



КЛОВАНИЧ СЕРГЕЙ ФЕДОРОВИЧ

Д.т.н. профессор, кафедры строительной механики и строительных конструкций Варминско-Мазурского университета в г. Ольштын (Польша)

Основные направления научной деятельности: пластичность материалов, моделирование работы бетона и железобетона при сложном напряженном состоянии, численные исследования железобетонных конструкций, теоретические и прикладные аспекты метода конечных элементов, нелинейные расчеты на основе МКЭ.

Автор 160 научных публикаций, 5 монографий.

E-mail: sergei.klovanych@uwm.edu.pl



МАЛЫШКО ЛЕШЕК

Профессор, д.т.н., заведующий кафедрой строительной механики и строительных конструкций Варминско-Мазурского университета в г. Ольштын (Польша)

Основные направления научной деятельности: исследования легких конструкций, моделирование работы каменной кладки при сложном напряженном состоянии, пластичность материалов, метод конечных элементов.

Автор 80 научных публикаций, 2 монографий.

E-mail: leszek.malyszko@uwm.edu.pl

УДК 624.131.431

МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПОРИСТОГО ГРУНТА

Ключевые слова: определяющие соотношения, грунты, пластичность, теория пластического течения, метод конечных элементов.

Сформульовано феноменологическая модель для грунтов в формі асоційованої теорії пластичної течії, заснована на поверхні навантаження замкнутої форми. Пропонується аналітична форма цієї поверхні. У моделі враховуються такі властивості грунтів, як зміцнення, разупрочнение, дилатація. Встановлено вплив початкової пористості грунтів на ці властивості. Результати розрахунків тестових зразків зіставляються з результатами їх випробувань з декількох незалежних джерел при трехосном стисненні. Наводиться приклад розрахунку роботи штампна на ґрунті на основі запропонованої моделі з використанням методу кінцевих елементів в нелінійній постановці.

Сформулирована феноменологическая модель для грунтов в форме ассоциированной теории пластического течения, основанная на поверхности нагружения замкнутой формы. Предлагается аналитическая форма этой поверхности. В модели учитываются такие свойства грунтов, как упрочнение, разупрочнение,

дилатация. Установлено влияние начальной пористости грунтов на эти свойства. Результаты расчетов тестовых образцов сопоставляются с результатами их испытаний из нескольких независимых источников при трехосном сжатии. Приводится пример расчета работы штампа на грунте на основе предлагаемой модели с использованием метода конечных элементов в нелинейной постановке.

The phenomenological model for soils in the form of the associated theory of the plasticity, based on a loading surface of the closed form, is formulated. The analytical form of this surface is offered. Dilatancy, deformation hardening and softening are considered. The paper is focused on nonlinear analysis using finite elements method. The examples of calculations, confirming reliability of model, are proposed.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в целом сложилось представление о природе пластического поведения грунтов. Есть также соответствующие модели их деформирования [7, 10, 14, 18, 19, 21, 23, 24, 26, 31, 34, 35, 36]. Большинство этих моделей происходит из классических теорий пластичности - Ван Мизеса, Мора-Кулона, Друккера-Прагера, основанных на классической гипотезе Мизеса, согласно которой пластическое течение развивается по нормали к некоей поверхности, называемой поверхностью текучести, скорость приращения пластических деформаций пропорциональны градиенту к этой поверхности. Если напряжения в материале не выходят за эту поверхность, он считается линейно упругим (пластические деформации игнорируются), если находятся на ней то материал становится пластическим. Выход за поверхность текучести характеризует предельное состояние материала. Поэтому для хрупких материалов она часто ассоциируется с прочностью. Для описание же предельной поверхности чаще всего используется незамкнутые в области всестороннего сжатия поверхности, что приводит к бесконечной прочности материала при гидростатическом сжатии. Таким образом прочность материала обуславливается только в результате сдвига, а возможность разрушения всесторонним сжатием игнорируется. Учет пластических деформации при напряжениях внутри предельной поверхности осуществляется введением параметра, характеризующего упрочнение/разупрочнение материала и формулировке новой поверхности - поверхности нагружения. Эта поверхность изменяется вместе с изменением напряжений и всегда проходит через точку текущего напряженного состояния в пространстве напряжений. Она обычно является модификацией (изотропная деформация и (или) перемещение) предельной поверхности. Исследования большинства грунтов свидетельствуют, что поверхность нагружения должна быть замкнута при изотропном (гидростатическом) сжатии, т.е. в материале реализуется смешанный механизм пластического течения - от сдвига а и от гидростатического сжатия [8, 9, 16, 25, 29, 30]. Наибольшей популярностью среди моделей с замкнутой поверхностью пластичности (нагружения) пользуются модели на основе ассоциированной теории пластического течения с упрочнением/разупрочнением под общим названием Cam-Clay [1, 5, 7, 10, 11, 15, 18, 24, 26, 27]. Как правило поверхность пластичности (нагружения) - составной объект. Однако имеются предложения, в которых поверхность описывается единой, непрерывной, гладкой функцией [6, 7, 11, 12], но обычно эти зависимости достаточно громоздки и требуют дополнительных ненормируемых экспериментальных исходных параметров неочевидной природы. Упрочнение ассоциируется с изменением начальной пористости грунтов в процессе нагружения от гидростатического сжатия. Причем, несущественно заполнены поры а грунте водой или нет. Изменения же пористости в процессе гидростатического сжатия обычно описываются посредством логарифмической зави-

симостью [28]. В некоторых исследованиях уделяется внимание и вопросам дилатации [3, 7, 17, 22, 32, 33]. Отмечается, что для учета дилатации требуются специальные дополнительные зависимости между приращениями октаэдрических объемных и сдвиговых деформаций. Здесь предлагается вариант ассоциированной теории пластического течения грунтов различной пористости с однородной, непрерывной и гладкой функцией нагружения, описываемой простым аналитическим выражением. Упрочнение обусловлено уплотнением грунта во время нагружения. Считается, что разупрочнение грунта, которое наблюдается при работе его в предельной стадии, вызвано влиянием сдвига и описывается посредством нисходящей ветви диаграммы деформирования грунта при октаэдрическом сдвиге. Дилатация описывается дополнительным соотношением, следующим из закона пластического течения Мизеса.

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В соответствии с законом пластического течения скорость общих $\dot{\epsilon}$ деформаций определяется как сумма упругих $\dot{\epsilon}_e$ и пластических $\dot{\epsilon}_p$ составляющих

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p \quad (1)$$

Пластические деформации развиваются по нормали к некоей поверхности g , называемой пластическим потенциалом и определяются следующим образом

$$\dot{\epsilon}_p = \lambda \partial g / \partial \sigma = \lambda \mathbf{g}, \quad (2)$$

где \mathbf{g} - градиенты функции g в пространстве напряжений, определяющий направление, λ - скалярный параметр, характеризующий величину приращения пластических деформаций, σ - тензор напряжений.

Определяющие соотношения для грунта, построенные на базе (1) и (2) в окончательном виде выглядят так [36]

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} \cdot \dot{\epsilon} \equiv \left(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{g} \otimes \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}}{\mathbf{g} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{f} + H} \right) \cdot \dot{\epsilon}, \quad (3)$$

где \mathbf{D}_{ep} - симметричный тензор, называемый тензором касательных упругопластических модулей, \mathbf{D} - тензор упругих постоянных материала, \mathbf{f} - градиенты функции нагружения f , H - функция упрочнения/разупрочнения.

Для изотропного материала тензор упругих постоянных имеет вид

$$\mathbf{D} = 3K_o \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + G_o \mathbf{I}_d, \quad (4)$$

где $K_o = E/3(1-2\nu)$ - объемный модуль, $G_o = E/2(1+\nu)$ - модуль сдвига, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона, $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ единичный тензор второго ранга на ортогональном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, $\mathbf{1} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ единичный тензор четвертого ранга на том же базисе, $\mathbf{I}_d = \mathbf{1} - \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} / 3$ тензор девиатора напряжений. В случае ассоциированной теории течения, которая рассма-

тривається здесь, функции f и q равны, а их градиенты имеют вид

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T} \equiv \mathbf{g} . \quad (5)$$

Как это обычно принято, если произведение $\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{p}}$ больше нуля, то нагружение считается активным, меньше нуля - разгрузкой, равным нулю - нейтральным.

Отметим, что различие вариантов ассоциированных теорий, заключается в способах определения функций f и H в соотношении (3).

3. СИСТЕМА КООРДИНАТ

Для изотропных материалов функция нагружений обычно формулируется в пространстве напряжений, но не в общей системе координат $\boldsymbol{\sigma}$, а в системе координат инвариантов напряжений Хэя - Вестергарда $\mathbf{p}=\{p, q, \zeta\}$.

$$p = \text{tr}\boldsymbol{\sigma}/3, \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}\boldsymbol{\sigma}^2}, \quad \zeta = \cos 3\theta = \frac{9}{2} \cdot \frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}^3}{q^3}, \quad (6)$$

где p - эффективное гидростатическое напряжение (октаэдрическое нормальное напряжение), $\text{tr}\boldsymbol{\sigma}$ - первый инвариант тензора напряжений, $\text{tr}\boldsymbol{\sigma}^2$ - второй инвариант девиатора напряжений (октаэдрическое касательное напряжение), $\text{tr}\boldsymbol{\sigma}^3$ третий инвариант девиатора напряжений, ζ - параметр Лодэ-Надаи, θ - угол вида напряженного состояния. Преобразование координат осуществляется по формуле

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{U} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial p}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial p}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial p}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial p}{\partial \tau_{xz}} & \frac{\partial p}{\partial \tau_{yz}} \\ \frac{\partial q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial q}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial q}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial q}{\partial \tau_{xz}} & \frac{\partial q}{\partial \tau_{yz}} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial \zeta}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial \zeta}{\partial \tau_{xz}} & \frac{\partial \zeta}{\partial \tau_{yz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T} \\ \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что компоненты матрицы преобразования координат \mathbf{U} равны

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\sqrt{2}}{4q^2} \begin{Bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z \\ 2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z \\ 2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y \\ 6\tau_{xy} \\ 6\tau_{yz} \\ 6\tau_{xz} \end{Bmatrix};$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{9}{2q^4} \left[q \frac{\partial (\text{tr}\boldsymbol{\sigma}^3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - 3\text{tr}\boldsymbol{\sigma}^3 \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right], \quad (8)$$

где

$$\frac{\partial (\text{tr}\boldsymbol{\sigma}^3)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 2\sigma_x^2 - (\sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2(\sigma_y + \sigma_z)\sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 - 2\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \\ 2\sigma_y^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_z^2) - 2(\sigma_x + \sigma_z)\sigma_y + 3(\tau_{yz}^2 - 2\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2) \\ 2\sigma_z^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - 2(\sigma_x + \sigma_y)\sigma_z + 3(\tau_{xz}^2 - 2\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2) \\ 6\left[(\sigma_x - 2\sigma_z + \sigma_y)\tau_{xy} - 3\tau_{yz}\tau_{xz} \right] \\ 6\left[(\sigma_y - 2\sigma_x + \sigma_z)\tau_{yz} - 3\tau_{xy}\tau_{xz} \right] \\ 6\left[(\sigma_z - 2\sigma_y + \sigma_x)\tau_{xz} - 3\tau_{xy}\tau_{yz} \right] \end{Bmatrix}.$$

Декомпозиция тензора деформаций $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3}(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} + \mathbf{e}$,

позволяет ввести соответствующие координаты Хэя - Вестергарда для деформаций $\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon, \gamma, \zeta_e\}$ где, по аналогии с (6) $\epsilon = (\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})/3$, $\gamma = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}^2}$, и $\zeta_e = \zeta$. В новой системе координат тензор упругих постоянных материала \mathbf{D} имеет вид

$$\mathbf{D}' = 3K_0 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + G_0 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3K_0 & 0 & 0 \\ 0 & G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Учитывая, что преобразование координат для тензора деформаций осуществляется по формуле

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{U}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (10)$$

Преобразование для тензоров касательных упруго-пластических модулей \mathbf{D}_{ep} имеет такой вид

$$\mathbf{D}_{ep} = (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{D}'_{ep} \cdot \mathbf{U})^{-1}, \quad (11)$$

где тензор \mathbf{D}'_{ep} в системе координат Хэя - Вестергарда представляется матрицей размерностью размерность 3×3 .

4. ФУНКЦИЯ НАГРУЖЕНИЯ

Сначала сформулируем условия, которым должна удовлетворять функция нагружения. Во-первых она должна быть гладкой и непрерывной. Во-вторых, она должна быть замкнута как в области всестороннего растяжения, так и сжатия. В-третьих, в пределе она должна стремиться к функции, описывающей предельную поверхность Друккера-Прагера и быть симметричной относительно диагонали пространства главных напряжений. И наконец, ее аналитическое выражение не должно быть чересчур громоздким и включать, по возможности, минимальное число параметров. Такую функцию наиболее удобно формировать в системе координат $\mathbf{p}=\{p, q, \zeta\}$, как это принято в большинстве исследований.

Предлагается следующее простое аналитическое выражение для функции нагружения в данной системе координат, удовлетворяющее всем перечисленным условиям

$$f(\mathbf{p}) = q - A_0(\zeta)(p_s + p)\sqrt{p_c - p}. \quad (12)$$

Напоминаем, точка с координатами p , соответствующая текущему напряженному состоянию, лежит на этой поверхности, т.е. $f(\mathbf{p})=0$, т.е. $q = A_0(\zeta)(p_s + p)\sqrt{p_c - p}$, где p_o, p_s - точки пересечения с осью p в направлениях всестороннего сжатия и растяжения соответственно, т.е. при $q=0$, $A_0(\zeta)$ - функция параметра Лодэ-Надаи. В общем виде сечения поверхности, описанной выражением $q=q(p, \zeta)$, меридиональных при $\zeta=-1$ и $\zeta=1$ и девиаторного при $p=const$, представлены на рис.1. В пределе приходим к условию пластичности Друккера-Прагера $q=M_0 p + c_0$, где $M_0 = M_0(\zeta)$, $c_0 = c_0(\zeta)$.

Учитывая этот факт и то обстоятельство, что $\partial q / \partial p = M_0$ при $p=-p_s$, и $p_s \approx c_0 / M_0$, получим координату p_c

$$p_c = (a^2 p_s + p) / (1 - a^2), \quad (13)$$

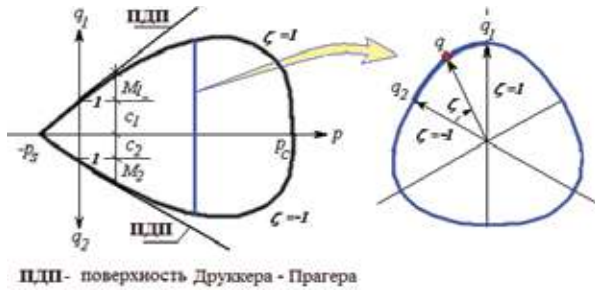


Рис 1. Сечения поверхности нагружения.

где $a=q/M_0/(p+p_s)$. В этом случае параметр $A_0(\zeta)$ в выражении (12) равен

$$A_0(\zeta) = M_0(\zeta) / \sqrt{p_c + p_s} \cdot \quad (14)$$

Отметим, что если точка p лежит за пределами предельной поверхности Друккера-Прагера, это состояние характеризуется, как разупрочнение грунта.

Сечение поверхности нагружения девиаторной плоскостью представляет собой криволинейный равнобедренный треугольник (рис.16) с максимальным радиусом q_1 при $\zeta=1$ и минимальным радиусом q_2 при $\zeta=-1$.

Ассоциируя параметры предельной поверхности Друккера-Прагера $M_0(\zeta)$ и $c_0(\zeta)$ со стандартными прочностными характеристиками грунта - углом внутреннего трения $\varphi,^\circ$ и сцеплением c , МПа, для каждой из меридиональных кривых $q_1(p)$ и $q_2(p)$ получим

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\sqrt{2} \frac{\sin\varphi}{3 - \sin\varphi}, & c_1 &= 2\sqrt{2} \frac{\cos\varphi}{3 - \sin\varphi} c, \\ M_2 &= 2\sqrt{2} \frac{\sin\varphi}{3 + \sin\varphi}, & c_2 &= 2\sqrt{2} \frac{\cos\varphi}{3 + \sin\varphi} c, \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение для функции $\rho(\zeta)$, характеризующей криволинейный треугольник девиаторного сечения, обычно получают методом интерполяции между двумя граничными случаями $\zeta=-1$ и $\zeta=1$.

Здесь принято выражение для интерполяционной функции в форме, предложенной [2]

$$\rho(\zeta) = \frac{2g}{1 + g + (1-g)\zeta}, \quad (16)$$

где $g = \frac{q_2}{q_1} = \frac{3 - \sin\varphi}{3 + \sin\varphi}$.

Таким образом, параметры поверхности Друккера-Прагера $M_0(\zeta)$ и $c_0(\zeta)$ с учетом интерполяционной функции (16) равны

$$M_0 = \rho(\zeta)M_1, \quad c_0 = \rho(\zeta)c_1. \quad (17)$$

В выражение (3) входят градиенты функции f , которые можно получить путем дифференцирования (12) по p, q и ζ .

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{p_s - 2p_c + 3p}{2(p_s + p)(p_c - p)} q; \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} = -\frac{1-g}{2g} A_0(\zeta) \rho(\zeta). \quad (14)$$

5. УПРОЧНЕНИЕ И РАЗУПРОЧНЕНИЕ

Функция упрочнения/разупрочнения H , входящая в выражение (3) определяется в соответствии с рекомендациями [36] в координатах $\mathbf{p}=\{p, q, \zeta\}$ по следующей формуле

$$H = -\frac{\partial f}{\partial k} \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}, \quad (19)$$

где k - параметр упрочнения/разупрочнения грунта, представляющий собой внутреннюю скалярную переменную, равную работе напряжений на пластических деформациях, характеризующую диссипацию потенциальной энергии деформации $k = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p$. Подставляя это выражение k для в формулу (19), получим

$$H = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{D}_p' \cdot \mathbf{f}, \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_p' = 3K_h \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + G_s \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3K_h & 0 & 0 \\ 0 & G_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где $3K_h = \partial p / \partial \epsilon_{pl}$ и $G_s = \partial q / \partial \gamma_{pl}$, пластические модули октаэдрических сжатия и сдвига.

Будем полагать, что модуль K_h характеризует упрочнение грунта, модуль G_s - его разупрочнение.

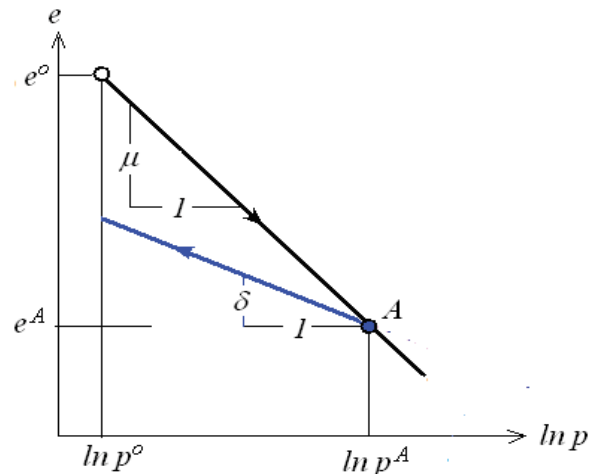


Рис 2. Изменение пористости в процессе гидростатического сжатия.

Полагаем, что в качестве основной физической характеристики грунта, влияющей на его упрочнение можно принять его пористость e , которую будем рассматривать как некую внутреннюю переменную модели. Эта переменная изменяется в процессе всестороннего сжатия/разгрузки и непосредственно связана с величиной октаэдрического нормального напряжения p . Данная зависимость может быть установлена экспериментально и описана с помощью логарифмической формулы, предложенной [28]. В частности для активного нагружения она равна $e=e^0-\mu \ln p$, для разгрузки $e=e^A-\delta \ln p$, где e^0 начальная пористость грунта до начала нагружения, e^A пористость к моменту начала разгрузки, μ и δ экспериментальные параметры. Графически зависимости для пористости от величины p в логарифмических координатах представлена на рис.2. Т.к. изменение пористости влечет за собой и изменение величины объемных деформаций [25].

$$3\dot{\epsilon} = -\frac{e - e_o}{1 + e}, \quad 3\dot{\epsilon} = -\frac{\dot{e}}{1 + e}, \quad (21)$$

учитывая, что $\dot{\epsilon}_o^p = \dot{\epsilon}_o - \dot{\epsilon}_o^e$, где $\dot{\epsilon}_o^e$ упругое изменение объема, получим окончательную формулу для скорости пластических объемных деформаций при активном нагружении и разгрузке.

$$3\dot{\epsilon}^p = \frac{\mu - \delta}{(1 + e)^p} \dot{p}. \quad (22)$$

На основе выражения (22) получим производную, входящую в выражение для функции упрочнения (16) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = -\frac{3(1 + e)}{\delta} \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (23)$$

Сравнивая (23) с (19), будем иметь

$$K_h = \frac{1 + e}{\mu - \delta}. \quad (24)$$

Если напряжения находятся вне предельной поверхности Друккера-Прагера (рис.1), то нарушается классический принцип Друккера о том, что диссипация энергии при пластическом деформировании не может быть отрицательной. Эта область деструктивного поведения материала, вызванного октаэдрическим сдвигом, когда октаэдрические касательные напряжения превышают предельные значения. Однако, как показывает практика, процесс деформирования на этом не заканчивается, а идет процесс разупрочнения материала. На диаграмме $\gamma - q$ он соответствует ниспадающей части кривой (рис.3b). Принимая во внимание это обстоятельство выражение (19) запишем так

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \frac{1}{q} \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \gamma} = \frac{G_s}{q} \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{q} \frac{G_o G_t}{G_o - G_t} \frac{\partial f}{\partial q}, \quad (25)$$

где G_t - касательный модуль октаэдрического сдвига, G_s - касательный пластический модуль. Для определения G_t используем диаграмму деформирования грунта при октаэдрическом сдвиге, аналитическое выражение для которой включают как восходящую, так и ниспадающую ветви (рис. 3b) и может быть записано в виде

$$\xi = \frac{q}{\hat{q}} = \frac{k\eta}{1 + (k - 2)\eta + \eta^2}, \quad (26)$$

где $\eta = \gamma/\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma} = \lambda \hat{q}/(2G_o)$, $\hat{\gamma}$ и \hat{q} - координаты вершины диаграммы. Если точка текущего напряженного состояния p, q находится за пределами предельной поверхности (разупрочнение), как показано на рис.3а, то параметр разупрочнения следует устанавливать уже по деформированному состоянию грунта. Разупрочнение в этом случае ассоциируется с ниспадающей ветвью диаграммы $q - \gamma$ (рис.3.b) и его следует устанавливать уже не по напряжениям, а деформациям октаэдрического сдвига. Соответствующие им напряжения, определяемые по диаграмме, будут меньше предельных и мы формально возвращаемся внутрь поверхности Друккера-Прагера (рис.3а). Параметр k в формуле (26) характеризует секущий модуль сдвига в вершине диа-

граммы. В исследованиях [23,35] экспериментально установлено, что его значение зависит, в основном, от начальной пористости грунта e . Анализ этих исследований позволяет рекомендовать следующее выражение

$$k = p - (p - 1) \exp(-0,1e). \quad (27)$$

где $p = 2 \div 6$ - экспериментальный параметр. На рис.3 с приведены графики зависимости (26), построенные с учетом соотношения (27), при различных значениях e . Здесь же приведены опытные данные [35]

Дифференцируя (26) по γ , получим

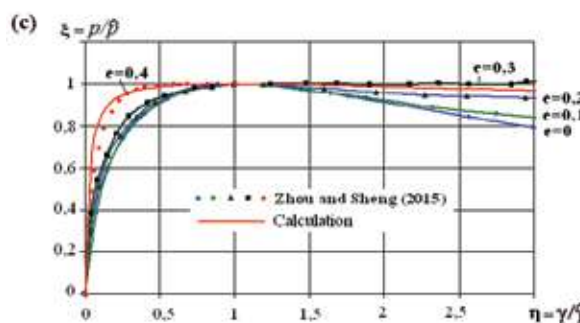


Рис 3. Разупрочнение грунта: (а)- Область разупрочнения, (b)- диаграмма деформирования, (с)- влияние пористости на вид диаграммы.

$$G_t = \Omega G_o, \quad (28)$$

где функция нелинейности равна

$$\Omega = \frac{1 - \eta^2}{[1 + (k - 2)\eta + \eta^2]^2}, \quad (29)$$

6. ДИЛАТАЦИЯ

Учет влияние дилатации (увеличение объема при равномерном трехосном сжатии) в рамках теории пластического течения и непосредственно с помощью соотношения (3) представляется невозможным из-за нарушения постулата Друккера о том, что диссипация энергии при пластическом деформировании не может быть отрицательной. Для этого вводятся дополнительные соотношения, позволяющие включить дилатационную составляющую объемных деформаций в соотношение (3) в качестве начальных (вынужденных). С этой целью запишем закон пластического течения (2) в координатах Хэя - Вестергарда p отдельно для объемных и сдвиговых компонент [10]

$$\dot{\epsilon}_p = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial p}; \quad \dot{\gamma}_p = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial q}. \quad (30)$$

Откуда, принимая во внимание зависимости (18), получим следующую связь между скоростями пластических объемных и сдвиговых деформаций (коэффициент дилатации)

$$k_d = \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\gamma}_p} = \frac{\lambda_1 \partial f / \partial p}{\lambda_2 \partial f / \partial q} = \lambda_o \partial f / \partial p = \lambda_o \frac{p_s - 2p_c + 3p}{2(p_s + p)(p_c - p)} q \quad (31)$$

При этом для недилатирующих грунтов $\lambda_o=0$, для дилатирующих $\lambda_o>0$. При этом дилатация рассматривается как начальная, а вместо деформаций $\dot{\epsilon}_p$ в расчет вводятся деформации $\dot{\epsilon}_p \Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{K}_d) \dot{\epsilon}_p$, учитывающие соотношения (31), где

$$\mathbf{K}_d = k_d \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{1}{k_d} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & k_d & 0 \\ 1/k_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

В работах [5,35] экспериментально подтверждается что величина дилатации грунта во многом определяется его плотностью (пористостью). Рекомендуем следующую зависимость для коэффициента дилатации в зависимости от начальной пористости грунта e , сформулированную на основе данных этих работ

$$\lambda_o = 0.0025 / (1 - 0.95e). \quad (33)$$

7. ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим несколько примеров, подтверждающих достоверность предлагаемого варианта ассоциированной теории пластического течения.

В первом примере рассматривается расчет деформаций высыхающих грунтов различной плотности из работы [5]. Отметим, что экспериментальные данные, приведенные в этой работе используются также для тестирования популярного программного конечно-элементного комплекса PLAXIS. Изучается поведение грунтов при трехосном сжатии. Исследуются три типа грунтов с условными названиями - плотный, средней плотности и рыхлый. Характеристики этих трех типов приведены в табл. 1. Нагружение осуществлялось шагами, на первом шаге создавалось равномерное трехосное сжатие напряжениями $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_h = 0.1 \text{ МПа}$. На последующих шагах увеличивалось напряжение σ_z ступенями по $\Delta\sigma_z = 0.02 \text{ МПа}$. Расчет велся до критического состояния грунта. Результаты расчетов представлены на рис.4. в виде графиков девиатора напряжений (рис. 4а) и объемных деформаций (Рис.4б) в зависимости от вертикальных деформации. Здесь же приведены экспериментальные данные [35]. Наблюдается достаточно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных результатов.

Во втором примере рассматривался расчет дефор-

Таблица 1. Характеристики грунтов из испытаний

Тип грунта	Модуль Е, МПа	Коеф. Пуассона ν	Угол внутреннего трения, φ°	c, МПа	μ	δ	e
Плотный	40	0.2	40	0	0.09	0.05	0.3
Средней плотности	30	0.2	35	0	0.09	0.05	0.8
Рыхлый	20	0.2	30	0	0.09	0.05	0.9

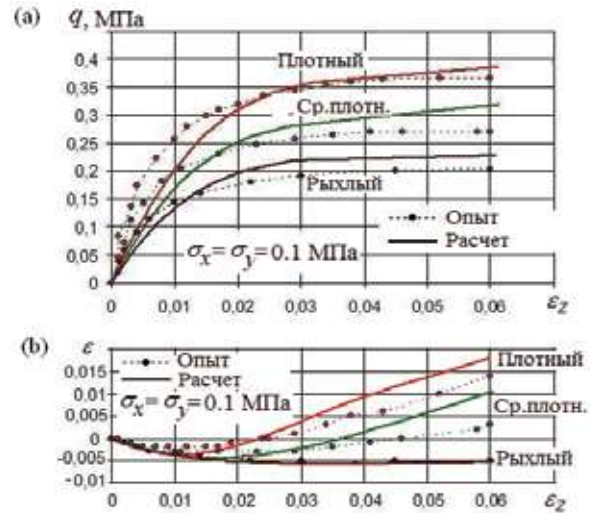


Рис 4. Результаты расчетов примера из [35].

маций пористого грунта при трехосном сжатии при различной величине первоначального гидростатического сжатия из опытов [20]. Характеристики грунта, соответствуют опытным и равны: модуль упругости $E=9.75 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$, угол внутреннего трения $\varphi = 34^\circ$, сцепление $c=0 \text{ МПа}$, начальная пористость $e=0.61$, параметры (22) $\mu=0.1$, $\delta=0$. Четыре варианта предварительного гидростатического сжатия $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_h = 0.1; 0.3; 1.05; 2.0 \text{ МПа}$. Расчет осуществлялся по этапам. На первом этапе прикладывалось предварительное давление, на последующих этапах увеличивалось вертикальное нормальное напряжение по $\Delta\sigma_z = 0.02 \text{ МПа}$ вплоть до предельного состояния. Результаты расчетов представлены на рис.5. в виде гра-

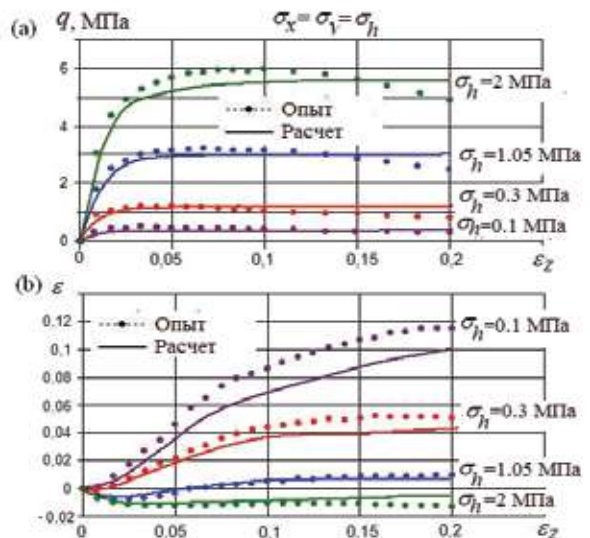


Рис 5. Результаты расчетов примера из [20].

фиков девиатора напряжений (рис.5а) и объемных деформаций (Рис.5б) в зависимости от вертикальных деформации. Здесь же приведены экспериментальные данные [20]. Результаты сопоставления расчетных данных с экспериментальными также свидетельствуют в пользу пред-

лагаемой модели грунтов.

Данная модель включена в состав конечноэлементного вычислительного комплекса, предназначенного для решения нелинейных задач. Модель тестировалась на задаче о давлении жесткого квадратного штампа на грунт из экспериментов [4]. Размеры штампа 40x40 см.

К штампу прикладывалась равномерно распределенная вертикальная нагрузка шагами по 40кН/м². Использовались объемные восьмиузловые, изопараметрические конечные элементы. Учитывалась симметрия задачи. Характеристики грунта $E=2.5$ МПа, $\varphi=18^\circ$, $c=0.045$ МПа, $\nu=0.35$, $\mu=0.05$, $\delta=0.01$, $e=0$. Результаты расчетов представлены на рис.6. На рис.6 а,б,с даны изолинии вертикальных перемещений штампа в мм, напряжений σ_z , τ_{xz} в МПа в грунте при вертикальном давлении на штамп 680 кН/м². На рис.6d представлен график вертикальных перемещений штампа в мм в зависимости от нагрузки на штамп. Тут же даны опытные данные [4].

ВЫВОДЫ

Предложен новый вариант ассоциированной теории пластического течения грунта с деформационным упрочнением, использующий непрерывную, гладкую функции нагружения достаточно простого вида. Упрочнение ассоциируется с изменением начальной пористости грунта в процессе загрузки, разупроч-

нение - с превышением напряжений октаэдрического сдвига предельных значений и с ниспадающей ветвью диаграммы деформирования. Добавлены зависимости для учета дилатации, построенные на базе классического закона пластического течения Мизеса. Предлагаемая модель материала содержит минимальное число исходных характеристик грунта, в число которых входит и начальная пористость. С пористостью связываются основные параметры упрочнения, разупрочнения, дилатации. Приводятся аналитические зависимости для учета влияния начальной пористости грунта, построенные на базе существующих экспериментальных данных. Достоверность определяющих соотношений подтверждается расчетом тестовых образцов грунтов с разными механическими характеристиками при трехосном сжатии при различных уровнях напряжений и начальной пористости. Приводится

расчет действия жесткого штампа на грунт методом конечных элементов в нелинейной постановке, адекватность которого подтверждается существующими в литературе опытными данными.

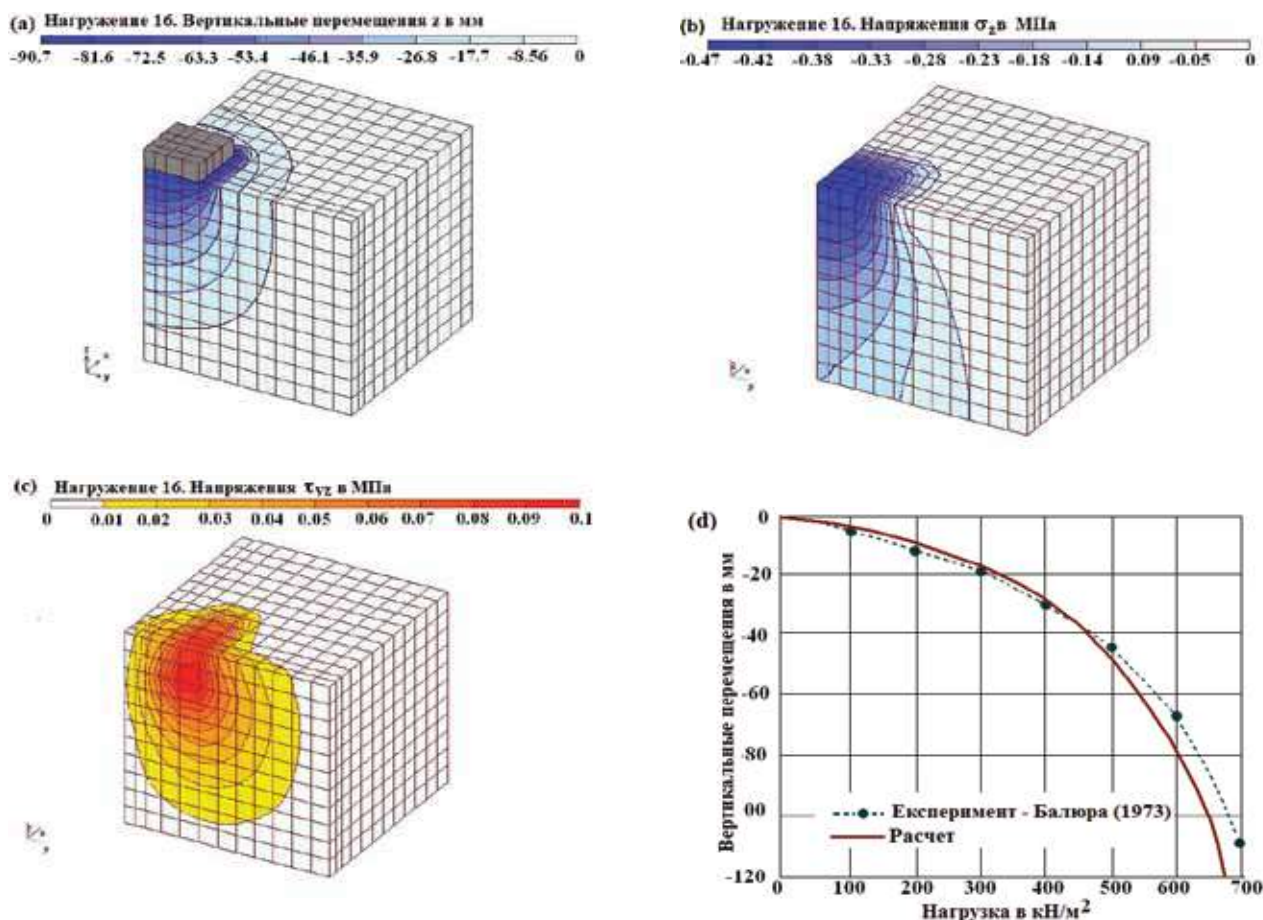


Рис 6. Расчет действия жесткого штампа на грунт из опытов [4].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ardakani, A., Bayat, M. and Javanmard, M. (2014), "Numerical modeling of soil nail walls considering Mohr Coulomb, hardening soil and hardening soil with small-strain stiffness effect models", *Structural engineering and mechanics*, 6(4), 391-401.
2. Argiris, J.H., Faust, G., Szimmat, J., Warnke, P. and Willam, K. (1974), "Recent development in the finite element analysis of the prestressed concrete reactor vessels", *Nuclear Engineering and Design*, 28, pp. 42-75.
3. Balasubramaniam, A. S., Oh, E. Y. N. and Bolton, M. (2005), "The application of normality rule and energy balance Equations for normally consolidated clays", *Lowland technology international* 7(1), June, 1-11, International Association of Lowland Technology (IALT).
4. Balura, M.V. (1973) "Horizontal displacements of the basis under a rigid stamp", *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 6, 39-41.
5. Brinkgreve R.B.J. and Vermeer P.A. (1998). *Plaxis. Finite Element Code for Soil and Rock Analysis. Materials Models Manual. Part 3.*, A.A.Balkema, Rotterdam, Brookfield.
6. Cattaneo, F., Della Vecchia, G. and Jommi, C. (2014), "Evaluation of numerical stress-point algorithms on elastic-plastic models for unsaturated soils with hardening dependent on the degree of saturation", *Computers and Geotechnics*, 55, 404-415.
7. Collins, I.F. and Kelly, P. A. (2002), "A thermomechanical analysis of a family of soil models",
8. Cun Hu and Haixiao Liu (2005), "Implicit and explicit integration schemes in the anisotropic bounding surface plasticity model for cyclic behaviours of saturated clay", *Computers Methods Appl. Mech. Engrg*, 194, 5109-5138.
9. Cun Hu, Haixiao Liu and Huang Wei (2012), "Anisotropic bounding-surface plasticity model for the cyclic shakedown and degradation of saturated clay", *Computers and Geotechnics*, 44, 34-47.
10. de Borst Rene and Groen Arend E. (2000), *2 Computational Strategies for Standard Soil Plasticity Models. Modeling in Geomechanics.* (Edited by Zaman M., Booker J., Giada G.), John Wiley & Sons, Ltd.
11. E-Kan Mojtaba and Taiebat Hossein A. (2014), "On implementation of bounding surface plasticity models with no overshooting effect in solving boundary value problems", *Computers and Geotechnics*, 55, 103-116.
12. Foster, C.D., Regueiro, R.A., Fossum, A.F. and Borja, R.I. (2005), "Implicit numerical integration of a three-invariant, isotropic/kinematic hardening cap plasticity model for geomaterials", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194, 5109-5138
13. Collins, I.F. and Kelly, P. A. (2002), "A thermomechanical analysis of a family of soil models", *Geotechnique* 52(7), 507-518.
14. Gu, Q., Qiu, Z. and Huang S. (2015), "A modified multi-yield-surface plasticity model: Sequential closest point projection method". *Computers and Geotechnics*, 69(9), 378-395.
15. Houlsby, G.T and Cassidy, M.J. (2002), "A plasticity model for the behaviour of footings on sand under combined loading", *Geotechnique*, 52(2), 117-129.
16. Huang Maosong, Liu Yanhua and Sheng Daichao (2001). "Simulation of yielding and stress-stain behavior of shanghai soft clay", *Computers and Geotechnics*, 38, 341-353.
17. Jafarzadeh, F., Javaher, i H., Sadek, T. and Wood D. Muir (2008), "Simulation of anisotropic deviatoric response of Hostun sand in true triaxial tests", *Computers and Geotechnics*, 35, 703-718.
18. Khalili, N., Habte, M.A. and Zargarbashi S. (2008), "A fully coupled flow deformation model for cyclic analysis of unsaturated soils including hydraulic and mechanical hysteresis", *Computers and Geotechnics*, 35, 872-889.
19. Kohler, R. and Hofstetter, G. (2007), "A cap model for partially saturated soils", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* Published online in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com). DOI: 10.1002/nag.658
20. Lee, K. L. and Seed, H. B. (1967), "Drained characteristics of sands", *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE*, 93 (SM6), 117-141.
21. Loukidis, D. and Salgado, R. (2009), "Modelling sand response using two-surface plasticity", *Computers and Geotechnics*, 36, 166-186.
22. Maheshwari, B.K., Truman, K.Z., El Naggar M.H. and Gould, P.L. (2004), "Three-dimensional nonlinear analysis for seismic soil-pile-structure interaction", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 24, 343-356.
23. Masin D. (2010), "Predicting the dependency of a degree of saturation on void ratio and suction using effective stress principle for unsaturated soils", *Int J Numer Anal. Meth Geomech*, 34, 73-90.
24. Nakai Teruo (2013), *Constitutive modeling of geomaterials. Principles and applications*, Taylor & Francis Group.
25. Roscoe, K.J. and Schofield, A.N. (1963), "Mechanical Behavior of an Idealised "Wet" Clay, *Proc. European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1, 47-54.
26. Stankiewicz, A. and Pamin, J. (2002), "A Gradient-Dependent Modified Cam-Clay Model", *WCCM, V Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria, July, 1-10.
27. Suebsuk Jirayut, Horpibulsuk Suksun and Liu Martin D. (2011), "A critical state model for overconsolidated structured clays", *Computers and Geotechnics*, 38, 648-658.
28. Terzaghi, K. and Peck, Ralph B. (1967), *Soil Mechanics in Engineering Practice*, (2nd Edition), John Wiley and Sons, New York, USA.
29. Ting Luo, Zhenhua Qin, Xing Feng, Xia Fei, Yangping Yao and Daichao Sheng (2013), "A symmetrisation method for non-associated unified hardening model", *Computers and Geotechnics*, 52, 38-45.
30. Tsiamposi, A., Zdravkovic, L and Potts, David M. (2013), "A new Hvorslev surface for critical state type unsaturated and saturated constitutive models", *Computers and Geotechnics*, 48, 156-166.
31. Wang Rui, Zhang Jian-Min, Wang Gang. (2014), "A unified plasticity model for large post-liquefaction shear deformation of sand", *Computers and Geotechnics*, 59, 54-66.
32. Yao Yangping, Lu Dechun, Zhou Annan and Zou Bo (2004), "Generalized non-linear strength theory and transformed stress space", *Science in China, Ser. E, Engineering & Materials Science*, 47 (6) 691-709.
33. Yu Bao and Stein Sture (2011), "Numerical modeling of cyclic mobility based on fuzzy-set concepts in plasticity theory", *Computers and Geotechnics*, 38, 375-382.
34. Yu Mao-hong (2002), "Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century", *American Society of Mechanical Engineers Appl. Mech. Rev*, 55(3), May, 169-218.
35. Zhou Annan and Sheng Daichao (2015), "An advanced hydro-mechanical constitutive model for unsaturated soils with different initial densities", *Computers and Geotechnics*, 63, 46-66.
36. Zienkiewicz, O.C., Chan, A.H.C., Pastor, M. and Shiomi, T. (1999), *Computational Geomechanics with special Reference to Earthquake Engineering*, John Wiley and Sons, London, England.