

УДК 666

Басараб В.А., інженер КНУБА

**АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗРАХУНКУ  
ВЗАЄМОДІЇ РОБОЧОГО ОРГАНУ ТА  
СЕРЕДОВИЩА УДАРНО – ВІБРАЦІЙНОЇ  
МАШИНИ**

**Вступ. Постановка задач досліджень.**

Для оцінки характеру та ступеня впливу робочого середовища (бетонної суміші) на динаміку електромагнітної ударно – вібраційної машини використовується експериментально – теоретична методика досліджень професора Назаренка І.І. [4]. На першому етапі проводяться експериментальні дослідження взаємодії середовища з робочим органом вібраційної машини, визначаються необхідні параметри взаємодії, далі на основі отриманих даних складаються та досліджуються математичні моделі системи „машина – середовище”. Важливим етапом досліджень є складання математичних моделей системи та вибір методики їх розв’язання. Тому, задачею досліджень є:

- розробка алгоритму чисельного розрахунку рівнянь системи „машина – середовище” та проведення моделювання руху системи.

**Методика та результати досліджень.**

Для описання реологічних властивостей бетонних сумішей використовується модель Шофілда-Скота-Блера [3,6]. Реологічні моделі бетонної суміші за умов зсувних деформацій

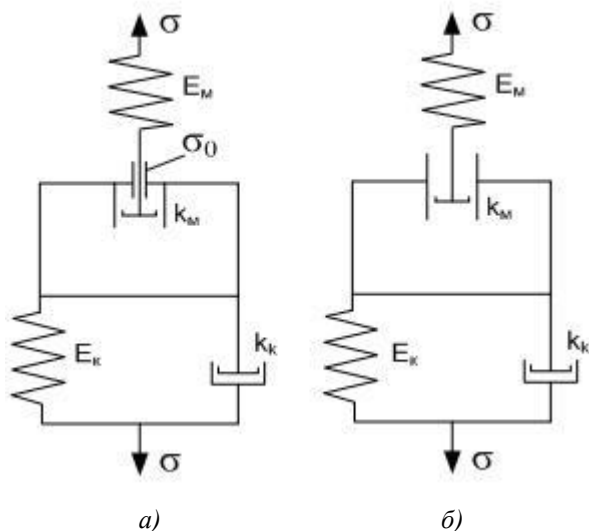


Рисунок 1. Реологічні моделі бетонної суміші.  
а) – вихідна. б) – в умовах дії вібрації.

представлено на рисунку 1. За дослідженнями авторів публікацій в умовах вібрації дія елемента сухого тертя  $\sigma_0$  зводиться до мінімуму, і, таким чином, маємо модель Бюргерса (послідовне

поєднання елементів Максвела та Кельвіна-Фойгта) [5].

Якщо закон зміни напружено-деформованого стану елемента Кельвіна-Фойгта представити у вигляді [5]:

$$\sigma = E_k \varepsilon + k_{0k} \dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

а елемента Максвела у вигляді:

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{\sigma}}{E_M} + \frac{\sigma}{k_{0M}}, \quad (2)$$

Тоді опускаючи викладки запишемо вираз деформації для елемента Кельвіна-Фойгта [5]:

$$\varepsilon_k = e^{-\frac{E_k t}{k_{0k}}} \left( \varepsilon_0 + \frac{1}{k_{0k}} \int \sigma e^{\frac{E_k t}{k_{0k}}} dt \right), \quad (3)$$

Відповідно:

$$\dot{\varepsilon}_k = \frac{\sigma}{k_{0k}} - \frac{E_k}{k_{0k}} e^{-\frac{E_k t}{k_{0k}}} \left( \varepsilon_0 + \frac{1}{k_{0k}} \int \sigma e^{\frac{E_k t}{k_{0k}}} dt \right), \quad (4)$$

Запишемо вираз деформації всієї реологічної моделі:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_M + \dot{\varepsilon}_k = \sigma \frac{k_{0k} + k_{0M}}{k_{0k} k_{0M}} + \frac{\dot{\sigma}}{E_M} - \frac{E_k}{k_{0k}} e^{-\frac{E_k t}{k_{0k}}} \left( \varepsilon_0 + \frac{1}{k_{0k}} \int \sigma e^{\frac{E_k t}{k_{0k}}} dt \right) \quad (5)$$

Продиференціювавши і замінивши елемент в дужках отримаємо:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{k_{0k}}{E_k} \ddot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{k_{0M}} + \dot{\sigma} \frac{k_{0k} E_M + k_{0M} E_M + k_{0M} E_k}{k_{0M} E_k E_M} + \ddot{\sigma} \frac{k_{0k}}{E_M E_k} \quad (6)$$

Де:  $\sigma$  - напруження в бетонній суміші, Па,  $\varepsilon$  - відносна деформація бетонної суміші.

З отриманого рівняння запишемо вираз напруження:

$$\ddot{\sigma} = \frac{E_M E_k}{k_{0k}} \left( \dot{\varepsilon} + \frac{k_{0k}}{E_k} \ddot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{k_{0M}} - \dot{\sigma} \frac{k_{0k} E_M + k_{0M} E_M + k_{0M} E_k}{k_{0M} E_k E_M} \right) \quad (7)$$

Далі запишемо рівняння динаміки машини [1] у більш зручній для чисельного методу формі:

$$\Delta \dot{\sigma} = \frac{E_M E_k}{k_{0k}} \left( \dot{\varepsilon} + \frac{k_{0k}}{E_k} \ddot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{k_{0M}} - \dot{\sigma} \frac{k_{0k} E_M + k_{0M} E_M + k_{0M} E_k}{k_{0M} E_k E_M} \right) \Delta t \quad (8)$$

$$\dot{\sigma}_i = \dot{\sigma}_{i-1} + \Delta \dot{\sigma}; \quad \sigma_i = \sigma_{i-1} + \dot{\sigma}_i \Delta t;$$

$$F_\sigma = \sigma S, \quad (9)$$

$$\Delta v_1 = \frac{1}{m_1} \left[ c_1 x_n + c_2 x_k - (c_1 + c_2)x - (b_1 + b_2)v - F_\sigma - \frac{ab\psi^2}{2(b+x)^2} \right] \Delta t \quad (10)$$

$$\Delta v_2 = \frac{1}{m_2} \left[ c_1 x_n + c_2 x_k - (c_1 + c_2)x - (b_1 + b_2)v - \frac{ab\psi^2}{2(b+x)^2} \right] \Delta t, \quad (11)$$

$$\Delta v_3 = \frac{1}{m_3} [F_\sigma] \Delta t, \quad (12)$$



$$\Delta\psi = \left[ \frac{u - iR - \frac{L_0 a \psi b v}{(b+x)^2}}{\frac{L_0 a x}{b+x} + L_0 A D e^{D\psi} + 1} \right] \Delta t, \quad (13)$$

$$v_{li} = v_{li-1} + \Delta v_1; \quad x_{li} = x_{li-1} + v_{li} \Delta t, \\ v_{2i} = v_{2i-1} + \Delta v_2; \quad x_{2i} = x_{2i-1} + v_{2i} \Delta t, \quad (14)$$

$$v_{3i} = v_{3i-1} + \Delta v_3; \quad x_{3i} = x_{3i-1} + v_{3i} \Delta t, \\ \psi = \psi + \Delta\psi, \quad (15)$$

$$\varepsilon = \frac{x_1 - x_3}{H}; \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_3}{H}; \\ \ddot{\varepsilon} = \frac{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3}{H}, \quad (16)$$

$$x = x_1 + x_2 + x_k. \quad (17)$$

Моделювання динаміки системи з використанням моделі середовища Бюргера проведено за таких початкових умов:

$\kappa_{0k}=40000 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $\kappa_{0m}=40000 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $E_k=700000 \text{ Па}$ ;  $E_m=16000000 \text{ Па}$ .

Наступним етапом досліджень є проведення факторного експерименту, тобто по черзі змінюємо кожний параметр реологічної моделі, фіксуючи при цьому зміну динамічних параметрів роботи машини.

Проаналізуємо отримані результати. В наведеній моделі Бюргера в елементі Максвелла за умов зменшення  $\kappa_{0m}$  з  $40000 \text{ Па}\cdot\text{с}$  до  $20000 \text{ Па}\cdot\text{с}$  зафіксовано наступне:

- графіки переміщення та швидкості маси  $m_3$  мають зсув по фазі в бік запізнення по відношенню до переміщення та швидкості робочого органу.
- крива прискорення робочого органу характеризується згладженням площадки відриву ударника.
- напруження в середовищі змінюється пропорційно прискоренню робочого органу але форма кривої є більш згладженою. Також, слід зазначити, що в умовах зміни в'язкості  $\kappa_{0m}$  абсолютна величина напруження в суміші змінюється на 50%.

Підсумовуючи вищенаведене, можна сказати, що в'язкість елемента Максвелла в моделі Бюргера має неоднозначний вплив на динамічні параметри машини. А саме: за умов зменшення в'язкості відбувається зсув по фазі переміщення та швидкості маси  $m_3$  в бік запізнення, і це є логічним, оскільки збільшується час реакції середовища. Згладження кривої напруження свідчить про те, що в'язкість елемента Максвелла є мірою впливу інерційних властивостей маси  $m_3$  на характер

зміни напруженого стану середовища. Зміна  $\kappa_{0m}$  в бік збільшення призводить до синхронізації динамічних параметрів середовища та робочого органу вібромашини. Також слід сказати, що з одного боку зменшення в'язкості збільшує фазовий зсув і, таким чином, покращує процес ущільнення за рахунок розширення внутрішнього спектру коливань, з іншого боку значне зниження в'язкості веде до погіршення умов ущільнення – зниження амплітуди переміщення, швидкості, та напруження середовища, і, як наслідок, величина напруження знижується майже на порядок.

Зміна параметру жорсткості  $E_m$  призводить до таких змін:

- переміщення та швидкість суміші (маса  $m_3$ ) змінюються з невеликим зсувом по фазі по відношенню до робочого органу.
- крива прискорення робочого органу та напруження середовища характеризується збільшенням нестабільності в періоди ударів та відриву ударника і, як наслідок, виникнення міжперіодичних коливань.

Параметри елемента Кельвіна-Фойгта в межах експериментально встановлених величин  $\kappa_{0k}$  та  $E_k$  незначною мірою впливають на динамічні параметри роботи машини.

Далі знайдемо час релаксації та ретардації для моделі Бюргера) [5].

Для цього в реологічному рівнянні (6) припустимо, що деформація тіла є величиною постійною:  $\dot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon} = 0$ , тоді:

$$\frac{\sigma}{\kappa_{0m}} + \dot{\sigma} \frac{\kappa_{0k} E_m + \kappa_{0m} E_m + \kappa_{0m} E_k}{\kappa_{0m} E_k E_m} + \ddot{\sigma} \frac{\kappa_{0k}}{E_m E_k} = 0 \quad (18)$$

Таким чином, розв'язавши диференціальне рівняння відносно  $\sigma$ , отримаємо:

$$\sigma = C_1 e^{-\frac{1}{T_1} t} + C_2 e^{-\frac{1}{T_2} t}, \quad (19)$$

Де:  $C_1, C_2$  – сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов;  $T_1, T_2$  – періоди релаксації.

Опустивши попередні викладки отримаємо: Якщо

$$\Delta = (\kappa_{0k} E_m + \kappa_{0m} E_m + \kappa_{0m} E_k)^2 - 4\kappa_{0k} \kappa_{0m} E_m E_k, \quad (20)$$

тоді:

$$T_{1,2}^{rel} = \frac{2\kappa_{0k} \kappa_{0m}}{(\kappa_{0k} E_m + \kappa_{0m} E_m + \kappa_{0m} E_k) \pm \sqrt{\Delta}}, \quad (21)$$

для початкових умов, що вказані вище отримаємо числові значення часу релаксації:

$$T_1^{rel} = 2,488 \times 10^{-4} \text{ с}, \quad T_2^{rel} = 0,309 \text{ с}.$$

Час ретардації знайдемо виходячи з тієї умови, що деформація середовища досягла

деякого значення  $\varepsilon_0$  і навантаження було знято в момент  $t = 0$ ,  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ , тоді:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{K_{0k}}{E_k} \ddot{\varepsilon} = 0, \quad (22);$$

$$\text{звідки} \quad \varepsilon + \frac{K_{0k}}{E_k} \dot{\varepsilon} = C. \quad (23)$$

Підставивши умову  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$  в рівняння (6) знаходимо:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{E_k}{K_{0k}} e^{-\frac{E_k}{K_{0k}} t} \varepsilon_{0k}, \quad (24); \quad \text{далі, обчисливши}$$

$$\text{інтеграл отримуємо: } \varepsilon = \varepsilon_{0k} \left( e^{-\frac{E_k}{K_{0k}} t} - 1 \right) + \varepsilon_0, \quad (25)$$

Константа  $C$  з рівняння (23) становить:

$$C = \varepsilon_0 - \varepsilon_{0k}. \quad (26)$$

З виразу деформації (25) випливає, що деформація за час  $t = 0$ ,  $t = \infty$  зменшується від  $\varepsilon_0$  до  $\varepsilon_0 - \varepsilon_{0k}$ . Час пружної післядії (ретардації)

$$\text{становить: } T^{ret} = \frac{K_{0k}}{E_k}. \quad (27)$$

Для заданих початкових умов  $T^{ret} = 0,308$  с. Далі необхідно зробити невеличкий аналіз. Перший час релаксації свідчить про те, що за один період руху робочого органу вібромашини бетонна суміш може релаксувати до 200 раз, другий час релаксації вказує на те, що один повний період релаксації відбувається за 6 періодів руху вібросистеми ( $T_{вibr} = 0,05$  с). Це по-перше може свідчити про наявність релаксаційних коливань в міждарний період і по-друге цей факт можна використати на користь того положення, що ми можемо суттєво (приблизно до 200 Гц) збільшити частоту гармонік вищої генерації за рахунок вдосконалення конструкції машини.

У відповідності з розглянутою схемою представленою на рисунку 1,2 [2] та складеними рівняннями руху коливальних мас та бетонної суміші (5-9) [2] запишемо алгоритм чисельного розрахунку такої системи для складання програми на ЕОМ.

Для розв'язання рівнянь (5-9) [2] необхідно знайти значення функцій для системи з розподіленими параметрами, що входять в рівняння руху машини і далі розв'язати рівняння відносно часової та просторової змінних.

Перепишемо рівняння (5-9) [2] у вигляді прирощень функцій.

Рівняння руху робочого органу:

$$\Delta v_1 = \frac{1}{m_1} \left[ c_1 x_u + c_2 x_k - (c_1 + c_2)x - (b_1 + b_2)v - S \left( E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) \Delta x - \frac{ab\psi^2}{2(b+x)^2} \right] \Delta t, \quad (28)$$

Рівняння руху ударника:

$$\Delta v_2 = \frac{1}{m_2} \left[ c_1 x_u + c_2 x_k - (c_1 + c_2)x - (b_1 + b_2)v - \frac{ab\psi^2}{2(b+x)^2} \right] \Delta t, \quad (29)$$

Рівняння зміни потокозчеплення:

$$\Delta \psi = \left[ \frac{u - iR - \frac{L_0 a \psi b v}{(b+x)^2}}{\frac{L_0 a x}{b+x} + L_0 A D e^{D\psi} + 1} \right] \Delta t, \quad (30)$$

де:  $u(x,t)$  - зміщення шару суміші в точці  $x$  в момент  $t$  відносно початкового положення.

Для знаходження складових  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  та

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$  необхідно розв'язати хвильове рівняння, для цього визначаючи функцію  $u(x,t)$  необхідно задати початкові та граничні умови.

В початковий момент середовище знаходиться в стані спокою, тому швидкість дорівнює нулеві,

тобто  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Граничні умови в точці  $x=H$

визначаються відсутністю нормальних напружень, тобто  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=H} = 0$  або

$\frac{\partial u}{\partial x} = \xi(H,t) = 0$ . Якщо закон руху в точці  $x=0$

в будь-який момент часу  $t$  представимо у вигляді  $x=f(t)$ , тоді гранична умова для  $u(x,t)$  при  $x=0$  буде мати вигляд  $u(0,t)=x(t)$ .

Якщо позначити  $x_1(t)$  - переміщення робочого органу, тоді загальне рішення хвильового рівняння за методом Даламбера записується у вигляді [6,7]:

$$u(x,t) = x_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) e^{-\beta x} + x_1 \left( t - \frac{2H-x}{c} \right) e^{-\beta(2H-x)}. \quad (31)$$

де:  $\beta$ -коефіцієнт затухання хвилі по висоті суміші (визначається експериментально).

Отримане рішення (31) представляє собою суму падаючої та відбитої хвиль деформації.

Значення  $\frac{x}{c}$ ,  $\frac{2H-x}{c}$  визначають фазове

запізнення розвитку деформації в шарі суміші з координатою  $x$  по відношенню до деформації в зоні контакту з робочим органом ( $x=0$ ).

Знайдемо відносну деформацію:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \xi = -x_{1-\phi} \beta e^{-\beta x} + x_{1-\psi} \beta e^{-\beta(2H-x)}, \quad (32)$$

Обчислимо другу похідну для довільного шару суміші:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \right|_{x=x_{uc}} = x_{1-\phi} \beta^2 e^{-\beta x} + x_{1-v} \beta^2 e^{-\beta(2H-x)}, \quad (33)$$

Для зони контакту:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \right|_{x=\Delta x} = x_{1_i} \beta^2 e^{-\beta \Delta x} + x_{1_{i-v}} \beta^2 e^{-\beta(2H-\Delta x)}, \quad (34)$$

де:  $v = \frac{2H - \Delta x}{c \Delta t}$  - кількість чисельних кроків

запізнення хвилі, відбитої від верхньої межі, при досягненні контактної шару суміші зі

швидкістю  $c$ ;  $\phi = \frac{x_{uc}}{c \Delta t}$  - кількість кроків

запізнення падаючої хвилі при досягненні шару

суміші висоти  $x_{uc}$ ;  $v = \frac{2H - x_{uc}}{c \Delta t}$  - кількість

чисельних кроків запізнення хвилі, відбитої від верхньої межі, при досягненні шару суміші висоти  $2H - x_{uc}$ ;  $\Delta x = c \Delta t$  - елементарний шар суміші.

Знайдемо третю похідну:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\left( \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j - \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{j-1} \right)}{\Delta t}, \quad (35)$$

таким чином, знайшовши всі необхідні складові можемо розв'язати рівняння (28),(29),(30).

Швидкість руху довільного шару суміші запишемо у вигляді:

$$V_{uc} = \left. \frac{du(x,t)}{dt} \right|_{x=x_{uc}} = V_{1-\phi} e^{-\beta x} + V_{1-v} e^{-\beta(2H-x)}, \quad (36)$$

Швидкість руху суміші в зоні контакту:

$$V_{\phi c} = \left. \frac{du(x,t)}{dt} \right|_{x=\Delta x} = V_{1_i} e^{-\beta \Delta x} + V_{1_{i-v}} e^{-\beta(2H-\Delta x)}, \quad (37)$$

$$\text{напруження в середовищі: } \sigma = E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (38)$$

де:  $E=f(t)$  - модуль деформації середовища що апроксимується за експериментальними даними.

Далі знаходимо значення функцій. Розрахунок кінематичних параметрів робочого органу та ударника проводиться у відповідності з методикою [2].

$$v_{1i} = v_{1_{i-1}} + \Delta v_{1i}, \quad v_{2i} = v_{2_{i-1}} + \Delta v_{2i}, \quad v = v_1 + v_2; \quad (39)$$

$$x_{1i} = x_{1_{i-1}} + v_{1i} \Delta t, \quad x_{2i} = x_{2_{i-1}} + v_{2i} \Delta t, \quad x = x_1 + x_2 + x_k; \quad (40)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t}, \quad \ddot{x}_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t}, \quad (41);$$

$$\psi = \psi + \Delta \psi; \quad (42)$$

Прискорення бетонної суміші в зоні контакту та в довільному шарі:

$$\ddot{x}_{\phi c} = \frac{\Delta v_{\phi c}}{\Delta t}, \quad \ddot{x}_{uc} = \frac{\Delta v_{uc}}{\Delta t}. \quad (43)$$

Просторова координата:  $x = x + \Delta x$ ; часова координата:  $t = t + \Delta t$ .

За даним алгоритмом побудована програма розрахунку параметрів системи на ЕОМ в середовищі Mathcad, яка дає можливість будувати графіки а також виводити числові дані динамічних параметрів як вібромашини так і середовища. Зокрема в програмі передбачена можливість побудови графіків основних параметрів середовища як для зони контакту так і для будь - якого шару суміші. Основні розрахункові параметри машини та середовища приведено на рисунку 2. На графіках зображено:  $X_1$ ,  $X_2$ -переміщення робочого органу та ударника, мм;  $X_{\phi c}$ ,  $X_{uc}$ - переміщення бетонної суміші в зоні контакту з робочим органом та на відстані  $x$ , мм;  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_{\phi c}$ ,  $V_{uc}$ - швидкості руху відповідно робочого органу, ударника, бетонної суміші в зоні контакту та на відстані  $x$ , м/с;  $\ddot{X}_1$ ,  $\ddot{X}_{\phi c}$  - відповідно прискорення робочого органу та суміші в умовах контакту, м/с<sup>2</sup>;  $I$ - струм в котушці електромагніта, А;  $\psi$ - потікоччеплення, Вб.

Розрахункові параметри отримані за таких вихідних даних:  $m_{p.o+\phi.c}=100$  кг,  $m_2=25$  кг,  $\rho=2400$  кг/м<sup>3</sup>,  $E=24$  МПа,  $c=100$  м/с,  $\beta=4.16$  1/м, ( $E$ ,  $c$ ,  $\beta$  - отримані за результатами експериментів).

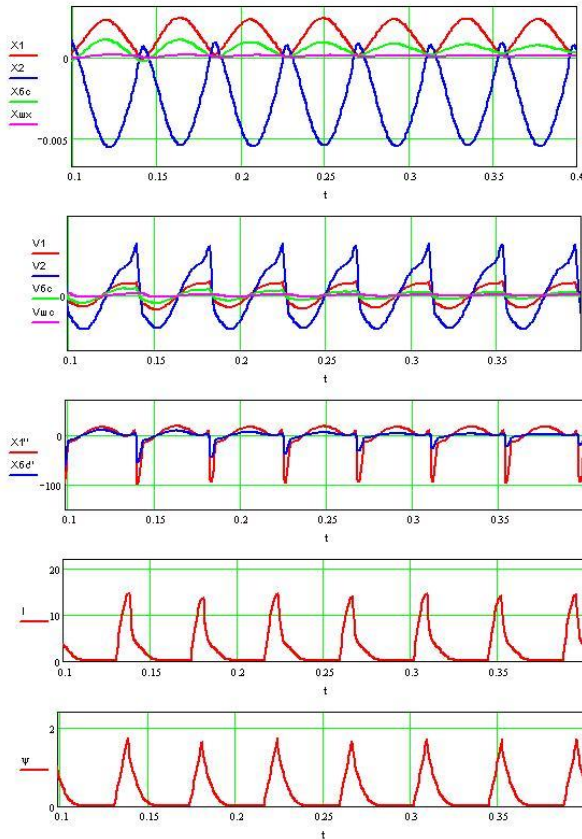


Рисунок 2. Розрахункові динамічні параметри машини та середовища.

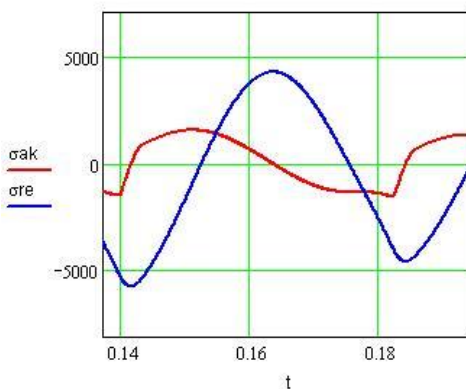


Рисунок 3. Графік зміни активної та реактивної складових опору середовища.

У формулі (28) складові опору середовища -  $\beta\rho \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$  та  $E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  є не що інше як активний та реактивний опір (в нашому випадку в одиницях напруження – Па). Графік зміни даних величин приведено на рисунку 3. За графіком видно, що дані сили мають зсув по фазі у відношенні одна до одної а також видно, що їхня дія має неоднозначний характер – частина періоду проходить в умовах співпадання з напрямком вимушуючої сили, в інший час сила опору є протилежною. За результатами

теоретичних досліджень, виходячи з вихідних умов зазначених вище, можна сказати, що значення сумарної сили опору середовища може сягати до 20% від величини напружень, що виникають в середовищі.

Таким чином, отримана методика чисельного розрахунку дає можливість проводити теоретичні дослідження системи „машина – середовище”, здійснювати моделювання поведінки системи в умовах взаємодії з середовищем а також проводити дослідження динаміки системи в умовах реалізації можливих алгоритмів керування.

#### Література.

1. Баранов Ю.О. Создание строительных ударно-вибрационных машин с электромагнитным приводом. Дисс. канд. техн. наук. К., 1994. – 150 с.
2. Басараб В.А. Теоретичні дослідження взаємодії середовища з робочим органом електромагнітної ударно-вібраційної площадки. Техніка будівництва №17.К.: КНУБА, 2005.
3. Курнос Г.Я. Вибрационная технология бетона. Л.: Стройиздат, 1967. – 168 с.
4. Назаренко И.И. Прикладные задачи теории вибрационных систем, К.: І.С.Д.О, 1993.- 216с.
5. Рейнер Маркус. Реология. М.: Наука, 1965. – 223 с.
6. Савинов О.А., Лавринович Е.В. Вибрационная техника уплотнения и формирования бетонных смесей. Л.: Стройиздат, 1986. – 278 с.
7. Хайкин С.Э. Физические основы механики. М.: Наука, 1971.- 751с.