УДК 621.391.01 **Піскун С.Ж. (ВІТІ НТУУ «КПІ»)**

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ЗБОЇВ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ ЗІ ШВИДКІСТЮ ПЕРЕДАЧІ ТА СКЛАДНІСТЮ СИСТЕМИ

Введення

Ефективність систем передачі інформації (СПІ) є однією з найважливіших проблем сучасної теорії і техніки зв'язку. Зараз мова йде про створення СПИ, в яких досягається швидкість і передача інформації без збоїв близькі до граничних. Реалізація таких систем можлива тільки на основі комплексного підходу з урахуванням усіх видів перетворень, яким піддається інформація та сигнали, що передаються. Ці сигнали безперервно удосконалюються і розвиваються. Обсяг інформації з кожним роком зростає, збільшується дальність зв'язку, більшими стають вимоги до якості передачі. Поряд з традиційними системами широко використовуються системи космічного та супутникового зв'язку, волоконно-оптичні системи, які швидкими темпами удосконалюються і розвиваються.

Передача інформації каналами зв'язку істотно ускладнюється наявністю перешкод і спотворень в них. У цих умовах проблема підвищення завадостійкості передачі повідомлень і стійкості зв'язку (надійності) стає однією з найважливіших при побудові СПИ різного призначення.

Тому впровадження досягнень сучасної науки йде за двома напрямами:

- Розробка принципово нових систем модуляції і кодування при значній зміні існуючої апаратури;
- Створення систем сумісних з існуючими системами без докорінної реконструкції апаратури.

Не зменшуючи значення першого напряму, слід підкреслити важливість, на сучасному етапі розвитку СПИ в Україну, другого напрямку, пов'язаного з підвищенням ефективності існуючих систем зв'язку.

Виходячи з цих положень, можна сказати, що найважливішими показниками системи передачі дискретних повідомлень є швидкість передачі R і вірогідність збоїв P, що характеризує точність і достовірність передачі. Ці показники, безпосередньо визначають інформаційні характеристики СПИ, - кількість і якість переданої інформації. Сукупність цих двох показників досить повно визначає інформаційну ефективність системи.

У традиційних системах зв'язку при невеликих швидкостях і помірної ймовірності передачі необхідні показники досягаються відповідним вибором сигналу, тобто вибором виду модуляції і демодуляції, - в кодуванні немає необхідності. У таких системах швидкість передачі повідомлення від джерела R (інформаційна швидкість) і швидкість передачі символів сигналу в каналі зв'язку V однакові: $R = V = \frac{1}{\tau}$ біт / с,

де τ - тривалість елементарного сигналу. Ця швидкість заздалегідь відома і повністю визначається джерелом повідомлення. Основним показником якості роботи таких СПИ імовірність появи помилки або збою P.

У двійковому симетричному каналі з білим шумом при поелементному оптимальному прийомі [1]

$$P = V\left(\frac{d_{12}}{\sqrt{2N_0}}\right) = V\left(\sqrt{\frac{(1-\rho)E}{N_0}}\right) = V\left(\sqrt{\frac{(1-\rho)P_c}{RN_0}}\right), \qquad (1)$$

де d_{12} - відстань між сигналами $S_1(t)$ і $S_2(t)$; ρ - коефіцієнт взаємної кореляції між цими сигналами; N_0 - одностороння спектральна щільність потужності білого шуму. Для сигналів з однаковими енергіями $(E_1 = E_2 = E)$

$$d_{12}^2 = \int_0^T [S_1(t) - S_2(t)]^2 dt = 2E(1-\rho); \quad (2)$$

$$\rho = \frac{1}{E}\int_0^T S_1(t)S_2(t)dt \quad (3)$$

Для протилежного сигналу $\rho = -1$, для ортогональних $\rho = 0$. Якщо ρ імовірність поганої якості прийому одного символу (біта) сигналу, то імовірність якості прийому послідовності з невідомих символів має вигляд:

$$P_0 = 1 - (1-P)^K = 1 - (1-P)^{RT}, \quad (4)$$

де T - тривалість послідовності $(T = K\tau)$.

З виразу (1) і (4) випливає, що в системах без кодування імовірність збоїв може бути зменшена лише за рахунок збільшення потужності сигналу або зменшення швидкості передачі.

При підвищених вимогах до якості передачі (малих p) доцільним стає застосування коригувальних кодів. У тих випадках, коли потрібно одночасно висока якість і велика швидкість передачі даних, стає неминучим застосування спеціальних кодів і відповідно складних кодеків. У кодових системах $R < V$ (кодування з надмірністю), де, $R = \frac{K}{T}$ а $V = \frac{N}{T}$. Тут K - довжина повідомлення (число шифрованих символів); N - число незалежних відліків на інтервалі T, тобто число двійкових символів у кодовій послідовності, що передається.

Розглянемо систему, в якій кожен з $M = 2^K = 2^{RT}$ рівноімовірних сигналів передається незалежної послідовністю з N двійкових символів (усього таких послідовностей може бути 2^N).

Для будь-якої сукупності M рівноімовірних сигналів імовірність помилки декодування

$$P_0(S) \le \sum_{\substack{i=0 \\ i \ne K}}^{M-1} P_2(S_i, S_K), \quad (5)$$

де $P_2(S_i, S_K)$ - імовірність помилки в системі, що використовує сигнали S_i і S_K для передачі двох рівноімовірних повідомлень. Враз (5) визначається ймовірністю того, що прийнятий $X = S_1 + \zeta$ сигнал може виявитись ближче до кожного з $M-1$ сигналів S_K, ніж до переданого $S_i(K \ne i)$. Для симетричних систем сигналів більша частина доданків в (5) однакова і відповідає

$$P_0(S) \le (M-1)P_2(S_i, S_K) \quad (6)$$

Однак правій частині виразу (5) потрібно точне знання сукупності сигналів $\{S_i\}_{i=1}^{M}$ і більшого обсягу обчислень. Тому обчислити $P_0(S)$ для конкретної системи сигналів (кодів) не уможливлено. Однак, як показав Шеннон [2], можна обчислити середню імовірність помилки анабля $\left(2^{N}\right)^{M}=2^{NM}$ систем зв'язку, кожна з яких складається з передавача, каналу і оптимального приймача:

$$\overline{P_0(S)} \le \sum_{\substack{i-0 \\ i\ne K}}^{M-1} \overline{P_2(S_i, S_K)} \le (M-1)\overline{P_2(\Sigma)} < MP_2(\Sigma) \; (7)$$

Для каналу з адитивним білим гауссовським шумом при прийомі по максимуму апостеріорної ймовірності $P_2(\Sigma)$ залежить лише від евклідової відстані d_{iK} між S_i та S_K (1):

$$P_2(S) = P_2(S_i, S_K) = V\left(\frac{d_{ik}}{\sqrt{2N_0}}\right) \; (8)$$

Якщо скористатися відомою оцінкою інтеграла ймовірності $V(x) < \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ та усереднити вираз (8) по ансамбмо, то вийде

$$\overline{P_2(S)} < 2^{-N\gamma_0}, \; (9)$$

де γ_0 - показник експоненційної оцінки, що дорівнює

$$\gamma = 1 - \log\left(1 + e^{-\frac{E}{N_0}}\right) \; (10)$$

Після підстановки (9) в (7) з урахуванням того, що $M = 2^{RT} = 2^{N\gamma_N}$, отримуємо наступну верхню оцінку для середньої ймовірності помилки:

$$\overline{P_0(S)} < 2^{-N(\gamma_0 - \gamma_N)}, \; (11)$$

де γ_N - питома швидкість передачі, що визначається як кількість біт інформації, що передається одним відліком (в біт / відлік):

$$\gamma_N = \frac{R}{V} = \frac{RT}{N} \; (12)$$

Тут, $V = \frac{N}{T} = aF$ а $N = aTF$ - число незалежних відліків, що відводяться для передачі сигналів на інтервалі T в каналі з шириною смуги частот, що дорівнює F; a - коефіцієнт залежить від характеристик каналу (для сигналу з обмеженим спектром згідно теорії Котельникова $N = 2TF$, $a = 2$ та $V = 2F$). Число відліків (символів) N зазвичай прийнято називати довжиною кодового блоку.

З виразу (11) випливає, що середня імовірність помилки може бути безпідставно малої за рахунок вибору достатньо великих N, якщо тільки питома швидкість передачі γ_N менша за граничну швидкість γ_0.

При практичних розрахунках зручно питому швидкість визначати відносно не числа відліків, а відносно ширини смуги частот каналу, як це і було зроблено в [3]. Вочевидь, має місце співвідношення

$$\gamma = a\gamma_N,\ \beta = \beta_N,\ \eta = \eta_N \quad (13)$$

де β - коефіцієнт використання потужності сигналу; η - коефіцієнт використання пропускної спроможності каналу.

З виразу (10) випливає, що для сигналів, що складаються з двійкових послідовностей при $\frac{E}{N} >> 1$ величина γ_0 асимптотично прагне до значення $\gamma_{0\max} = 1$ біт/відлік, що відповідає $\gamma_{\max} = 2$ біт/с Гц (межа Найквіста). Це означає, що передача двійковими послідовностями не є ефективною ($\gamma < 2$). Ефективність передачі можна суттєво збільшити, якщо прийти до сигналів, що складаються з m-ічних послідовностей. У цьому випадку загальна кількість сигналів $M = m^N$, а максимальне значення питомої швидкості $\gamma_{0\max} = \log m$ біт/відлік (відповідно $\gamma_{\max} = 2\log m$ біт/с Гц).

Середня імовірність помилки для систем, що використовують m-ічні сигнали (коди з основою $m > 2$), також оцінюється нерівністю (11), в яке необхідно підставити відповідне значення γ_0. У загальному випадку для симетричної системи рівноімовірних сигналів

$$\gamma_0 = -\log\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{K=1}^{K}\exp\left[-\frac{d_{iK}^2}{4N}\right] \quad (14)$$

Граничне значення питомої швидкості γ_0 характеризує дискретний канал, отже, залежить від способів модуляції і демодуляції. При $\gamma_N < \gamma_0$ може бути досягнуто як завгодно мала імовірність помилки. Відповідно до теорії Шеннона довільно малу помилку можна отримати при $\gamma_N < C_N$, де C_N - пропускна спроможність на один відлік, яка описується виразом [2]

$$C_n = 0{,}5\log\left(\frac{P_c}{P_e + 1}\right)$$

Теорія про пропускну спроможність сильніше в тому сенсі, що $\gamma_0 < C_N$. Однак, знаючи γ_0, можна визначити верхню оцінку імовірності помилки $\overline{P_0(S)}$ (11) як функцію N та γ_N. Знання ж тільки C_N для цього недостатньо. Більш точна оцінка завадостійкості (імовірність помилки) визначається співвідношенням

$$P_0(S) \le A\exp[-NE(R)], \quad (15)$$

де $E(R)$ - функція надійності, позитивна при $R < C$ та дорівнює нулю при $R = C$; A - коефіцієнт, який повільно змінюється з ростом N.

У сучасних системах зв'язку, як загального користування, так і спеціального призначення широко використовується цифрова обробка сигналів.

Експоненціальна оцінка імовірності помилки $\overline{P_0(S)}$ (11) слушна не тільки для систем з випадковим кодуванням, для яких вона була отримана. Можна показати, що вона слушна і для реалізованих кодів, зокрема для кодів з перевіркою на парність, двійкових згорткових кодів [4,5]. Так, для згорткових кодів з послідовним декодуванням у двійковому симетричному каналі середня імовірність події, аналогічна середній імовірності помилки декодування, визначається наступною нерівністю [6]:

$$P_0(S) \le A_0 2^{-0,5\left[D\nu\left(\frac{\nu_0}{\gamma_N - 1}\right)\right]}, \ \gamma_N < \gamma_0, (16)$$

$$\text{де } A_0 = \frac{2}{1 - 2^{0,5\left[\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_N}\right) - 1\right]}}, (17)$$

де ν - кодове обмеження.

Цілком очевидно, що складність системи декодування залежить від співвідношення $\frac{\gamma_0}{\gamma_N}$: чим ближче цей показник до одиниці, тим складніше система.

Для розглянутих згорткових кодів складність, яка визначається середнім числом обчислень B декодера на один біт, обмежена нерівністю [7]:

$$B < 3A_0 \approx \frac{100}{\left[\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_N}\right) - 1\right]^2}.$$

Висновки

З проведених досліджень видно, що питома швидкість передачі γ_N є вельми змістовною характеристикою СПИ. Максимальне значення цієї швидкості γ_0 дозволяє обчислити вірогідність помилки декодування $P_0(S)$ при заданій швидкості передачі γ_N та визначити обчислювальну складність системи B.

Слід також зазначити, що критерії максимуму питомої швидкості є досить загальними, з яких як окремий випадок випливає традиційний критерій мінімуму помилки. Критерій максимуму взаємної інформації, як видно з досліджень, збігається з критеріями максимуму правдоподібності, а останній - з критерієм мінімуму помилки

Список літератури

1. Финк Л.М. – Теория передачи дискретных сообщений / Финк Л.М. – М. : Сов. Радио, 1970. – 727 с.
2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / Шеннон К. – М. : ИЛ, 1963. – 829 с.
3. Зюко А.Г. – Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / Зюко А.Г., Фалько А.И., Панфилова И.П., Банкет В.Л., Иващенко П.В. – М. : Радио и связь, 1985. – 272 с.
4. Галлар Р. – Теория информации и надежная связь / Галлар Р. – М. : Сов. Радио, 1974. – 720 с.
5. Белецкий А.Я. – Комбинаторика кодов Грея / Белецкий А.Я. – К. : Изд. [illegible], 2003. – 506 с.
6. Возенкрафт Дж. – Теоритические основы техники связи / Возенкрафт Дж., Джекобс И. – М. : Мир, 1969. – 640 с.
7. Ирвин Дж. – Передача данных в сетях: инженерный подход / Ирвин Дж., Харль Д. – СПб. : БХВ Петербург, 2003. – 448 с.

Рецензент: Баранов Г.Л.
Надійшла 25.01.2011