



**ДЕМЧУК МИКОЛА БОРИСОВИЧ**

Магістр природничих наук, випускник заочного відділення аспірантури Національного університету водного господарства та природокористування.

Основні напрямки наукової діяльності: математичне моделювання стабілізації ґрунту.

Автор більше 30 наукових праць.

E-mail: nbdemch@gmail.com



**НАКОНЕЧНИЙ ОЛЕКСАНДР ГРИГОРОВИЧ**

Доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Основні напрямки наукової діяльності: проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності та проблеми системного аналізу процесів різної природи.

Автор більше 200 наукових праць.

E-mail: nakonechniy@unicyb.kiev.ua

УДК 624-048.033.26.621.55

## ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ РОЗПОДІЛУ КОНЦЕНТРАЦІЇ ЦЕМЕНТУ В ЗАКРІПЛЮВАНОМУ ҐРУНТОВОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

*Ключові слова: цементация ґрунту, числовий аналіз, двовимірні моделі, метод скінченних різниць.*

*Виконана числова перевірка того, що невизначеністю у кінцевому положенні фронту нагнітання, обумовленою невизначеністю у виборі методу інтерполювання цього фронту на кожному часовому шарі, можна знехтувати, оцінюючи похибку методу розрахунку цього положення згідно моделі цементации ґрунту з вільною рухомою межею.*

*Проверено численно, что неопределённостью в конечном положении фронта нагнетания, обусловленной неопределённостью в выборе метода интерполирования этого фронта на каждом временном слое, можно пренебречь, оценивая погрешность метода расчёта этого положения согласно модели цементации ґрунта со свободной движущейся границей.*

*It is checked numerically that one can neglect the uncertainty in the final injection front position due to the uncertainty in the choice of a method of interpolation of this front on every time layer estimating the truncation error of calculation of this position according to the grouting model that is a problem with a free moving boundary.*

**Вступ.** Інколи виникає необхідність прокласти тунель у крейдяній породі. Суха крейда є міцною породою. Однак за достатньо великого вмісту вологи в ній вона стає м'якою [1]. Тому перед прокладанням тунелю в крейдяній породі її варто закріпити, щоб мати достатньо часу для встановлення тимчасових кріплень за дощової погоди. Цементация, за якої структура ґрунту не руйнується, є тим методом його стабілізації, що зазвичай використовується у цьому випадку. Під час цементации цементний розчин через інжектор під тиском нагнітається в ґрунт, що закріплюється [2]. Від того наскільки якісно закріплено ґрунт суттєво залежить продуктивність прокладки тунелю в ньому. Режим цементации визначається еволюцією просторового розподілу концентрації цементу в ґрунті, який закріплюється [3]. Тому математичне моделювання цієї еволюції є важливим. Тиск в інжекторі під час цементации вищезгаданого типу може досягати  $12 \cdot 10^5$  Па [4]. У роботі [5] наведено аргументи на користь того, що за тисків нагнітання такого порядку еволюцію просторового розподілу концентрації цементу в ґрунті можна моделювати задачею з вільною рухомою межею. Однак

порівняння результатів розрахунків згідно моделей останнього класу з результатами лабораторних досліджень, ще не виконувалось. Інформативність такого порівняння залежить від похибок величин, що порівнюються [6]. Тому важливо коректно оцінювати похибки розрахунків. У роботі [7] представлено модифікацію числового моделювання [5], в якій забезпечено правомірність використання континуального підходу. Криволінійні сітки, на яких виконуються розрахунки в роботі [7], можуть мати хаотичні розміщення своїх вузлів на деяких часових шарах [5]. Однак це не призводить до неузгодженості результатів цих розрахунків [7]. Тому різниці схеми, згідно яких виконуються розрахунки в роботі [7], є умовно стійкими. Таким чином, оцінюючи похибки цих розрахунків, похибками заокруглення можна знехтувати. У роботі [7] похибка методу розрахунку кінцевого положення фронту нагнітання оцінено за припущення, що невизначеністю кінцевого положення вільної межі, яка обумовлена невизначеністю у виборі методу інтерполяції фронту нагнітання на кожному часовому шарі, можна знехтувати. Метою даної роботи є числова перевірка цього припущення.

**Постановки задач.** У даній роботі ми розглядаємо чотири постановки задачі [7]. У випадках постановок № 1 та № 3 ми вважаємо, що безмежно довга траншея вирита під фундаментом інжектора. Її ширина рівна  $2r_0$ , а її глибина рівна  $h_0$ . У постановках № 2 та № 4 замість траншеї ми маємо свердловину з радіусом  $r_0$  та глибиною  $h_0$ . У всіх постановках в'язучий інфільтрат нагнітається в інжектор за постійного тиску  $p_0$  (див. Рис. 1). У постановках № 1 та № 2 вважається, що скелет ґрунту є абсолютно твердим, а в постановках № 3 та № 4 вважається, що він є пружним. У кожному випадку  $h_0 \gg r_0$  фронт нагнітання (крива  $\Gamma_4$  на Рис. 1) є вільною межею та потрібно знайти її еволюцію в часі й просторі.

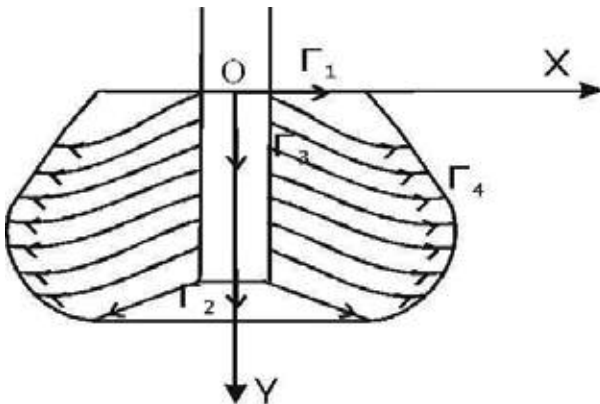


Рис.1. Постановки задач

**Інтерполяція вільної межі.** У даній роботі ми виконуємо 10 обчислень, які визначені в роботі [7], і використовуємо різні функції для інтерполяції вільних меж на кожному часовому шарі. Нехай нам відомі значення інтерпольованої функції  $f(y_p)$  у вузлових точках  $y_p$ , де  $p=0, n$ , що лежать на відрізку  $[0, b(t)]$ , на якому інтерполюється фронт нагнітання.

У даній роботі зручно ввести такі позначеннями:

$$F_k^{(m)} = (f(y_k), f(y_{k+1}), \dots, f(y_{k+m})), Y_k^{(m)} = (y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}); \quad (1)$$

$$\tilde{F}_k^{(m)} = (f(y_{n-k}), f(y_{n-k-1}), \dots, f(y_{n-k-m})); \quad (2)$$

$$\tilde{Y}_k^{(m)} = (\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}_{k+m}), \quad (3)$$

де  $k$  та  $m$  є невід'ємними цілими числами такими, що  $0 \leq k \leq n-m$ , а  $\tilde{y}_i = b(t) - y_{n-i}$ , де  $i=0, n$ . Нижче  $P_m(y, F_k^{(m)}, Y_k^{(m)})$  позначає інтерполяційний поліном [8], побудований з використанням значень інтерпольованої функції  $f(y_k), f(y_{k+1}), \dots, f(y_{k+m})$  у вузлах  $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}$ . Оскільки в роботі [7] одиничний вектор нормалі до вільної межі обраховується в кожній вузловій точці на кожному часовому шарі, то всюди нижче ми вважаємо, що  $0 < s \leq n-1$ . Якщо вузли інтерполяції занумеровані в порядку зростання значень їх ординат ( $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b(t)$ ), то ми визначаємо кусково-поліноміальний локальний сплайн  $\phi(y, s, j, Y_0^{(j)}, F_0^{(j)})$ , де  $j$  є цілим числом і  $0 \leq j \leq s$ , який є двічі неперервно-диференційованим на відрізку  $[0, b(t)]$ , таким чином

$$\phi(y, s, j, Y_0^{(j)}, F_0^{(j)}) = \begin{cases} P_s(y, F_0^{(s)}, Y_0^{(s)}) & \text{де } y_0 \leq y \leq y_j, \\ Q_{2s+1}^{(j)}(y, F_{k-j}^{(s+1)}, Y_{k-j}^{(s+1)}) & \text{де } y \in [y_k, y_{k+1}], \\ i \ k = j, j+1, \dots, n+j-s-1, \\ P_s(y, F_{n-s}^{(s)}, Y_{n-s}^{(s)}) & \text{де } y_{n+j-s} \leq y \leq y_n \end{cases} \quad (4)$$

У рівнянні (4)  $Q_{2s+1}^{(j)}(y, F_{k-j}^{(s+1)}, Y_{k-j}^{(s+1)})$  є поліном степені не вище ніж  $2s+1$ , який задовольняє таким рівнянням:

$$\left. \frac{d^m Q_{2s+1}^{(j)}(y, F_{k-j}^{(s+1)}, Y_{k-j}^{(s+1)})}{dy^m} \right|_{y=y_k} = \left. \frac{d^m P_s(y, F_{k-j}^{(s)}, Y_{k-j}^{(s)})}{dy^m} \right|_{y=y_k}; \quad (5)$$

$$\left. \frac{d^m Q_{2s+1}^{(j)}(y, F_{k-j}^{(s+1)}, Y_{k-j}^{(s+1)})}{dy^m} \right|_{y=y_k^+} = \left. \frac{d^m P_s(y, F_{k-j+1}^{(s)}, Y_{k-j+1}^{(s)})}{dy^m} \right|_{y=y_k^+}, \quad (6)$$

де  $y_k^+ = y_{k+1}$ ,  $k = j, n+j-s-1$ ,  $m = \overline{0, s}$ .

**Теорема 1.** Існує один і тільки один поліном степені не вище ніж  $2s+1$ , який задовольняє рівняння (5) і (6). **Доведення.** В. С. Рябенський доводить цю теорему, вважаючи, що  $j = \overline{0, s-1}$  [8]. Однак у своєму доведенні він ніде не використовує той факт, що  $y \neq s$ . Тому ця теорема є справедливою і для випадку  $j=s$ . Теорему доведено. Нижче ми вважаємо, що  $n > 5$ . Зручно ввести таку заміну змінних

$$\tilde{y} = b(t) - y, \quad (7)$$

і таку нумерацію точок, в які ця заміна відображає вузли інтерполяції,

$$\tilde{y}_p = b(t) - y_{n-p}, \quad (8)$$

де  $p = \overline{0, n}$ . Функцію  $\tilde{f}(\tilde{y})$  ми визначаємо таким чином

$$\tilde{f}(\tilde{y}) = f(b(t) - y), \quad (9)$$

**Теорема 2.** Правильними є такі рівності

$$\phi(y, 1, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = \phi(\tilde{y}, 1, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)}); \quad (10)$$

$$\phi(y, 2, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = \phi(\tilde{y}, 2, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)}). \quad (11)$$

**Доведення.** Якщо  $y_k \leq y \leq y_{k+1}$ , де  $k = \overline{0, n-1}$ , то з рівнянь (7) і (8) слідує, що  $\tilde{y}_{n-k-1} \leq \tilde{y} \leq \tilde{y}_{n-k}$ . Крім того з цих рівнянь слідує, що  $y - y_p = \tilde{y}_{n-p} - \tilde{y}$ , де  $p = \overline{0, n}$ . З рівнянь (8) і (9)

слідуює, що  $\tilde{f}(\tilde{y}_p) = f(y_{n-p})$ , де  $p = \overline{0, n}$ . З рівняння (8) слідуює, що  $\tilde{y}_k - \tilde{y}_r = y_{n-r} - y_{n-k}$ , де  $k, r = \overline{0, n}$ . Тому з явного вигляду інтерполяційного поліному [8] слідуює, що

$$P_s(y, F_{k-s+1}^{(s)}, Y_{k-s+1}^{(s)}) = P_s(b(t) - y, \tilde{F}_{n-k-1}^{(s)}, \tilde{Y}_{n-k-1}^{(s)}), \quad (12)$$

де  $k = \overline{s-1, n-1}$  і  $s = \overline{1, 2}$ . З рівнянь (5)-(8) слідуює, що

$$\left. \frac{d^m Q_{2s+1}^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{F}_p^{(s+1)}, \tilde{Y}_p^{(s+1)})}{d\tilde{y}^m} \right|_{\tilde{y}=\tilde{y}_p} = \left. \frac{d^m P_s(\tilde{y}, \tilde{F}_p^{(s)}, \tilde{Y}_p^{(s)})}{d\tilde{y}^m} \right|_{\tilde{y}=\tilde{y}_p}; \quad (13)$$

$$\left. \frac{d^m Q_{2s+1}^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{F}_p^{(s+1)}, \tilde{Y}_p^{(s+1)})}{d\tilde{y}^m} \right|_{\tilde{y}=\tilde{y}_p^+} = \left. \frac{d^m P_s(\tilde{y}, \tilde{F}_{p+1}^{(s)}, \tilde{Y}_{p+1}^{(s)})}{d\tilde{y}^m} \right|_{\tilde{y}=\tilde{y}_p^+}, \quad (14)$$

де  $\tilde{y}_p^+ = \tilde{y}_{p+1}$ ,  $s = \overline{1, 2}$ ,  $m = \overline{0, s}$ ,  $p = \overline{0, n-1-s}$ .  $Q_{2s+1}^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{F}_p^{(s+1)}, \tilde{Y}_p^{(s+1)})$  є поліномом степені не вище ніж  $2s+1$  по відношенню до  $\tilde{y}$  і заміна змінних (7) є лінійною. Тому  $Q_{2s+1}^{(0)}(b(t) - y, \tilde{F}_p^{(s+1)}, \tilde{Y}_p^{(s+1)})$  є поліномом степені не вище ніж  $2s+1$  по відношенню до  $y$ . Якщо  $k = n-p-1$ , то з рівнянь (12)-(14) слідуює, що

$$\left. \frac{d^m Q_{2s+1}^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{F}_{n-k-1}^{(s+1)}, \tilde{Y}_{n-k-1}^{(s+1)})}{d\tilde{y}^m} \right|_{\tilde{y}=y_k} = \left. \frac{d^m P_s(y, F_{k-s}^{(s)}, Y_{k-s}^{(s)})}{dy^m} \right|_{y=y_k}; \quad (15)$$

$$\left. \frac{d^m Q_{2s+1}^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{F}_{n-k-1}^{(s+1)}, \tilde{Y}_{n-k-1}^{(s+1)})}{d\tilde{y}^m} \right|_{\tilde{y}=y_k^+} = \left. \frac{d^m P_s(y, F_{k-s+1}^{(s)}, Y_{k-s+1}^{(s)})}{dy^m} \right|_{y=y_k^+}, \quad (16)$$

де  $y_k^+ = y_{k+1}$ ,  $\tilde{y}$  обраховується згідно рівняння (7)  $s = \overline{1, 2}$ ,  $m = \overline{0, s}$ ,  $k = \overline{s, n-1}$ . З рівнянь (5)-(7), (15), (16) і теореми 1 слідуює, що

$$Q_{2s+1}^{(s)}(y, F_{k-s}^{(s+1)}, Y_{k-s}^{(s+1)}) = Q_{2s+1}^{(0)}(b(t) - y, \tilde{F}_{n-k-1}^{(s+1)}, \tilde{Y}_{n-k-1}^{(s+1)}), \quad (17)$$

де  $s = \overline{1, 2}$ ,  $m = \overline{0, s}$ ,  $k = \overline{s, n-1}$ . З рівнянь (4), (12) і (17) слідуює, що рівняння (10) і (11) є правильними. Теорему доведено.

Якщо  $u \in [y_p, y_p]$ , де  $p = \overline{1, n}$ , то  $g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ , де  $m = \overline{1, 4}$ , є кубічним поліномом із властивостями [9]:

$$\partial g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) / \partial y|_{y=y_0} = d P_m(y, F_0^{(m)}, Y_0^{(m)}) / dy|_{y=y_0}; \quad (18)$$

$$\partial g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) / \partial y|_{y=y_n} = d P_m(y, F_{n-m}^{(m)}, Y_{n-m}^{(m)}) / dy|_{y=y_n}, \quad (19)$$

$g(y_p, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = f(y_p)$ , де  $p = \overline{0, n}$ ,  $\partial^2 g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) / \partial y^2$  є неперервною функцією на відрізьку  $[0, b(t)]$ .

Нижче якщо  $y_{i+1} < y_p$ , де  $0 \leq i \leq n-1$ , то  $[y_p, y_{i+1}] = \emptyset$ . У роботі [7] вільна межа інтерполюється на кожному часовому шарі функцією визначеною таким чином. За умови  $y \geq y_n$  або за умов  $y \in [y_n, y_n]$  та  $u \notin [y_k, y_{k+1}]$ , де  $k = \overline{0, n-2}$ ,  $\tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = P_2(y, F_{n-2}^{(2)}, Y_{n-2}^{(2)})$ , інакше якщо  $u \notin [y_p, y_{r+1}]$ , де  $r$  є найменшим серед цілих чисел  $k$  таких, що  $1 \leq k \leq n-2$  та  $u \in [y_k, y_{k+1}]$ , тоді  $\tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = Q_5^{(1)}(y, F_{r-1}^{(3)}, Y_{r-1}^{(3)})$ , інакше  $\tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = P_2(y, F_0^{(2)}, Y_0^{(2)})$ . З рівняння (4) та цього визначення функції  $\tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$  слідуює, що якщо вузли інтерполяції занумеровані в порядку зростання їх ординат, то  $\tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = \varphi(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ . У даній роботі ми інтерполюємо вільну межу на кожному часовому шарі функціями:  $\tilde{\varphi}(y, 1, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\tilde{\varphi}(b(t) - y, 1, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$ ,  $\tilde{\varphi}(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\tilde{\varphi}(b(t) - y, 2, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$ ,  $\tilde{\varphi}(y, 3, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\tilde{g}(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ , де  $m = \overline{1, 4}$ , — які визначені аналогічно тому, як визначена функція  $\tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ . А саме якщо вузли інтерполяції

занумеровані в порядку зростання їх ординат, то ці функції співпадають відповідно з функціями:  $\varphi(y, 1, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\varphi(b(t) - y, 1, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$ ,  $\varphi(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\varphi(b(t) - y, 2, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$ ,  $\varphi(y, 3, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ , де  $m = \overline{1, 4}$ . Більше того з рівнянь (10) і (11) слідуює, що якщо вузли інтерполяції занумеровані в порядку зростання їх ординат, то  $\tilde{\varphi}(b(t) - y, 1, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$  і  $\tilde{\varphi}(b(t) - y, 2, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$  співпадають відповідно з  $\varphi(y, 1, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$  і  $\varphi(y, 2, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ .

**Результати числового експерименту.** Нижче, аналізуючи кінцеві положення рухомих меж, які отримані чисельно, ми оцінюємо міру різниці між двома сплайнами  $f_1(y)$  і  $f_2(y)$ , що інтерполюють кінцеві положення фронтів нагнітань, як

$$\varepsilon = \max_{y \in [0, L]} |f_1(y) - f_2(y)| / \sqrt{y^2 + (f_1(y))^2}. \quad (20)$$

У рівнянні (20)  $L = \max\{y_1^{\max}, y_2^{\max}\}$ , де  $y_1^{\max}$  і  $y_2^{\max}$  є найменшими додатними ординатами, які задовольняють умовам:  $f_1(y_1^{\max}) = 0$  та  $f_2(y_2^{\max}) = 0$ .

У таблиці 1  $\varepsilon_i$  є оцінкою похибки методу для розрахунку №  $i$  кінцевого положення фронту нагнітання, де  $i = \overline{1, 10}$ , яка отримана в роботі [7] за припущення, що вкладом невизначеності в кінцевому положенні вільної межі, яка обумовлена невизначеністю у виборі методу інтерполювання фронту нагнітання на кожному часовому шарі, можна знехтувати. Щоб перевірити його коректність чисельно, нижче ми аналізуємо числові розв'язки, вважаючи, що це припущення є правильним. Оскільки за цього аналізу не виникає протиріч, то він є числовою перевіркою цього припущення. Метою цього аналізу є знаходження функції для інтерполювання фронту нагнітання на кожному часовому шарі не гіршої ніж  $\tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ . У якості кандидатів ми розглядаємо функції, використовуючи які ми можемо отримувати кінцеві позиції фронту нагнітання у всіх десяти обчисленнях, що ми розглядаємо. Результати числових розрахунків вказують на те, що ми не можемо отримати кінцеві позиції фронту нагнітання в обчисленнях № 1 та № 2 [7], інтерполюючи фронт нагнітання на кожному часовому шарі функцією  $\tilde{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ , і щонайменше в п'яти з десяти розрахунків, які визначені в роботі [7], інтерполюючи вільну межу на кожному часовому шарі однією з таких функцій:  $\tilde{\varphi}(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\tilde{\varphi}(b(t) - y, 2, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$ ,  $\tilde{\varphi}(y, 3, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\tilde{g}(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ , де  $m = \overline{2, 4}$ . Таким чином результати числових розрахунків вказують на те, що функція  $\tilde{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$  краще інтерполює вільну межу на кожному часовому шарі, ніж жодна з функцій  $\tilde{\varphi}(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\tilde{\varphi}(b(t) - y, 2, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$ ,  $\tilde{\varphi}(y, 3, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\tilde{g}(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ . де  $m = \overline{2, 4}$ . Оскільки сплайн  $\varphi(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$  є найбільш цікавим для практичних застосувань [8], то ми у якості кандидатів на шукану функцію розглядаємо функції з такого одно-параметричного сімейства функцій  $\alpha \cdot \tilde{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) + (1 - \alpha) \cdot \tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ , де  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Якщо ми виконуємо розрахунок №  $i$  [7] кінцевих положень фронтів нагнітань, інтерполюючи вільні межі на кожному часовому шарі функціями  $\tilde{\varphi}(y, 1, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ ,  $\tilde{\varphi}(b(t) - y, 1, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$  і  $\alpha \cdot \tilde{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) + (1 - \alpha) \cdot \tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ , то міру різниці між кожною з цих позицій і відповідною

позицією, яка отримана в роботі [7], ми відповідно позначаємо як  $\delta_i^{(1,0)}$ ,  $\delta_i^{(1,1)}$  та  $\delta_i(\alpha)$ , де  $i = \overline{1,10}$ . У розрахунку № 1 [7] ми не можемо отримати кінцеве положення фронту нагнітання, інтерполюючи вільну межу на кожному часовому шарі функцією  $0.8 \cdot \bar{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) + 0.2 \cdot \bar{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ . Ми отримуємо значення  $\delta_i^{(1,0)}$ ,  $\delta_i^{(1,1)}$  та  $\delta_i(0.7)$ , де  $i = \overline{1,10}$ , які представлені в таблиці 1. Оскільки  $\delta_i(0.7) < \delta_i^{(1,1)}$  та  $\delta_i(0.7) < \delta_i^{(1,0)}$ , де  $i = \overline{1,10}$ , ми можемо стверджувати, що функція  $0.7 \cdot \bar{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) + 0.3 \cdot \bar{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$  краще підходить для інтерполяції вільної межі на кожному часовому шарі, ніж функції  $\bar{\varphi}(b(t) - y, 1, 0, \bar{Y}_0^{(n)}, \bar{F}_0^{(n)})$  і  $\bar{\varphi}(y, 1, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ . З даних, які наведені в таблиці 1, слідує, що  $\delta_3(0.7) \approx \delta_4(0.7)$ ,  $\delta_3(0.7)/2 > \delta_i(0.7)$  і  $\delta_4(0.7)/2 > \delta_i(0.7)$ , де  $i = \overline{1,2,5,10}$ . Результуюча похибка методу числового розрахунку оцінюється як корінь квадратний суми квадратів похибок із різних джерел [10]. Тому, щоб знайти необхідну функцію, ми знайдемо на відрізку  $[0,0.7]$  таке значення  $\alpha$ , за якого  $|\tilde{\varepsilon}_i(\alpha) - \varepsilon_i| < 0.1\%$ , де  $i = \overline{3,4}$  та  $\tilde{\varepsilon}_i(\alpha) = \sqrt{(\delta_i(\alpha))^2 + (\varepsilon_i)^2}$ . У таблиці 2 представлені значення  $\delta_i(\alpha)$  та  $\tilde{\varepsilon}_i(\alpha)$ , де  $i = \overline{3,4}$ , за різних значень параметра  $\alpha$  зі сегмента  $[0,0.7]$ . З даних, які наведені в таблиці 2, можна зробити висновок, що функцію  $\alpha \cdot \bar{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) + (1 - \alpha) \cdot \bar{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$  можна використовувати для інтерполювання вільної межі на кожному часовому шарі тільки якщо  $0 \leq \alpha \leq 0.002$ . Оскільки  $\delta_3(0.7)/2 > \delta_i(0.7)$  і  $\delta_4(0.7)/2 > \delta_i(0.7)$ , де  $i = \overline{1,2,5,10}$ , слід очікувати, що  $|\tilde{\varepsilon}_i(0.002) - \varepsilon_i| < 0.1\%$ , де  $\tilde{\varepsilon}_i(0.002) = \sqrt{(\delta_i(0.002))^2 + (\varepsilon_i)^2}$  та  $i = \overline{1,2,5,10}$ . У таблиці 1 представлені значення  $\delta_i(0.002)$  та  $\tilde{\varepsilon}_i(0.002)$ , де  $i = \overline{1,10}$ . З даних, які наведені в таблиці 1, слідує, що, як і передбачалось,  $|\tilde{\varepsilon}_i(0.002) - \varepsilon_i| < 0.1\%$ , де  $i = \overline{1,10}$ . Таким чином оскільки ніяких неузгодженостей не виникає у даному аналізі числових розв'язків, то  $\tilde{\varepsilon}_i(0.002)$  можна використовувати у якості оцінки похибки методу числового розрахунку №  $i$ , де  $i = \overline{1,10}$ .

**ВИСНОВКИ:**

У даній роботі ми виконуємо аналіз результатів числових розрахунків кінцевих положень фронтів нагнітань згідно моделей цементації з вільними рухомими межами, використовуючи припущення, що невизначеність у кінцевому положенні фронту нагнітання, яка обумовлена невизначеністю у виборі методу інтерполювання вільної межі на кожному часовому шарі, можна знехтувати, оцінюючи похибку методу кожного такого розрахунку. Оскільки за цього аналізу не виникло ніяких суперечностей, то цей аналіз є числовою перевіркою даного припущення.

Модифікація числового моделювання [5], представлена в роботі [7], призводить тільки до зменшення часу нагнітання на 3,3 %. Тобто кінцеві положення фронтів нагнітань і їх похибки методу розрахунку, отримані в роботі [7], співпадають із відповідними положеннями та похибками, отриманими в роботі [5]. Континуальний підхід є більш загальним поняттям, ніж тип континуальної моделі. Тому, щоб можна було стверджувати, що модифікувати числове моделювання [7] з метою забезпечення правомірності застосування континуальних моделей із вільними рухомими межами в ньому не потрібно, важливо показати, що континуальні моделі нагнітання цементного розчи-

Таблиця 1. Міри різниць між кінцевими положеннями фронтів нагнітань, які ми отримуємо, інтерполюючи вільну межу на кожному часовому шарі різними функціями, та відповідними положеннями, що отримані в роботі [7].

$i$	$\varepsilon_i$ (%)	$\delta_i^{(1,0)}$ (%)	$\delta_i^{(1,1)}$ (%)	$\delta_i(0.7)$ (%)	$\delta_i(0.002)$ (%)	$\tilde{\varepsilon}_i(0.002)$ (%)
1	3.2	25.5	15.0	2.98	0.05	3.20
2	5.5	19.7	9.94	5.02	0.02	5.50
3	5.4	36.8	31.5	12.00	0.66	5.44
4	5.5	36.3	30.7	11.26	0.59	5.53
5	7.4	28.19	36.93	2.57	0.10	7.40
6	7.1	28.43	36.71	2.28	0.08	7.10
7	4.2	31.89	18.43	6.16	0.28	4.21
8	4.2	31.87	18.23	3.67	0.15	4.20
9	4.7	20.8	25.9	4.43	0.01	4.70
10	4.3	21.8	26.6	3.58	0.01	4.30

Таблиця 2. Визначення значення  $\alpha$ , за якого  $\tilde{\varepsilon}_i(\alpha) \approx \varepsilon_i$ , де  $i = \overline{3,4}$

$\alpha$	$\delta_3$ (%)	$\delta_4$ (%)	$\tilde{\varepsilon}_3(\alpha)$ (%)	$\tilde{\varepsilon}_4(\alpha)$ (%)
0.5	14.17	13.44	15.16	14.52
0.3	14.77	14.06	15.73	15.10
0.03	6.36	5.87	8.34	8.04
0.01	2.83	2.56	6.10	6.07
0.007	2.09	1.88	5.79	5.81
0.005	1.55	1.39	5.62	5.67
0.002	0.66	0.59	5.44	5.53

ну в сухий ґрунт, які основані на рівнянні конвективної дисперсії та відповідають різним постановкам, стають моделями фазового поля [11] за достатньо великого часу нагнітання. Часткове заповнення цементним розчином пор сухого ґрунту за його нагнітання в цей ґрунт можна моделювати як його розчинення у фіктивній невагомій рідині нульової в'язкості, що насичувала цей ґрунт перед нагнітанням [5]. Поширення цементного розчину в сухому ґрунті або в ґрунті, насиченому водою, можна моделювати задачею з вільною рухомою межею, коли ширина зони переходу від ґрунту з максимальним значенням концентрації цементу в рідкій фазі до ґрунту з нульовим значенням цієї концентрації стає набагато меншою за відстань, пройдену фронтом нагнітання [12]. У роботі [5] наведено аргументи на користь того, що якщо порівнювати нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт із його нагнітанням в насичений водою ґрунт за інших рівних умов, то ширина зони переходу стає набагато меншою за відстань, пройдену фронтом нагнітання, у випадку сухого ґрунту раніше ніж у випадку ґрунту, насиченого водою. У роботі [6] представлена континуальна модель нагнітання цементного розчину в насичений водою ґрунт, яка основана на рівнянні конвективної дисперсії. Ми перевірили чисельно, що у випадках різних постановок моделі [6] відношення ширини зони переходу від ґрунту з максимальним значенням концентрації цементу в рідкій фазі до ґрунту з нульовим значенням цієї концентрації до відстані, пройдені фронтом нагнітання, зменшується з плином часу.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Arsenahotel.com. Химические и биохимические породы. Часть 5. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: [http://arsena-hotel.com/gruntovedenie/kharakteristika\\_porod/khimicheskie5/](http://arsena-hotel.com/gruntovedenie/kharakteristika_porod/khimicheskie5/)
2. Moretrench. Grouting methods, 2010 [Електронний ресурс]. — Режим доступу: [http://www.moretrench.com/services\\_article.php?Grouting-Methods-Compensation-Grouting-www.Moretrench.com-52](http://www.moretrench.com/services_article.php?Grouting-Methods-Compensation-Grouting-www.Moretrench.com-52).
3. Bouchelaghem F. Mathematical and numerical filtration-advection-dispersion model of miscible grout propagation in saturated porous media / F. Bouchelaghem, L. Vulliet // Int. J. for Num. and analytical methods in Geomech. 2001. — No 12. P. 1195–1227.

4. Warren C. Geotechnical aspects of the Strood and Higham railway tunnel relining and refurbishment [Електронний ресурс]: (Proceedings of the 10th Congress of the International Association for Engineering Geology and the Environment – Engineering geology for tomorrow's cities. "IAEG2006") / C. Warren, I Tromans. Електронні дані. — London: The Geological Society of London, 2006. — Режим доступу: <http://www.iaeg.info/iaeg2006/start.htm>
5. Демчук М. Б. Про моделі промислового циркулярного нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт / М. Б. Демчук // Штучний інтелект. — 2011. — № 2. — С. 122–130.
6. Демчук М. Б. Узгоджена модель нагнітання цементного розчину в насичене пористе середовище / М. Б. Демчук // Наукові записки НАУКМА. Серія комп'ютерні науки. — 2011. — Т. 125. — С. 46–51.
7. Демчук М. Б. Застосування континуального підходу в моделях промислової цементації ґрунтів / М. Б. Демчук // Математичні машини та системи. — 2013. — № 3. — С. 170–177.
8. Рябенкий В. С. Введение в вычислительную математику / В. С. Рябенкий. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000.—294 с.
9. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001.—630 с.
10. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор. — М. : «Мир», 1985. — 272с.
11. Няшина Н. Д. О возможности применения модели фазового поля для описания структуры фронта кристаллизации расплава / Н. Д. Няшина, П. В. Трусов // Математическое моделирование систем и процессов. — 1999. — № 7. — С. 57–66.
12. Bear J. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media / J. Bear, Y. Bachmat. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. — 553 p. — ISBN 0-7923-1106-X.

**ABSTRACT**

*Kilvander E.Yi., Silchenko K.V., Sharikov V.V., Kalyuh Y.I., Klimentko O.A.* **Strengthening of the pit in the cramped conditions of urban development on the example of the construction of retail and office center in Yalta** //The world of geotechnik.- 2015.- №1.- P.4-7.

The article focuses on technical solutions to strengthen the pit in cramped urban conditions at the construction of retail and office center in Yalta.

*Shokarev V.S., Grechko V.F., Moskalina I.N.* **Application of geotechnical technologies while eliminating accident overpass structures** //The world of geotechnik.- 2015.- №1.- P.8-11.

Results of geotechnical works on restoration of serviceability of overhead road in Nikopol (Ukraine) are presented. Nonuniform settlements of overhead road foundation in process of its operation has reached 600mm. The foundation reinforcement was performed by leading of piles Ø 250mm and 36m for stabilization of settlements. Lifting of ferro-concrete structures in design position was made by means of electrohydraulic system which includes 20 flat jacks, hydrowire, pump station, a control box.

*Demchuk M.B., Nakonechnyi O.G.* **Numerical modeling of evolution of cement concentration distribution in a treated soil porous medium**//The world of geotechnik.- 2014.- №1.- P.12-16.

It is checked numerically that one can neglect the uncertainty in the final injection front position due to the uncertainty in the choice of a method of interpolation of this front on every time layer estimating the truncation error of calculation of this position according to the grouting model that is a problem with a free moving boundary.

*Galinsky A.M.***The study of technological parameters of the device horizontal impervious screens under construction on the basis of the method of horizontal directional drilling** //The world of geotechnik.- 2015.- №1.- P.17-21.

Research of technology of construction of horizontal impervious screen (GIS) under the existing structures is carried out in the Scientific and Research Institute of Building Production (Ukraine, Kyiv). GIS building technology is based on the technology of the construction of horizontal wells using horizontal directional drilling. A special working device arranges GIS made of the hardening material between two parallel horizontal wells. Limiters of grips in the wells are tightening to prevent the collapse. To determine the technology parameters of GIS construction we conducted research on a specialized stand. Analyzing the process of cavity formation for the GIS we should note that the main is the interaction between working device and soil ground. The process of soil "cutting" runs in a confined space, that is, in moldboard less way. To prevent the collapse of the cavity formed behind the working device clay and cement hardening anti-filtration solution is continuously feeding under pressure

through its nozzles. Technological researches were performed using the experimental method of experiment planning. As response functions we accepted: the resistivity for the working device (cutter) in the sand, the volume of solution which fills the cavity and the density of impervious screen within 24 hours after its construction. As factors influencing the response functions we considered: the vertical pressure on the screen, the density of sand, supply pressure and density of impervious solution.

Based on this research, it was found that the resistivity, necessary to take into account for the traction calculation of the working device movement in the sands is 55.4 kg/cm<sup>2</sup>. Research established that the integrity of the GIS is mainly affected by the pumping pressure of the solution in the cavity, which may not exceed the vertical pressure on the screen. The research demonstrates the possibility of creating a horizontal impervious screen based on the technology of horizontal directional drilling and defines the technological parameters for the screen construction under natural conditions.

*Rozenvasser G, Duvanskiy A., Malikov S.* **Underground tunnels in ground arrays with tectonic disturbances** //The world of geotechnik.- 2015.- №1.- P.22-25.

Trails Donetsk (Ukraine) underground cross 17 tectonic faults. This greatly complicates the construction, because the problem is not enough normalized. The report examines the stress-strain state (n.d.s.) array of different types of tectonic disturbances and stress distribution around the workings at the time of device structures in the array of tunnels. The methods of accounting tectonic influences on the design of tunnels and the choice of optimal design solutions to protect the lining.

*Zavarzina I.Y.* **Determination the bearing capacity of piles of large diameter by osterberg method and scale test** //The world of geotechnik.- 2015.- №1.- P.26-30.

Identified problematic question of determining the value of the bearing capacity of large diameter piles in Ukraine. Considered testing these piles by Osterberg. Were defined advantages and disadvantages this methods

*Karpenko D.A.* **Peculiarities of implementation of primary numerical modeling when determination of the forces of negative friction on pile side surface in condition of its test with static load** //The world of geotechnik.- 2015.- №1.- P.31-37.

The basic approaches to the definition of negative friction forces on the pile lateral surface in accordance with European and Ukrainian Codes requirements are considered in paper. Numerical study is carried out and the method for determining the bearing capacity of drilling piles is proposed taking into account the negative forces of friction on the results of analysis of the conducted field tests with application of complex software PLAXIS 3D Foundation.