УДК 531 + 539.3
Ю.В. Човнюк, к.т.н., доцент, КНУБА

ОСОБЛИВОСТІ ВІБРАЦІЙНИХ ТА ВІБРОУДАРНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ПРЕСОВАНИХ „ЗВ'ЯЗАНИХ" СТРУКТУРАХ ПОРОШКОВИХ МАТЕРІАЛІВ

Використання дії вібрації суттєво підвищує ефективність таких технологічних процесів, у котрих об'єктами обробки є порошкові матеріали (ПМ). Загальні тенденції поведінки цих матеріалів під дією вібрації [1-4] наступні: збільшується густина й рівнощільність готових виробів по усьому об'єму, знижуються ефективні коефіцієнти тертя між часточками ПМ й оточуючими поверхнями, наприклад, у прес-формах; значно, у десятки разів, зменшуються зусилля у порівнянні зі статичним пресуванням за рахунок зниження сил бічного та внутрішнього тертя, а також збільшення рухливості часточок ПМ у напрямку прикладеного зусилля пресування за так званого „уявного (псевдо-) ожиження". Пластичні монолітні та ПМ (металеві) знаходяться, головним чином, у полі обробки тиском (пресуванні). Властивості таких матеріалів досить детально досліджені, а процеси деформування описуються математичними виразами теорії пластичності. Непластичні матеріали – керамічні, вогнетривкі, фарфоро-фаянсові прес-порошки – у процесі ущільнення чи формоутворення не деформуються у пластичній зоні (явище пластичного деформування може спостерігатись у ПМ такого типу тільки у випадку введення пластифікуючих чи зв'язуючих домішок); для цих матеріалів небажані навантаження, які перевищують границю/межу пружності й викликають руйнування вихідних часточок ПМ. Такі матеріали мають реологічні властивості і для них характерні релаксаційні явища.

Метою даної роботи є встановлення особливостей та основних закономірностей вібраційних, ударних, віброударних процесів у ПМ.

Умовний поділ основних об'єктів обробки за вказаних вище технологічних процесів на пластичні й непластичні може бути замінений відповідним поділом на металеві та неметалеві ПМ й сипучі матеріали. Застосування металевих та неметалевих вихідних матеріалів визначене специфікою виробництва. У порошковій металургії переважають металеві чи ті, що мають металеву основу ПМ, у промисловості вогнетривких матеріалів і при виробництві керамічних виробів застосовують, наприклад, неметалеві ПМ на основі карбіду кремнію (МПК, С-2), шамотні матеріали та ін.

До неметалевих відносяться й сипучі матеріали, котрі є об'єктами обробки вібраційних та віброударних технологічних процесів у будівництві, а також абразивні матеріали, що застосовуються у процесах остаточної обробки деталей.

Такий поділ визначив аналогії з достатньо вивченими процесами пластичного деформування металів (для об'єктів обробки, що мають властивості металів) й з особливостями ущільнення грунтів і бетонів – для неметалевих ПМ й сипучих матеріалів. Цими аналогіями можна пояснити і розмаїття у термінах для однотипових технологічних процесів пресування, ущільнення, формування.

Згідно [4], з поняттям „**пресування**" зазвичай зв'язують процеси стискування (всебічного) об'єктів обробки під тиском, близьким чи перевищуючим межі пружності й текучості матеріалу, а під процесом „**ущільнення"** розуміють тільки збільшення щільності укладання часточок сипучого матеріалу без значного їх деформування, оскільки хрупке руйнування часточок знижує щільність заготовленого виробу чи напівфабрикату. Процес **„формування"** визначається ущільненням ПМ під впливом прикладеного тиску й збереженням заданої форми після зняття навантаження. В умовах виробництва з урахуванням такої термінології складно дати визначення цілому ряду вібраційних та віброударних процесів, наприклад, процесам отримання напівфабрикатів виробів з неметалевих ПМ, у яких є хрупкі основні часточки, котрі небажано руйнувати, і часточки зв'язуючих та пластифікуючих домішок, які деформуються у широких межах. Тому у подальшому буде використана термінологія, що прийнятна для конкретної галузі, де застосовуються такі однотипові технологічні процеси, а при розгляді загальнотеоретичних питань – поняття „ущільнення".

1. Особливості статичного пресування ПМ у межах моделі „зв'язаної" порової структури.

У випадку найпростішої схеми (вібраційного, статичного) пресування у вихідній позиції на робочому столі вібропресу закріплюють циліндричну матрицю прес-форми з ПМ, вільна поверхня якого навантажена через пуансон незначним вісьовим статичним зусиллям N від рухомої траверси. Якщо розглядати тільки непластичний ПМ, позбавлений пластифікуючих та зв'язуючих домішок, то під дією питомого статичного зусилля $p_N = N / S_k$, де S_k - сумарна площа контактів між пуансоном й часточками ПМ на вільній поверхні, у замкненому об'ємі прес-форми утворюється „зв'язана" порова структура, яка складається з часточок ПМ, взаємодіючих між собою й з оточуючими стінками. Величина деформацій у зонах контактів часточок обмежена пружними властивостями самого ПМ, а форми контактів й зчеплення часточок ПМ визначені, головним чином, їх конфігурацією.

Рівняння динаміки часточок „зв'язаної" структури ущільнюваного ПМ за умови, що на систему діють поряд з відновлюючими консервативними силами (пружності) ще й дисипативні сили, які описуються функцією Релея, можуть бути записані у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[m_{ik}\cdot\ddot{y}_k + b_{ik}\cdot\dot{y}_k + c_{ik}\cdot y_k\right]=0,\ \ (i,k)=\overline{(1,n)},\ \ (m_{ik},b_{ik},c_{ik})>0, \tag{1}$$

де $m_{ik}-$тензор маси, $m_{ik}\equiv m_{ii}\equiv m_i$, $m_{ik}=0,$ якщо $i\neq k; b_{ik}-$дисипативні коефіцієнти, що враховують ефекти в'язкого тертя у середовищі ПМ; $c_{ik}-$пружний коефіцієнт зв'язку між $i-$ою та $k-$ою часточками ПМ; y_k-переміщення $k-$ої часточки у ПМ; $\dot{y}_k\equiv\dfrac{dy_k}{dt}, t-$час; $\ddot{y}_k\equiv\dfrac{d^2y_k}{dt^2}.$

Розв'язок рівнянь (1) знаходимо у вигляді:

$$y_k = A_k\cdot e^{mt}; \dot{y}_k = A_k\cdot m\cdot e^{mt}; \ddot{y}_k = A_k\cdot m^2\cdot e^{mt}. \tag{2}$$

Підставляючи вирази (2) у рівняння (1), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[m_{ik}\cdot m^2 + b_{ik}\cdot m + c_{ik}\right]\cdot A_k = 0. \tag{3}$$

Позначимо визначник з коефіцієнтів системи (3) $\Delta(m)$ у вигляді:

$$\Delta(m)=\left\|m_{ik}\cdot m^2 + b_{ik}\cdot m + c_{ik}\right\|. \tag{4}$$

Однорідна система алгебраїчних рівнянь (3) має ненульові рішення відносно величин, що до неї входять $A_1, A_2,..., A_n,$ тільки у тому випадку, коли її визначник:

$$\Delta(m)=0. \tag{5}$$

Корені характеристичного рівняння (5) можуть бути дійсними чи комплексними. Можна довести, що у першому випадку всі корені будуть від'ємними, а у другому будуть мати від'ємні дійсні частини (доведення цього можна знайти у книзі Л.Г. Лойцянського та О.І. Лурьє „Теоретична механіка" (рос. мовою). – М.: ОНТИ, 1934. – Ч. III.).

Розглянемо рух системи часточок ПМ у кожному із вказаних випадків.

Випадок 1. Нехай усі корені рівняння (5) дійсні і від'ємні. Позначимо їх $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2,..., \tilde{m}_n$. Підставляючи який небудь з коренів $\tilde{m}_s, s=\overline{(1,n)}$ у рівняння (3), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(m_{ik}\cdot\tilde{m}_s^{\ 2} + b_{ik}\cdot\tilde{m}_s + c_{ik}\right)\cdot A_k^{(s)}=0, \tag{6}$$

де $A_k^{(s)}-$амплітуда коливань $k-$ої часточки за наявності $\tilde{m}_s-$кореня (6).

Визначник системи (6) при $m=\tilde{m}_s$ перетворюється у нуль, і система має ненульові розв'язки, які визначаються згідно формул:

$$A_1^{(s)}=C_s\cdot\Delta_1(\tilde{m}_s), A_2^{(s)}=C_s\cdot\Delta_2(\tilde{m}_s),.. \\ ., A_n^{(s)}=C_s\cdot\Delta_n(\tilde{m}_s), \tag{7}$$

де $\Delta_1(\tilde{m}_s),\Delta_2(\tilde{m}_s),...,\Delta_n(\tilde{m}_s)-$мінори першого, другого і т.д. стовпчиків останнього рядка визначника $\Delta(\tilde{m}_s)$.

Приймаючи до уваги знайдені значення $A_k^{(s)}$, згідно з формулою для y_k (2) знаходимо:

$$y_k^{(s)}=C_s\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s)\cdot\exp(\tilde{m}_s\cdot t),\ \ (k,s)=\overline{(1,n)}. \tag{8}$$

Приймаючи до уваги, що $\tilde{m}_s<0,$ робимо висновок про аперіодичний затухаючий рух часточок ПМ.

Загальний розв'язок системи (1) отримаємо, складаючи у суму частинні розв'язки (8):

$$y_k=\sum_{s=1}^{n}C_s\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s)\cdot\exp(\tilde{m}_s\cdot t). \tag{9}$$

Випадок 2. Нехай тепер усі корені визначника $\Delta(\tilde{m}_s)=0$ комплексні числа:

$$\tilde{m}_s=-n_s+j\cdot\lambda_s, \tilde{m}_s^{\ *}=-n_s-j\cdot\lambda_s, j=+\sqrt{-1}. \tag{10}$$

Тоді амплітуди $A_k^{(s)}$ у цьому випадку будуть також комплексними:

$$A_k^{(s)}=C_s\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s), A_k^{(s)*}=C_s^{\ *}\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s^{\ *}). \tag{11}$$

У цьому випадку частинний розв'язок системи (1) знаходиться у вигляді:

$$y_k^{(s)}=C_s\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s)\cdot\exp(\tilde{m}_s\cdot t)+C_s^{\ *}\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s^{\ *})\cdot \\ \cdot\exp(\tilde{m}_s^{\ *}\cdot t)=\exp(-n_s\cdot t)\begin{bmatrix}C_s\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s)\cdot\exp(j\cdot\lambda_s\cdot t)+ \\ +C_s^{\ *}\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s^{\ *})\cdot\exp(-j\cdot\lambda_s\cdot t\end{bmatrix} \tag{12}$$

Представимо $\Delta_k(\tilde{m}_s)$ і $\Delta_k(\tilde{m}_s^{\ *})$ у вигляді:

$$\Delta_k(\tilde{m}_s)=\Delta_{ks}^{\ *}+j\cdot\overline{\Delta}_{ks}, \Delta_k(\tilde{m}_s^{\ *})=\Delta_{ks}^{\ *}-j\cdot\overline{\Delta}_{ks}. \tag{13}$$

Нехай:

$$C_s = \frac{1}{2}\cdot\left(\tilde{C}_s + j\cdot\hat{C}_s\right), C_s^* = \frac{1}{2}\cdot\left(\tilde{C}_s - j\cdot\hat{C}_s\right). \qquad (14)$$

Неважко показати, що вираз (12) є дійсним. Добутки $C_s\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s)$ і $C_s^*\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s^*)$ з урахуванням формул (13) і (14) можна подати у вигляді:

$$C_s\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s) = \frac{1}{2}\cdot(\tilde{C}_s + j\cdot\hat{C}_s)\cdot(\Delta_{ks}^* + j\cdot\overline{\Delta}_{ks}) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(\tilde{C}_s\cdot\Delta_{ks}^* - \hat{C}_s\cdot\overline{\Delta}_{ks}) + \frac{1}{2}\cdot j\cdot(\tilde{C}_s\cdot\overline{\Delta}_{ks} + \hat{C}_s\cdot\Delta_{ks}^*); \qquad (15)$$

$$C_s^*\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s^*) = \frac{1}{2}\cdot(\tilde{C}_s - j\cdot\hat{C}_s)\cdot(\Delta_{ks}^* - j\cdot\overline{\Delta}_{ks}) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(\tilde{C}_s\cdot\Delta_{ks}^* - \hat{C}_s\cdot\overline{\Delta}_{ks}) - \frac{1}{2}\cdot j\cdot(\hat{C}_s\cdot\Delta_{ks}^* + \tilde{C}_s\cdot\overline{\Delta}_{ks}). \qquad (16)$$

Підставляючи отримані вирази (15) і (16) у розв'язок (12) та приймаючи до уваги, що:

$$\exp(j\cdot\lambda_s\cdot t) = \cos(\lambda_s\cdot t) + j\cdot\sin(\lambda_s\cdot t),$$
$$\exp(-j\cdot\lambda_s\cdot t) = \cos(\lambda_s\cdot t) - j\cdot\sin(\lambda_s\cdot t), \qquad (17)$$

отримуємо:

$$y_k^{(s)} = \exp(-n_s\cdot t)\begin{Bmatrix}(\tilde{C}_s\cdot\Delta_{ks}^* - \hat{C}_s\cdot\overline{\Delta}_{ks})\cdot\cos(\lambda_s\cdot t) \\ -(\tilde{C}_s\cdot\overline{\Delta}_{ks} + \hat{C}_s\cdot\Delta_{ks}^*)\cdot\sin(\lambda_s\cdot t)\end{Bmatrix}, \quad k = \overline{(1,n)}. \qquad (18)$$

Тоді y_k можна знайти як суму розв'язків (18):

$$y_k = \sum_{s=1}^{n} y_k^{(s)}. \qquad (19)$$

Нехтуючи в'язким тертям часточок ПМ ($b_{ik}\to 0$ у (1) для всіх значень (i,k)) матимемо розв'язок (1) у вигляді гармонічних коливань з частотою ω_s й початковою фазою φ_s :

$$y_k^{(s)} = A_k^{(s)}\cdot\sin\{\omega_s\cdot t + \varphi_s\}, \omega_s \equiv \lambda_s, \qquad (20)$$

де додатні корені характеристичного рівняння (5) утворюють спектр можливих власних частот „зв'язаної" структури ПМ, $A_k^{(s)}$ – амплітуда коливання k – ої часточки ПМ на частоті ω_s, що знаходиться зі співвідношення:

$$A_k^{(s)} = C_s\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s). \qquad (21)$$

Тоді y_k матиме вигляд:

$$y_k = \sum_{s=1}^{n} C_s\cdot\Delta_k(\tilde{m}_s)\cdot\sin\{\omega_s\cdot t + \varphi_s\}. \qquad (22)$$

Цей розв'язок має $2n$ довільних констант $C_1, C_2, ..., C_n, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, котрі визначаються за заданими початковими умовами, $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}, \dot{y}_1^{(0)}, \dot{y}_2^{(0)}, ..., \dot{y}_n^{(0)}$, з рівнянь:

$$\begin{cases} y_i^{(0)} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} C_\nu\cdot\Delta_i(\omega_\nu^{\,2})\cdot\sin\varphi_\nu, \\ \dot{y}_i^{(0)} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} C_\nu\cdot\omega_\nu\cdot\Delta_i(\omega_\nu^{\,2})\cdot\cos\varphi_\nu. \end{cases} \qquad (23)$$

Слід зазначити, що дослідження вільних коливань часточок ПМ зводиться до визначення власних частот $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ з рівнянь типу (5) та власних форм, тобто до визначення мінорів $\Delta_1(\omega_\nu), \Delta_2(\omega_\nu), ..., \Delta_n(\omega_\nu), \nu = \overline{(1,n)}$ відношень:

$$\frac{\Delta_1(\omega_\nu)}{\Delta_n(\omega_\nu)} = \frac{A_1^{(\nu)}}{A_n^{(\nu)}}; \frac{\Delta_2(\omega_\nu)}{\Delta_n(\omega_\nu)} = \frac{A_2^{(\nu)}}{A_n^{(\nu)}} \text{ і т.д.}$$

Якщо прийняти $A_n^{(\nu)} = 1$, то можна обчислити у скільки разів амплітуди $A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, ..., A_n^{(\nu)}$ більше чи менше $A_n^{(\nu)}$. При цьому:

$$A_1^{(\nu)} = \frac{\Delta_1(\omega_\nu)}{\Delta_n(\omega_\nu)}, ..., A_{n-1}^{(\nu)} = \frac{\Delta_{n-1}(\omega_\nu)}{\Delta_n(\omega_\nu)}. \qquad (24)$$

Власні частоти ω_ν коливань часточок ПМ у межах моделі „зв'язаної" структури, створеної у замкненому об'ємі прес-форми у результаті силової взаємодії з пуансоном, утворюють весь спектр частот системи.

Процес вібраційного пресування можна представити як попадання у резонанс головних коливань системи, коли усі часточки „зв'язаної" структури коливаються з однією і тією ж власною частотою, що відповідає частоті зовнішнього коливного впливу. У ряді робіт [3,4] зазначена наявність резонансної частоти ущільнюваного матеріалу та ефективність виконання умов резонансного режиму навантаження у процесі пресування. У випадку попадання системи у резонанс між часточками „зв'язаної" структури порушуються первинно встановлені зв'язки, контакти та зачеплення. Під дією сил тяжіння, інерційних сил та вісьових сил статичного навантаження часточки ПМ намагаються переорієнтуватись і більш щільно укластись між собою у заданому об'ємі, що супроводжується займанням більш стійких положень рівноваги. При цьому спостерігається руйнування початкових структурних утворень типу „арок" та „містків" з наступним рівномірним укладанням утворюючих їх часточок, що мають підвищену рухливість у напрямку статичного зусилля навантаження за рахунок зниження практично до нуля ефективних коефіцієнтів внутрішнього та бічного тертя.

Зміцнення напівфабрикату виробу з ПМ відбувається у процесі ущільнення „зв’язаної” структури та збільшення площі контактів між часточками, а також за рахунок заклинювання й зачеплення часточок ПМ між собою у положенні стійкої рівноваги. При цьому ущільнення та зміцнення непластичних ПМ відбувається практично без руйнування часточок у зонах контактів при деформаціях, що не перевищують границі пружності. У загальному випадку для розглядуваної „зв’язаної” структури ПМ, рух котрої описується системою рівнянь (1), число резонансів відповідає числу власних частот, а впорядкована сукупність останніх і утворює спектр власних частот $\omega_1 \le \omega_2 \le \omega_3 \le ... \le \omega_n$.

Визначення спектру власних частот „зв’язаної” структури шляхом розв’язку системи n рівнянь (1) засноване на теорії матриць і наведене вище. Однак цей шлях розв’язку може бути значно спрощений. У пресованій „зв’язаній” структурі ПМ виділяють деяке елементарне з’єднання, наприклад, у вигляді ланцюга часточок, орієнтованих вподовж лінії пресування по вісі Oy (рис. 4, [4]). Силова взаємодія між часточками виділеного ланцюга та оточуючого середовища може умовно не розглядатись. Це припущення засноване на відомому віброреологічному ефекті [4], коли на ланцюг часточок, що переміщуються, наприклад, вздовж вісі Oy під дією зовнішнього коливного впливу та вісьового статичного зусилля, не впливають сили бічного тиску, які визначають опір цьому переміщенню у вигляді сил тертя. У розглядуваному ланцюгу часточки ПМ масою m_i умовно є сферичними, первинні відстані a між часточками визначені конфігурацією та розмірами ($r-$радіусом) останніх; взаємодія між часточками по умовним лініям пружних зв’язків визначається жорсткістю:

$$\frac{N_i}{a} = \frac{p_N \cdot S_k}{h} = \frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max}+1)\cdot a}, \qquad (25)$$

де $h-$відстань від нижньої поверхні пуансона до дна прес-форми у початковий момент пресування, $h=(n_{\max}+1)\cdot a, n_{\max}-$ланцюг максимальної довжини з часточок ПМ має саме таку кількість елементів (у початковий момент пресування). Тоді величина N_i має вигляд:

$$N_i = \frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max}+1)}. \qquad (26)$$

Слід відзначити, що відхилення y_i часточки масою $m_i = \rho \cdot \frac{4}{3}\cdot \pi \cdot r^3$ (де $\rho-$щільність матеріалу ПМ у твердій фазі) від положення рівноваги не перевищує величини пружної деформації матеріалу та значно менше a.

Характерна (кругова) частота „товщинного” резонансу у „зв’язаній” структурі ω_0 визначається із співвідношення:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{N_i}{m_i \cdot a}} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max}+1)\cdot a \cdot m_i}}, \quad a \ge 2r. \qquad (27)$$

Оскільки початкова товщина виробу $h_{поч.} = h = (n_{\max}+1)\cdot a,$ а $h_{ущ.}-$товщина виробу з ПМ при максимальному його ущільненні ($a=2r$), то:

$$a = \frac{h}{(n_{\max}+1)} = \frac{h}{(h_{ущ.}/2r)} = 2\cdot r \cdot \frac{h}{h_{ущ.}}. \qquad (28)$$

Тоді $\omega_0^{(\min)}$ визначається з (27) при $a > 2r,$ а $\omega_0^{(\max)}$ наступним чином:

$$\omega_0^{(\max)} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max}+1)\cdot 2r \cdot m_i}} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{h_{ущ.} \cdot m_i}}. \qquad (29)$$

Зазначимо, що:

$$\omega_0^{(\min)} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{(n_{\max}+1)\cdot a \cdot m_i}} = \sqrt{\frac{p_N \cdot S_k}{h \cdot m_i}}. \qquad (30)$$

Автори [4] у межах розглядуваної моделі визначили спектр „зв’язаної” структури, який після простих перетворень набуває виду:

$$\omega_s = \omega_0 \cdot \sqrt{2\cdot\left(1-\cos\left\{\frac{s\cdot\pi}{(n_{\max}+1)}\right\}\right)} = \omega_0 \cdot \sqrt{2\cdot\left(1-\cos\left\{\frac{s\cdot\pi\cdot a}{h}\right\}\right)} = \omega_0 \cdot \sqrt{2\cdot\left(1-\cos\left\{\frac{s\cdot\pi\cdot 2r}{h_{ущ.}}\right\}\right)},$$
$$s = \overline{(1, n_{\max})}. \qquad (31)$$

Величина $\omega_s^{(\max)} \approx 2\cdot\omega_0$, а точне значення знаходимо з виразу:

$$\omega_s^{(\max)} = \omega_0 \cdot \sqrt{2\cdot\left(1-\cos\left\{\frac{s\cdot\pi}{(n_{\max}+1)}\right\}\right)}\Bigg|_{s=n_{\max}} =$$

$$= \omega_0 \cdot \sqrt{2\cdot\left(1-\cos\left\{\frac{n_{\max}\cdot\pi}{(n_{\max}+1)}\right\}\right)}. \tag{32}$$

При $n_{\max} >> 1$ $\omega_s^{(\max)} \to 2\omega_0$. Саме така максимальна частота коливань характерна для всіх коливних систем, утворених з однакових часточок (ПМ) з масою m_i кожної.

Ширина спектру частот $\Delta\omega$ „зв'язаної" структури визначається з умови:

$$\Delta\omega = 2\cdot\omega_0\cdot\left\{\sin\left[\frac{n_{\max}\cdot\pi}{2\cdot(n_{\max}+1)}\right]-\sin\left[\frac{\pi}{4}\right]\right\}. \tag{33}$$

Для $n_{\max} >> 1$ з (33) маємо:

$$\Delta\omega \approx 2\cdot\omega_0\cdot\left\{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} = 2\cdot\omega_0\cdot\left\{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}. \tag{34}$$

Мінімальною ширина спектру частот $\Delta\omega$ „зв'язаної" структури буде на початку процесу пресування ПМ:

$$\Delta\omega^{(\min)} = 2\cdot\omega_0^{(\min)}\cdot\left\{\sin\left[\frac{n_{\max}\cdot\pi}{2\cdot(n_{\max}+1)}\right]-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}, \tag{35}$$

а максимальною – у фінальній стадії процесу:

$$\Delta\omega^{(\max)} = 2\cdot\omega_0^{(\max)}\cdot\left\{\sin\left[\frac{n_{\max}\cdot\pi}{2\cdot(n_{\max}+1)}\right]-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}. \tag{36}$$

Використовуючи підхід [5,6], можна встановити дисперсійне співвідношення для хвиль, які можуть розповсюджуватись у „зв'язаній" структурі ПМ за її статичного навантаження. Для цього будемо розшукувати розв'язок рівняння моделі „ближнього порядку" (квазіодновимірної гратки), нехтуючи дисипативними ефектами:

$$m_i\cdot\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{N_i}{a}\cdot\left[(y_{i+1}-y_i)-(y_i-y_{i-1})\right], \tag{37}$$

у вигляді:

$$y_i = A_i\cdot\exp\{j\cdot\xi\cdot i\cdot a - j\cdot\omega\cdot t\}, \tag{38}$$

де $\xi -$ хвильовий вектор, $\omega -$ частота хвилі (кругова), яка „підтримується" (розповсюджується) у „зв'язаній" структурі.

Дисперсійне співвідношення матиме наступний вигляд:

$$\xi\cdot a = \arccos\left[1-\left(\omega\cdot\sqrt{\frac{m_i\cdot a}{2\cdot N_i}}\right)\right]. \tag{39}$$

Зазначимо, що довжина хвилі $\Lambda_\xi = \dfrac{2\cdot\pi}{\xi}$ може змінюватись у межах $2\cdot a \le \Lambda_\xi < +\infty$, оскільки $0 \le \xi\cdot a \le \pi$. Фізична причина цього обмеження полягає у тому, що ми маємо можливість спостерігати рух лише у тих точках ПМ, де знаходяться матеріальні часточки [6].

Розглянемо модель „зв'язаної" структури ПМ, в якій рух одновимірної квазігратки, що складається з часточок двох сортів з масою m_1 (непарні номери) та масою m_2 (парні номери), а також при взаємодії тільки між найближчими сусідніми часточками, описується системою рівнянь [6]:

$$\begin{cases} m_1\cdot\dfrac{d^2 y_{2i-1}}{dt^2} = \dfrac{N_i}{a}\cdot(y_{2i-2}-2\cdot y_{2i-1}+y_{2i}), \\ m_2\cdot\dfrac{d^2 y_{2i}}{dt^2} = \dfrac{N_i}{a}\cdot(y_{2i-1}-2\cdot y_{2i}+y_{2i+1}). \end{cases} \tag{40}$$

У якості маси m_2 можна взяти масу об'єму порового (заповненого повітрям) простору між часточками ПМ, який має форму сфери еквівалентного радіусу

$$r_{екв.}\,(m_2 = \rho_{повітря}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r_{екв.}^{\ 3}).$$

Розв'язок системи (40) розшукуємо у вигляді:

$$\begin{cases} y_{2i-1} = A_1\cdot\exp\{j\cdot\xi\cdot(2i-1)\cdot a - j\cdot\omega\cdot t\}, \\ y_{2i} = A_2\cdot\exp\{j\cdot(2i)\cdot a - j\cdot\omega\cdot t\}. \end{cases} \tag{41}$$

Тоді, підставляючи (41) у (40), прийдемо до однорідної системи рівнянь відносно постійних A_1 й A_2 :

$$\begin{cases} A_1\cdot\left(\dfrac{m_1\cdot a}{2\cdot N_i}\cdot\omega^2-1\right)+A_2\cdot\cos(\xi\cdot a) = 0, \\ A_1\cdot\cos(\xi\cdot a)+A_2\cdot\left(\dfrac{m_2\cdot a}{2\cdot N_i}\cdot\omega^2-1\right) = 0. \end{cases} \tag{42}$$

З умови нетривіального розв'язку цієї однорідної системи випливає дисперсійне рівняння:

$$\cos\{2 \cdot \xi \cdot a\} = 2 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot a}{2 \cdot N_i} \cdot \omega^2 - 1 \right) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{m_2 \cdot a}{2 \cdot N_i} \cdot \omega^2 - 1 \right) - 1 \equiv b_2 . \tag{43}$$

Розв'язок рівняння (43) у зонах пропускання хвиль такою „зв'язаною" структурою ПМ має вид [6]:

$$\xi \cdot a = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \arccos b_2, \ 0 < \omega \cdot \sqrt{\frac{M \cdot a}{2 \cdot N_i}} < \frac{M}{m_1}, \ \textit{I зона пропускання;} \\ \pi - \frac{1}{2} \cdot \arccos b_2, \ \frac{M}{m_2} < \omega \cdot \sqrt{\frac{M \cdot a}{2 \cdot N_i}} < \frac{M}{m_1} + \frac{M}{m_2}, \ \textit{II зона пропускання,} \end{cases} \tag{44}$$

де $M -$ деякий параметр, розмірність котрого співпадає з розмірністю m_p, $p = \overline{(1,2)}$.

Слід підкреслити про суттєву властивість розв'язку (44), яка полягає у тому, що він призводить до додатніх значень групової швидкості хвиль $v_g = \frac{d\omega}{d\xi}$ у обох зонах їх пропускання через ПМ (I,II).

Довжина хвилі $\Lambda_\xi = \frac{2 \cdot \pi}{\xi}$ змінюється і у цьому випадку у межах $2 \cdot a \le \Lambda_\xi < +\infty$, оскільки $0 < \xi \cdot a < \pi$.

2. Особливості ударного пресування ПМ у межах моделі діючих періодичних миттєвих імпульсів [7].

У процесі ударного пресування ПМ зазвичай мають справу з короткотривалими силами, дія котрих повторюється через відносно великі однакові проміжки часу. У цих випадках часто використовують ідеалізоване уявлення про миттєві імпульси й зводять задачу до дослідження дії періодично прикладуваних, рівних один одному миттєвих імпульсів S. У подальшому використаємо саме цей підхід [7] для аналізу ударного методу пресування ПМ.

Нехай $T -$ період прикладання імпульсів, тоді $0, T, 2T, ... -$ моменти прикладання нульового (початкового), першого, другого й т.д. імпульсів.

Розглянемо спочатку дію тільки одного початкового імпульсу. У цьому випадку диференціальне рівняння руху:

$$m_i \cdot \ddot{y}_i + c_i \cdot y_i = 0, \ i = \overline{(1, n_{\max})}, \tag{45}$$

де $c_i -$ еквівалентна жорсткість (пружний коефіцієнт зв'язку для $i -$ої часточки ПМ з іншими), яка може бути знайдена із залежності:

$$\frac{1}{c_i} = \sum_{j=1}^{n_{\max}} \frac{1}{c_{ij}}, \tag{46}$$

де $c_{ij} -$ пружний коефіцієнт зв'язку між $i -$ою та $j -$ою часточками ПМ.

(У рівнянні (45) нехтуємо дисипативними ефектами у зв'язку з їх малістю).

Умови виникнення руху часточки ПМ безпосередньо після зникнення початкового імпульсу S (у розрахунку на 1 часточку ПМ):

$$y_{io} = 0, \ \dot{y}_{io} = \frac{S}{m_i}. \tag{47}$$

Частота вільних коливань часточки ПМ визначається наступним чином:

$$\Omega = \sqrt{\frac{c_i}{m_i}}. \tag{48}$$

Рух, який викликаний тільки початковим імпульсом, описується наступним чином:

$$y_i = \frac{S}{m_i \cdot \Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t), \ 0 < t < T. \tag{49}$$

Розглянемо далі будь-який один з періодів T, прийнявши за початок відліку часу момент зникнення останнього імпульсу S. На протязі розглядуваного періоду коливання є вільними та описуються рішенням:

$$y_i = A_i \cdot \cos(\Omega \cdot t) + B_i \cdot \sin(\Omega \cdot t), \ 0 < t < T. \tag{50}$$

Якщо $\tilde{y}_{i0} -$ початкове зміщення та $\dot{\tilde{y}}_{i0} -$ початкова швидкість, тоді постійні A та B дорівнюють:

$$A_i = \tilde{y}_{i0}, \ B_i = \frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega}, \tag{51}$$

розв'язок (50) можна записати у виді:

$$y_i = \tilde{y}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t), \ 0 < t < T. \tag{52}$$

Диференціюючи по часу t, знаходимо швидкість:

$$\dot{y}_i = -\tilde{y}_{i0} \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t) + \dot{\tilde{y}}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot t). \tag{53}$$

У кінці цього періоду, безпосередньо перед прикладанням чергового імпульсу (тобто при $t = T$), маємо:

$$\begin{cases} y_{i1} = \tilde{y}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot T) + \frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot T), \\ \dot{y}_{i1} = -\Omega \cdot \tilde{y}_{i0} \cdot \sin(\Omega \cdot T) + \dot{\tilde{y}}_{i0} \cdot \cos(\Omega \cdot T). \end{cases} \tag{54}$$

Одразу після прикладання чергового імпульсу зміщення y_i збереже своє значення (54):

$$y_{i2}=y_{i1}=\tilde{y}_{i0}\cdot\cos(\Omega\cdot T)+\frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega}\cdot\sin(\Omega\cdot T),\tag{55}$$

але швидкість миттєво зміниться на величину $\dfrac{S}{m_i}$ й при врахуванні виразу $\dot{y}_{i1}$ з (54) складе:

$$\dot{y}_{i2}=-\Omega\cdot\tilde{y}_{i0}\cdot\sin(\Omega\cdot T)+\dot{\tilde{y}}_{i0}\cdot\cos(\Omega\cdot T)+\frac{S}{m_i}.\tag{56}$$

Оскільки існує періодичність процесу, то величини y_{i2} й $\dot{y}_{i2}$ повинні бути рівні відповідно величинам $\tilde{y}_{i0}$ й $\dot{\tilde{y}}_{i0}$, тобто:

$$\tilde{y}_{i0}\cdot\cos(\Omega\cdot T)+\frac{\dot{\tilde{y}}_{i0}}{\Omega}\cdot\sin(\Omega\cdot T),\tag{57}$$

$$\dot{\tilde{y}}_{i0}=-\Omega\cdot\tilde{y}_{i0}\cdot\sin(\Omega\cdot T)+\dot{\tilde{y}}_{i0}\cdot\cos(\Omega\cdot T)+\frac{S}{m_i}.\tag{58}$$

Таким чином, ми отримали систему двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими $\tilde{y}_{i0}$ й $\dot{\tilde{y}}_{i0}$; розв'язавши її ((57), (58)), знайдемо:

$$\tilde{y}_{i0}=\frac{S}{2m_i\cdot\Omega}\cdot ctg\left(\frac{\Omega\cdot T}{2}\right),\quad \dot{\tilde{y}}_{i0}=\frac{S}{2\cdot m_i}.\tag{59}$$

Тому закон руху (50) приймає вид:

$$y_i=\frac{S}{2m_i\cdot\Omega}\cdot\left[\sin(\Omega\cdot t)+\cos(\Omega\cdot t)\cdot ctg\left(\frac{\Omega\cdot T}{2}\right)\right],\ 0<t<T.\tag{60}$$

Періодичність у розв'язку (60) досягнута внаслідок ігнорування заданих початкових умов (тобто умов, що відносяться до початкового моменту, безпосередньо перед прикладанням першого імпульсу S); у результаті впливу внутрішнього та зовнішнього видів тертя (яке у (45) не враховане) в кінці кінців реалізується саме такий періодичний рух.

Дійсно задані початкові умови можна відобразити у розв'язку наступним чином. Нехай у початковий момент часу задані зміщення та швидкість відповідно складають y_{i0}^* й $\dot{y}_{i0}^*$, що співпадають з (47). Запишемо тотожності:

$$\begin{cases} y_{i0}^*=\tilde{y}_{i0}+\left(y_{i0}^*-\dfrac{S}{2m_i\cdot\Omega}\cdot ctg\left(\dfrac{\Omega\cdot T}{2}\right)\right),\\ \dot{y}_{i0}^*=\dot{\tilde{y}}_{i0}+\left(\dot{y}_{i0}^*-\dfrac{S}{2m_i}\right).\end{cases}\tag{61}$$

Перші складові правих частин відповідають періодичному (з періодом T) руху (60), а другі складові слугують причиною вільних коливань (з періодом $\dfrac{2\cdot\pi}{\Omega}$):

$$y_i^*=\left(y_{i0}^*-\frac{S}{2m_i\cdot\Omega}\cdot ctg\left(\frac{\Omega\cdot T}{2}\right)\right)\cdot\cos(\Omega\cdot t)+ +\left(\frac{\dot{y}_{i0}^*}{\Omega}-\frac{S}{2m_i\Omega}\right)\cdot\sin(\Omega\cdot t).\tag{62}$$

Тут, на відміну від (60), час t відраховується від істинного початку процесу. Отже, остаточно рух часточки ПМ (при дії $n-$ударних імпульсів S) описується наступним чином:

$$y_i(t)=\frac{S}{2m_i\cdot\Omega}\cdot\sin(\Omega\cdot t)+\left(-\frac{S}{2m_i\cdot\Omega}\right)\times \times ctg\left(\frac{\Omega\cdot T}{2}\right)\cdot\cos(\Omega\cdot t)+\frac{S}{2m_i\cdot\Omega}\times \times\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix}\sin[\Omega\cdot(t-k\cdot T)]+\cos[\Omega\cdot(t-k\cdot T)]\times\\ \times ctg\left(\dfrac{\Omega\cdot T}{2}\right)\end{matrix}\right\},$$
$$0<t<(n+1)\cdot T.\tag{63}$$

Проаналізуємо результат, що зосереджений у виразі (60).

Перш за все зазначимо, що якщо:

$$\frac{\Omega\cdot T}{2}=n\cdot\pi,\ \ n\in N,\tag{64}$$

то $\left|ctg\left(\dfrac{\Omega\cdot T}{2}\right)\right|\to\infty$ й амплітуди переміщень прямують до нескінченності, тобто наступає **ударний резонанс**. Якщо $\tilde{\omega}=\dfrac{2\cdot\pi}{T}-$кутова частота прикладання імпульсів S, то умова ударного резонансу приймає вид:

$$\tilde{\omega}=\frac{\Omega}{n},\ \ n\in N,\tag{65}$$

тобто **ударні резонанси у ПМ – це субрезонанси $n-$го порядку**.

За всіх інших співвідношень частот відхилення y_i залишаються скінченними. Найбільше відхилення часточок ПМ згідно (60) складає:

$$y_{i\max} = \frac{S}{m_i \cdot \Omega} \cdot \sqrt{1 + ctg^2\left(\frac{\Omega \cdot T}{2}\right)} = \frac{S}{2 \cdot m_i \cdot \Omega \cdot \left|\sin\left(\frac{\pi \cdot \Omega}{\tilde{\omega}}\right)\right|}. \quad (66)$$

Оскільки дріб $\left(\frac{S}{m_i \cdot \Omega}\right)$ є максимальним відхиленням, що викликає один миттєвий імпульс S, то вираз:

$$\beta = \frac{1}{2 \cdot \left|\sin\left(\frac{\pi \cdot \Omega}{\tilde{\omega}}\right)\right|} \quad (67)$$

є коефіцієнтом впливу повторності.

Слід зазначити, що існує нескінченно велике число ударних резонансів (у відповідності до формули (65)). Найменш можливе значення β дорівнює $\frac{1}{2}$.

3.Особливості вібраційного/віброударного пресування ПМ у межах моделі „зв'язаної" порової структури.

Особливості вібраційного та віброударного пресування ПМ у межах моделі „зв'язаної" порової структури розглянемо методом, розвиненим у [8].

Дослідження нестаціонарних процесів у лінійній системі (а модель „зв'язаної" порової структури ПМ належить саме до таких) з одним ступенем свободи руху (координата зміщення часточки ПМ y_i від положення рівноваги) при припущенні, що джерело енергії (вібраційного/віброударного поля, що діє на ПМ) має досить велику потужність, зводиться до інтегрування диференціального рівняння:

$$\ddot{y}_i + \mu_i \cdot \dot{y}_i + \Omega_i^2 \cdot y_i = P_i(t), \quad (68)$$

де $\mu_i -$коефіцієнт, що характеризує затухання; $\Omega_i -$частота вільних коливань $i-$ої часточки ПМ; $P_i(t)-$вимушена сила, віднесена до одиниці маси часточки m_i.

За допомогою методу варіації довільних сталих за нульових початкових умов $y_i\big|_{t=0} = 0,\ \dot{y}_i\big|_{t=0} = 0$ з (68) маємо:

$$y_i(t) = \frac{1}{k_i} \cdot \int_0^t P_i(\tau) \cdot \exp\left\{-\frac{\mu_i \cdot (t-\tau)}{2}\right\} \cdot \sin\{k_i \cdot (t-\tau)\} d\tau, \quad (69)$$

де $k_i = \sqrt{\Omega_i^2 - \frac{\mu_i^2}{4}}$. За гіпотези Є.С. Сорокіна, що враховує сили тертя через коефіцієнт поглинання енергії коливань ψ_i, $\mu_i = \frac{\psi_i \cdot \Omega_i}{2 \cdot \pi}$, тоді маємо:

$$y_i(t) = \frac{1}{k_i} \cdot \int_0^t P_i(\tau) \cdot \exp\left\{-\frac{\psi_i \cdot \Omega_i \cdot (t-\tau)}{4\pi}\right\} \cdot \sin\{k_i \cdot (t-\tau)\} d\tau. \quad (70)$$

Якщо вібропресування відбувається за умов усталених вимушених коливань з частотою Ω_0 та амплітудою A сили $P_i(t)$, то з (70) маємо:

$$y_i(t) = \frac{A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t + \delta)}{\sqrt{\left(k_i^2 - \Omega_0^2\right)^2 + \mu_i^2 \cdot \Omega_0^2}} = \frac{A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t + \delta)}{\sqrt{\left(k_i^2 - \Omega_0^2\right)^2 + \frac{\psi_i^2 \cdot \Omega_i^2}{4\pi^2} \cdot \Omega_0^2}}. \quad (71)$$

Слід зазначити, що $\delta -$початкова фаза вимушених коливань $i-$ої часточки ПМ, яка зазвичай дорівнює нулю.

Якщо пресування ПМ відбувається у віброударному режимі, то на одному періоді дії віброударного силового імпульсу T маємо:

$$P_i(t) = \begin{cases} A_{1i} \cdot \sin\left\{\frac{\pi \cdot t}{\tau_1}\right\}, & 0 \le t \le \tau_1; \\ -A_{2i} \cdot \sin\left\{\frac{\pi \cdot (t - \tau_1)}{\tau_2}\right\}, & \tau_1 < t \le \tau_1 + \tau_2 = T. \end{cases} \quad (72)$$

Функцію (72) треба продовжити до нескінченності по періоду T й розкласти у ряд Фур'є, а потім використати співвідношення (70). Можливий і інший підхід, за якого $P_i(t)$ з (72) підставляють у (70) й інтегрують на періоді T. Тоді можна знайти $y_i(\tau_1), y_i(T), y_i(t)$ для $t \in [0;\tau_1] \cup (\tau_1;T]$, тобто визначити рух $i-$ої часточки ПМ на одному періоді T віброударного режиму пресування, а отриманий результат завдяки періодичності її руху розповсюдити на всю вісь часу $t \in [0;+\infty)$.

ВИСНОВКИ

1. Встановлені основні закономірності та особливості статичного, ударного, вібраційного та віброударного режимів пресування ПМ у межах моделі „зв'язаної" порової структури оброблюваного середовища.
2. Отримані залежності можуть у подальшому бути використані для уточнення існуючих й розробки більш досконалих інженерних методів розрахунку вібропресів для

виготовлення виробів з керамічних та фарфоро-фаянсових порошкових матеріалів у прес-формах.

Література

1. Бондаренко В.П., Фрейдин Г.Ю., Мендельсон В.С. Прессование заготовок из твердосплавных смесей. – К.: Техніка, 1974. – 140с.
2. Ям Б.М., Олейник В.Т., Степанов В.Ф. и др. Вибрационное прессование огнеупорных масс//Огнеупоры. – 1973. - №10. – С. 1-7.
3. Шаталова И.Г., Горбунов Н.С., Лихтман В.И. Физико-химические основы вибрационного уплотнения порошковых материалов. – М.: Наука, 1965. – 164с.
4. Искович-Лотоцкий Р.Д., Матвеев И.Б., Крат В.А. Машины вибрационного и виброударного действия. – К.: Техніка, 1982. – 208с.
5. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наукова думка, 1981. – 200с.
6. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. – М.: Изд-во иностр. л-ры, 1959. – 452с.
7. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. – М.: Наука, 1987. – 352с.
8. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания механических систем. – К.: Наукова думка, 1966. – 336с.