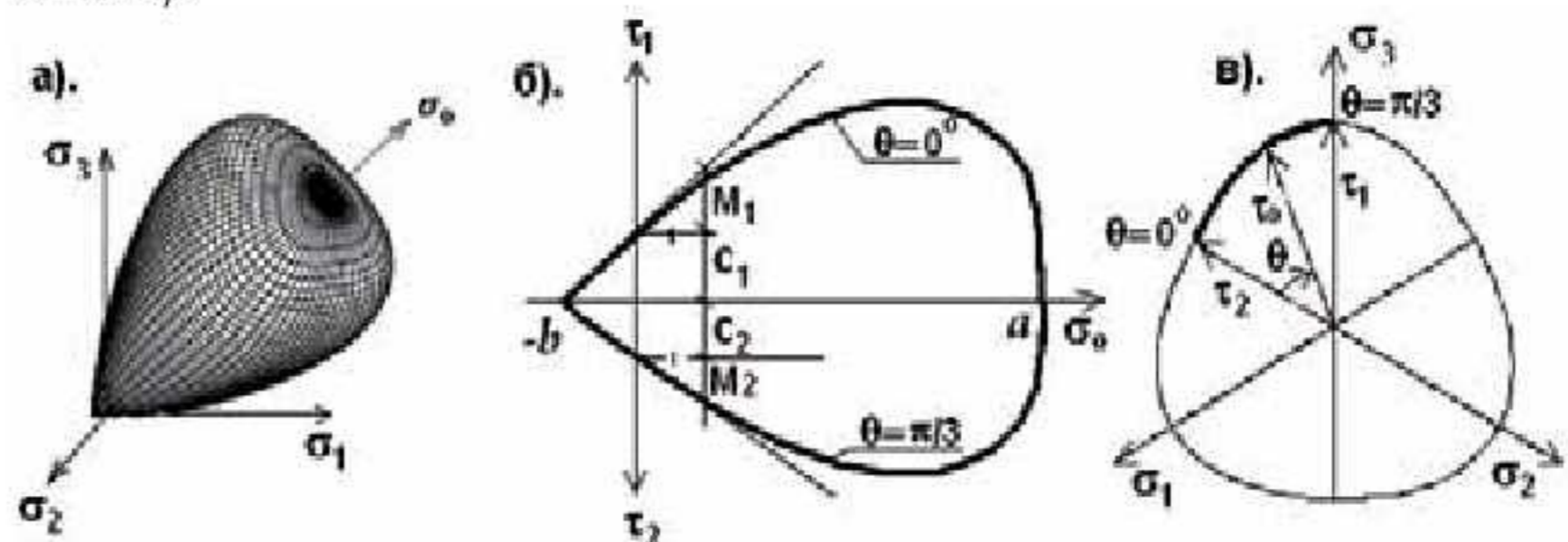


Рис. 2 Общий вид поверхности и ее характерные сечения.

В свою очередь, имея в виду (12) и (4),

$$\frac{\partial A_o}{\partial \tau_o} = A_1 \frac{\partial \rho(\theta)}{\partial \tau_o} = A_1 \frac{\partial \rho(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau_o} = \frac{3\sqrt{2} J_3 A_1}{\tau_o^4 \sqrt{1 - 2 \left(\frac{J_3}{\tau_o^3}\right)^2}} \frac{\partial \rho(\theta)}{\partial \theta}. \quad (15)$$

Дифференцирование выражения (11) дает

$$\frac{\partial \rho(\theta)}{\partial \theta} = -4(1 - g) \sin \vartheta (2 \cos \vartheta - 1) \quad (16)$$

Таким образом все аналитические выражения для производных, входящих в соотношения (2) и (3), установлены.

УПРОЧНЕНИЕ И РАЗУПРОЧНЕНИЕ.

Строго говоря, соотношение (6), представляющее собой функцию нагружения, уже учитывает упрочнение, т.к. соответствующая ей поверхность непрерывно меняет свою форму в процессе нагружения. Параметр a в (10) является функцией напряженного состояния. В принципе выражение для A в соотношениях (2) может быть принято равным нулю. По всей видимости, это было бы справедливым, если бы грунт был абсолютно плотным материалом. Однако большинство грунтов обладает довольно высокой пористостью, которая уменьшается в результате его всестороннего обжатия. Причем, это уменьшение непропорционально напряжению гидростатического обжатия, что обуславливает дополнительную физическую нелинейность материала. Поэтому изменение пористости целесообразно принять в качестве дополнительной меры упрочнения. Объемная пористость грунта определяется в зависимости от октаэдрических нормальных напряжений по известной формуле Терцаги [6]

$$e = e^o - \mu \ln \sigma_o, \quad (17)$$

где e^o - пористость в естественном, ненагруженном, состоянии; μ - параметр, определяемый из компрессионных испытаний.

График этой функции в логарифмических координатах представлен в виде прямой 1 на рис. 3. Объемные деформации, вызванные изменением пористости, определяются так

$$3\varepsilon_o = -\frac{e - e_o}{1 + e}, \quad 3d\varepsilon_o = -\frac{de}{1 + e}. \quad (18)$$

При разгрузке из положения A пористость не восстанавливается до первоначального состояния, имеется остаточная пористость. Восстанавливаемая часть также определяется по формуле Терцаги

$$e = e^A - \delta \ln \sigma_o, \quad (19)$$

где δ - экспериментальный параметр.

График функции (19) представлен на рис.3 (прямая 2). Приращение пластической части объемных деформаций равны $d\varepsilon_o^p = d\varepsilon_o - d\varepsilon_o^e$, где $d\varepsilon_o^e$ - остаточные деформации. Следовательно,

$$3d\varepsilon_o^p = \frac{\mu - \delta}{(1 + e)\sigma_o} d\sigma_o. \quad (20)$$

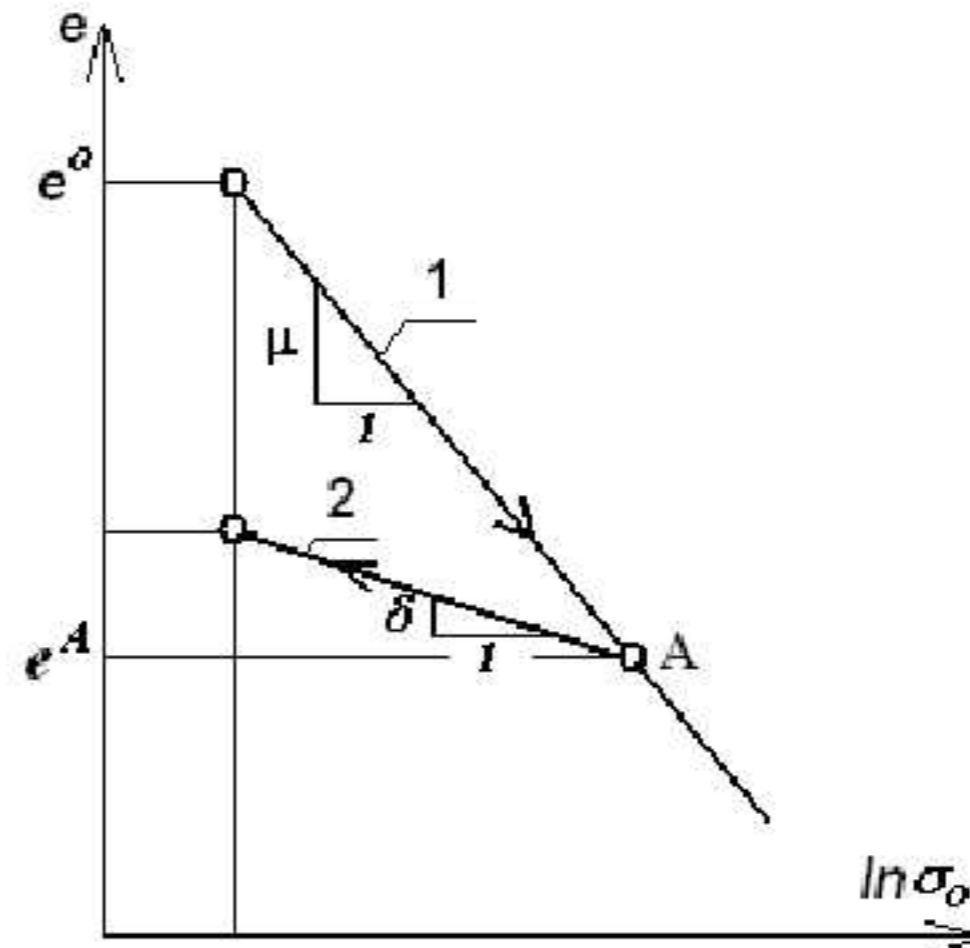


Рис. 3 Изменение пористости.

Принимая в качестве параметра упрочнения работу октаэдрических нормальных напряжений на пластических деформациях $d\chi = \sigma_o d\varepsilon_o^p$, с помощью (20) получим следующее выражение для производной $\partial F / \partial \chi$, входящей в соотношение (3)

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = -\frac{3(1 + e)}{\mu - \delta} \frac{\partial F}{\partial \sigma_o}. \quad (21)$$

Заметим, что при таком подходе разгрузка осуществляется по нелинейному, логарифмическому закону с модулями

$$K_o = \frac{1 + e}{\delta} \sigma_o; \quad G_o = \frac{3K_o(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$$

где ν - коэффициент поперечных деформаций. При этом, как обычно при разгрузке, второе слагаемое в (2) равно нулю [12].

Если напряжения лежат выше предельной прямой (рис.1а), т.е. находятся в зоне разупрочнения, то соотношения теряют смысл, т.к. при этом нарушается известный постулат Друккера. Тем не менее этот эффект в реальных опытах наблюдается, процесс деформирования осуществляется по ниспадающей ветви диаграммы (рис.1в). Поэтому, чтобы его учесть, выражение (22) представим в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = \frac{1}{\tau_o} \frac{\partial F}{\partial \tau_o} \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o^p} = \frac{1}{\tau_o} G_p \frac{\partial F}{\partial \tau_o} = \frac{1}{\tau_o} \frac{G_o G}{G_o - G} \frac{\partial F}{\partial \tau_o}, \quad (22)$$

где G_p - пластический модуль сдвига. Касательный упругопластический модуль G определим, задав аналитическое выражение для кривой на рис.1в, например, в виде, аналогичном для диаграммы деформирования разупрочняющихся материалов при одноосном сжатии [16]

$$\xi = \frac{k\eta}{1 + (k - 2)\eta + \eta^2}, \quad (23)$$

где $\xi = \frac{\tau_o}{\hat{\tau}_o}$; $\eta = \frac{\gamma_o}{\hat{\gamma}_o}$; $k = G_o \frac{\hat{\gamma}_o}{\hat{\tau}_o}$.

Здесь $\hat{\gamma}_o$ и $\hat{\tau}_o$ - координаты вершины диаграммы. Дифференцирую (24) по γ_o получим

$$G = \frac{\partial \tau_o}{\partial \gamma_o} = G_o \frac{1 - \eta^2}{[1 + (k - 2)\eta + \eta^2]} \quad (24)$$

ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ.

Описанная модель тестировалась в составе вычислительного комплекса "Concord" [3], предназначенном для решения физически нелинейных задач в инкрементальной форме методом конечных элементов. В качестве тестового примера рассматривался расчет одного восьмиузлового объемного конечного элемента прямоугольной формы единичных размеров (рис.4а), с помощью которого моделировалось сложное напряженное состояние. Нагрузки к элементу прикладывались в горизонтальном и вертикаль-

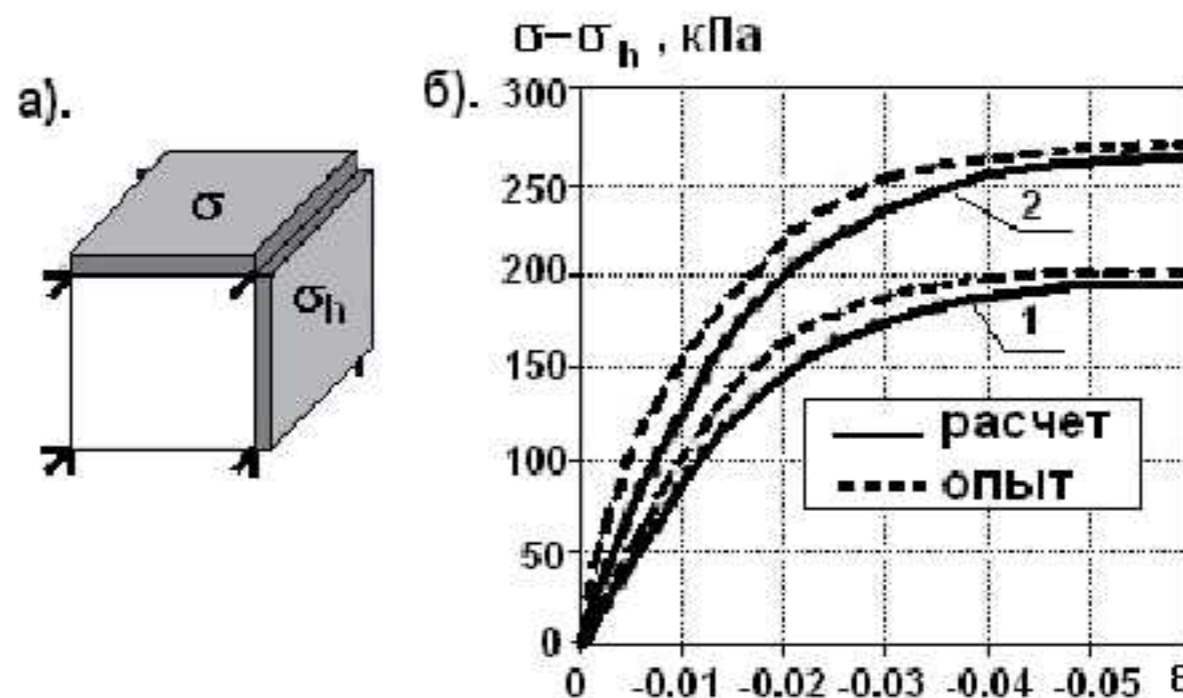


Рис. 4 Тестовая задача.

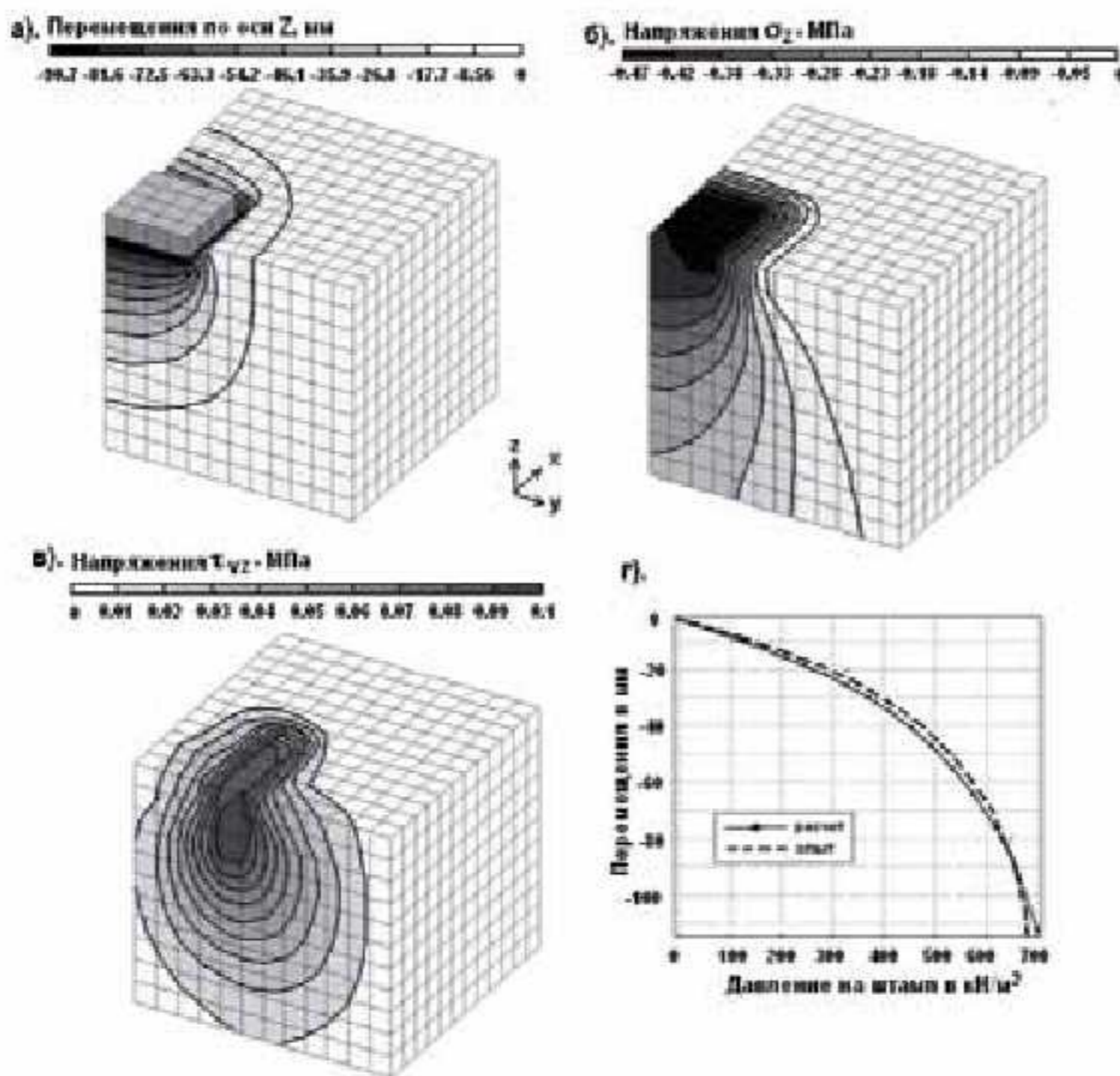


Рис. 5 Задача о штампе.

ном направлениях ступенями, причем на первой ступени их величины были равны значениям, создающим равномерное гидростатическое сжатие $\sigma_h = 100$ кПа. На последующих ступенях прикладывалась только вертикальная нагрузка вплоть до наступления предельного состояния. На рис.4б представлены данные расчетов для грунта со следующими характеристиками: 1.- $E=20$ МПа, $\nu = 0.2$, $\varphi=30^\circ$, $c=0$; 2.- $E=30$ МПа, $\nu = 0.2$, $\varphi = 35^\circ$, $c=0$. Результаты расчетов сравнивались с данными [15].

Приведем результаты численного решения МКЭ еще одной тестовой задачи о действии квадратного жесткого штампа на грунт и сопоставим результаты расчетов с экспериментальными данными [7]. Размер штампа 40x40 см. Нагрузка в испытаниях увеличивалась ступенями по 40кН/м². Для расчета использовались объемные изопараметрические восьмиузловые конечные элементы. Рассматривалась только симметричная часть образца. Расчетные характеристики грунта, отвечающие экспериментальным данным [7]: $E=2.5$ МПа, $\varphi=18^\circ$, $c=0.045$ МПа. Коэффициент Пуассона $\nu=0.35$. Нагружение в расчете принималось аналогично опытному. Результаты расчета осадок штампа по ступеням нагружения представлены на рис.5г. Здесь же даны изолинии перемещений (рис.5а) и напряжений (рис.5 б,в) при $q=680$ кН/м². Из рисунков видно, что расчетный характер деформированного и напряженного состояния грунта под штампом отвечает истинному.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРИ

1. Филоненко-Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. Сб.- 1954. - Вып.19. С.36-48.
2. Зарецкий Ю.К. Вязко-пластичность грунтов и расчеты сооружений. - М.:Стройиздат, 1988. - 352 с.
3. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. - Запорожье:ИПО Запорожье, 2009. - 400 с.
4. Дидух Б.И. Упругопластическое деформирование грунтов. - М.: Изд-во Унив. Дружбы народов, 1987. - 166 с.
5. Гольдин А.Л., Рассказов Л.Н. Проектирование грунтовых плотин. - М.: Изд-во ассо-циации строительных вузов Москвы, 2001. -384 с.
6. Терцаги К. Теория механики грунтов. - М.: Стройиздат, 1961. - 507 с.
7. Балюра. М.В. Горизонтальные перемещения в основании под жестким штампом// Ос-нования, фундаменты и механика грунтов. - 1973. -№6. -С.39-41.
8. Stein E.,Ramm E.,Rabk E. and other. Error-Controlled Adaptive Finite Element in Solid Mechsnics. - Willey, West Sussex PO198SQ, England, 2003. - 410 p.
9. Brinkgreve R.B.J., Vermeer P.A. Plaxis. Finite Element Code for Soil and Rock Analysis. Materials Models Manual. Part 3. -A.A.Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1998.
10. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Metod. Fifth edition. v.2. Solid Mechanics. - Butterworth-Heinmann, 2000. - 459 p.
11. Bigoni D., Piccolroaz A. Yield Criteria for Quasibrittle and Frictional Materials// Int. J. of Solid and Structures. - №3. - 2004. - pp. 2855-2878.
12. Roscoe K.J, Schofield A.N. Mechanical Behavior of an Idealised "Wet" Clay// Proc. European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering.- v.1.- 1963. - pp.47-54.
13. Collins I.F., Hilder T. A theoretical Framework for Constructing Elastic/Plastic Constitutive Models of Triaxial Test// Int. J. for Numerical and Analytical Method in Geomechanics.- №26.- 2002. - pp. 1313-1347.
14. Borja R.I., Sama K.M., Sanz P.S. On the Numerical integration of Three-invariant Elastoplastic Constitutive Models//Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. -192. - 2003. - pp. 1227-1258.
15. Burland J.B. The Yielding and Dilatation of Clay.(Correspondence)// Geotechnique.- 1965. - V.15. -P.211-214.
16. Liu T.C.Y., Nilson A.H., Slate F.O. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression//ACI Journal. - v.69.- 1972.- pp. 291-295.