Машини і обладнання технологічних процесів будівельної індустрії

УДК 534
І.І.Назаренко, д.т.н., проф. КНУБА
К.В.Горіцький, В.П.Климчук, В.Є.Петров, магістри, КНУБА

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ПОДІБНОСТІ І РОЗМІРНОСТЕЙ ПРИ РОЗРАХУНКАХ ПАРАМЕТРІВ ВІБРОСИСТЕМ

Актуальність проблем. Застосування методів подібності в теорії вібросистем є потужним методологічним прийомом, що дозволяє ефективно вирішувати задачі по визначенню раціональних параметрів, особливо для систем, де зустрічаються труднощі математичного характеру.[2] В основі методів лежать фізичне моделювання, теорія подібності й теорія розмірностей [1,3,4].

Поняття про подібність фізичних явищ для часткового випадку – руху твердих тіл – було сформульовано ще І. Ньютоном. В 1984 р. із загальних диференціальних рівнянь руху фізичних тіл Ж. Бертраном була виведена перша теорема подібності, а в 1941 р. Е. Букінгемом була доведена друга основна теорема подібності – так названа π-теорема; у працях М.В. Кірпичева й А.А. Гурмана вперше сформульована третя теорема [4].

Теорія подібності практично була застосована вперше в другій половині XIX ст. для рішення задач по визначенню опору руху судна (В. Фруд), при русі рідин у трубах
(О. Рейнольдс) і в дослідженнях з аеродинаміки (М.Е. Жуковський) [1].

Аналіз явищ взаємодії твердих тіл з рідинами з позицій теорії подібності й розмінностей найбільш повно проведений Л.І. Сєдовим, у якій розглянутий ряд задач, у тому числі питання посадки гідролітаків на воду, глісирування плоских і килеватих пластин, удар твердого тіла об поверхню рідини.

Стосовно пружно-пластичного деформування твердого тіла в статиці й динаміці задача моделювання розглянута А.А. Ільюшиним, у якій зв'язок між напруженням й деформаціями твердих тіл дано з урахуванням в’язкості, пластичності й впливу температури.

Загальновідомими є критерії, що отримані на основі застосування Теорем подібності:

$$K = \frac{Ft^2}{\rho\, l^4} = idem$$

$$Ne = \frac{Fl}{m\nu^2} = idem \tag{1}$$

$$Fr = \frac{\nu^2}{g\ l} = idem \tag{2}$$

$$E\ u = \frac{P}{\rho \nu^2} = idem\ , \tag{3}$$

називаються відповідно критеріями Ньютона, Фруда й Ейлера.
де F – сила, m – маса, l – довжина, ν – швидкість, P – потужність, g – прискорення вільного падіння, ρ – щільність,

Розмаїтість форм критеріїв подібності дозволяє скласти деякі критерії так, щоб у них входили тільки задані величини, що визначають однозначність рішення, - фізичні константи матеріалів, параметри системи (розміри, маси, жорсткості й т.п.) і величини, що входять у граничні й початкові умови задачі.

Методика визначення критерієв подібності. В основі визначення критерієв оцінки параметрів вібросистем будемо виходити із існуючих величин, що є загальноприйнятими в в динаміці механічних систем.

Розмірність похідних одиниць завжди може бути складена у вигляді степеневого одночлена із основних одиниць.

У всіх перетвореннях, що базуються на теорії розмірності, використається властивість розмірної однорідності фізичних рівнянь, встановлена Фур'є й полягає в тім, що всі члени будь-якого фізичного рівняння мають однакову розмірність.

Визначення виду критеріїв подібності за допомогою аналізу розмірностей, можливо лише за умови, що на підставі вивчення фізичної природи явища вдається встановити повний перелік величин $x_1, x_2, x_3, x_4, ...x_n$,від яких залежить характеристика явищ φ:

$$\varphi = \varphi\left(x_1, x_2, x_3, x_4, ...x_n\right) \tag{4}$$

Дискретні вібросистеми. Розглянемо рух вібросистеми з однією ступінню вільності, що складається з маси $M\left(\left[M\right] = M\right)$, пружини, жорсткість якої дорівнює $C\left(\left[C\right] = MT^{-2}\right)$, і демпфери з коефіцієнтом опору $B\left(\left[B\right]MT^{-1}\right)$. Будемо вважати, що на систему діє гармонійна сила

$$Fe^{i\omega t} = \left(\left[F\right] = MLT^{-2}, \left[\omega\right] = T^{-1}, \left[t\right] = T\right),$$

а початкові переміщення $x_0 = \left(\left[x_0\right] = L\right)$ і швидкість $x_0 = \left(\left[x_0\right] = LT^{-1}\right)$ задані. У цьому випадку рівняння виду (4) зв'язує дев'ять величин - переміщення маси x і вісім величин, що перераховані раніше. Як основні величини краще вибрати константи, розмірність яких виражена через розмірність тільки однієї з основних одиниць СІ, якщо такі є. У цьому випадку це x_0, M и ω . Записавши їх нормальними в правій частині рівняння виду (4), будемо мати:

$$x = x\left(x_0, M, \omega, C, B, F, \dot{x}_0, t\right) \qquad (5)$$

У відповідності розмірності параметрів (5) будемо мати:

$$\begin{aligned} &[x] = [x_0]^1[M]^0[\omega]^0; \\ &[C] = [x_0]^0[M]^1[\omega]^2; \\ &[B] = [x_0]^0[M]^1[\omega]^1; \\ &[F] = [x_0]^1[M]^1[\omega]^2; \\ &[\dot{x}_0] = [x_0]^1[M]^0[\omega]^1; \\ &[t] = [x_0]^0[M]^0[\omega]^{-1}; \end{aligned} \qquad (6)$$

тоді

$$\begin{aligned} &\pi = \frac{x}{x_0}; \ \pi_1 = \frac{C}{M\omega^2}; \ \pi_2 = \frac{B}{M\omega}; \\ &\pi_3 = \frac{F}{M\omega^2 x_0}; \ \pi_4 = \frac{\dot{x}_0}{\omega\ x_0}; \ \pi_5 = t\ \omega \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\frac{x}{x_0} = f\left(\frac{C}{M\omega^2}, \frac{B}{M\omega}, \frac{F}{M\omega^2 x_0}, \frac{\dot{x}_0}{\omega^2 x_0}, t\ \omega\right). \qquad (8)$$

Можливі випадки, коли серед заданих фізичних величин не має трьох, розмірність яких виражена через розмірність тільки однієї з основних одиниць СІ, або вони є, але не дуже зручні для практичного використання. У цьому випадку можна й зручно використати комбінації величин зі складною розмірністю, що дають просту розмірність. Наприклад, у приведеному раніше випадку можна як основні величини використати комбінації M, C и F, що приводять до простої розмірності а саме:

$$M, \omega_0 = C^{1/2}M^{-1/2}\left([\omega_0] = T^{-1}\right) \ и \ x_{CT} = FC^{-1}\left([x_{CT}] = L\right). \qquad (9)$$

Тоді замість (5) буде:

$$x = x\left(x_{CT}, M, \omega_0, \omega, B, x_0, \dot{x}_0, t\right). \qquad (10)$$

так що, виконуючи всі дії аналогічно (6) і (7), одержуємо замість (8)

$$\frac{x}{x_{CT}} = f_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}, \frac{B}{M\omega_0}, \frac{x_0}{x_{CT}}, \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_{CT}}, t\ \omega_0\right), \qquad (11)$$

Зрозуміло, що застосовуючи позначення (9), можна від (8) прямо перейти до (11), В (8), (11) і в будь-які інші рівняння входять два види безрозмірних комбінацій - складені із двох однойменних величин, які називаються *симплексами,* а складені із декількох величин різної розмірності, називаються *комплексами*.

Інший спосіб визначення виду критеріїв подібності, називається *способом Релея*, який широко застосовується на практиці. Він складається із подання залежності (4) у виді ступеневого одночлена, у якому змінні $x_1, \ldots\ldots x_n$ представляються у невизначених ступенях з наступним уточненням цих ступенів на основі властивості розмірностей однорідності. Стосовно (10) за способом Релея будуть мати такий вигляд:

$$x = x_{CT}^{Z_1} M^{Z_2} \omega^{Z_3}{}_0\omega^{Z_4} B^{Z_5} x_0^{Z_6} \dot{x}_0^{Z_7} t_{Z_8} \qquad (12)$$

підставляючи розмірності лівих і правих частин, одержуємо:

$$L^1 = L^{Z_1+Z_6+Z_7} M^{Z_2+Z_5} T^{-Z_3-Z_4-Z_5-Z_7+Z_8}, \qquad (13)$$

тобто за властивостями розмірної однорідності:

$$\begin{aligned} &Z_1 + Z_6 + Z_7 = 1; \ Z_2 + Z_5 = \\ &= 0; \ Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_7 - Z_8 = 0, \end{aligned} \qquad (14)$$

Виражаючи показники ступеня Z_1, Z_2, і Z_3 основних величин через інші:

$$\left.\begin{aligned} &Z_1 = 1 - Z_6 - Z_7; \ Z_2 = -Z_5; \\ &Z_3 = Z_8 - Z_4 - Z_5 - Z_7, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

підставляючи (15) в (12) і групуючи члени з однаковим показником ступеня, одержуємо:

$$x = x_{CT}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{Z_4}\left(\frac{B}{M\omega_0}\right)^{Z_5}\left(\frac{x_0}{x_{CT}}\right)^{Z_6}\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega\ x_{CT}}\right)^{Z_7}\left(\omega_0 t\right)^{Z_8} \qquad (16)$$

т. е. у повній відповідності з (4.37)

$$\frac{x}{x_{CT}} = f_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}, \frac{B}{M\omega_0}, \frac{x_0}{x_{CT}}, \frac{\dot{x}_0}{\omega\ x_{CT}}, t\ \omega_0\right), \qquad (17)$$

Надалі функція f_1 не обов'язково повинна мати вигляд ступеневого одночлена (16).

Відмітим, нарешті, що властивість розмірної однорідності, сформульована в теорії розмірностей, використається також і при наявності суворого математичного опису досліджуваного явища для приведення диференціальних рівнянь, граничних і початкових умов до критеріальної форми. Спосіб такого приведення покажемо до розглянутого раніше прикладу. Диференціальне рівняння руху маси

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = Fe^{i\omega t} \qquad (18)$$

і початкові умови

$$x(0) = x_0 \ и \ \dot{x}(0)' = \dot{x}_0 \qquad (19)$$

містять ті ж дев'ять величин, що й рівність (5).

Введемо безрозмірні величини, позначивши їх значком ~:

$$\begin{aligned} &x = L\tilde{x}; \ x_0 = Lx_0; \ \dot{x}_0 = LT^{-1}\dot{\tilde{x}}_0; \ \omega = \\ &= T^{-1}\tilde{\omega}; \ t = T\tilde{t}, \end{aligned} \qquad (20)$$

де L, T- деякі розмірні множники, зв'язок яких з параметрами системи (18) встановимо надалі.

Підставляючи (20) в (18), одержуємо:

$$\frac{ML}{T^2}\ddot{\tilde{x}} + \frac{BL}{T}\dot{\tilde{x}} + CL\tilde{x} = Fe^{i\tilde{\omega}\tilde{t}}. \qquad (21)$$

Для того щоб привести рівняння до безрозмірної форми, розділимо всі члени на один з розмірних коефіцієнтів, наприклад на CL:

$$\frac{M}{CT^2}\ddot{\tilde{x}}+\frac{B}{CT}\dot{\tilde{x}}+\tilde{x}=\frac{F}{CL}e^{i\tilde{\omega}\tilde{t}}. \qquad (22)$$

Величини T і L можна представляти таким чином, щоб максимально спростити це рівняння, наприклад, прийняти, що:

$$T^2=\frac{M}{C}=\frac{1}{\omega_0^2};\ \ L=\frac{F}{C}=x_{CT.} \qquad (23)$$

Крім цього, позначивши:

$$\frac{B\omega_0}{C}=\frac{B}{M\omega_0}=\gamma \qquad (24)$$

можна написати замість (18) і (19) рівняння руху одиничної вібросистеми:

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\tilde{x}}+\gamma\dot{\tilde{x}}+\tilde{x}=e^{i\tilde{\omega}\tilde{t}};\\&\tilde{x}(0)=\tilde{x}_0;\ \ \dot{\tilde{x}}(0)=\dot{\tilde{x}}_0,\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

де

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{x}=\frac{x}{x_{CT}};\ \ \tilde{x}_0=\frac{x_0}{x_{CT}};\ \ \dot{\tilde{x}}_0=\frac{\dot{x}_0}{x_{CT}\omega_0};\\&\tilde{\omega}=\frac{\omega}{\omega_0};\ \ \tilde{t}=t\omega_0.\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Таким чином, задача зведена до тих же безрозмірних критеріїв, що й в (11). Це підтверджує висловлене міркування про те, що якщо на основі вивчення фізичної природи явища вдається виявити повний перелік величин, від яких залежить характеристика явища, що цікавить дослідника, то теорія розмірностей дозволяє встановити вид критеріїв подібності й тим самим забезпечити вірогідність моделювання явищ, що не мають суворого математичного опису. Однак, необхідно мати на увазі, що при цьому завжди залишається сумнів у повноті переліку величин, особливо якщо цей перелік отриманий у результаті дослідів на моделі, так як на моделі може й не виявитися вплив ряду величин, які є досить істотними або навіть основними в натуральному об'єкті. Тому суворі методи теорії подібності варто використати у всіх випадках, коли це тільки можливо.

Методологія визначення виду критеріїв для нелінійних, наприклад віброударних систем, аналогічна наведеному підходу (20)-(27) з тією лише різницею, що вводяться додаткові параметри системи (жорсткості обмежників коливань, зазори й т.п.). У силу цього з'являються додаткові критерії й комплекси (співвідношення жорсткостей, зазорів до напіврозмаху й т.п.).

Континуальні вібросистеми. Застосування методів подібності для дослідження коливань або вивчення поширення хвиль у континуальних системах) ефективно в стрижнях, сумішах і т.п., де ці хвилі є впливовими.

Розглянемо у якості прикладу рівняння лінійної динамічної теорії пружності, записавши одне з рівнянь Ляме:

$$\rho\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial Z}+\mu\Delta\omega+Z, \qquad (27)$$

одне з умов на поверхні:

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\ell+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)m+\left(\lambda\theta+2\mu\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^n=Z_v \qquad (28)$$

і одне з виразів, що зв'язують деформації з напруженнями:

$$\ell_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{X_y}{2\mu}, \qquad (29)$$

і маючи на увазі, що рівняння нерозривності тотожні при будь-якому виборі масштабів.

В (25-29) прийняті наступні позначення:

$$\lambda=\frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)};\ \ \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}$$ – постійні Ляме ; (30)

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}$$ – об'ємна деформація;

L, m, n – напрямні косинуси кутів, що утворені між нормаллю ν до поверхні тіла й осями координат відповідно $x, y, z; z$ – проекція об'ємних сил на вісь z ; z_v – проекція на вісь z поверхневих сил, що діють на площадці з нормаллю ν ; ℓ_{xy}, x_y – компоненти деформації й напруження в напрямку осі x по площадці, нормальної до осі y . Інші позначення такі ж, як і раніше.

Підставляючи для визначеності

$$Z=\rho g+\rho\dot{\omega}_0 \qquad (31)$$

і приводячи (27) до безрозмірного виду, одержуємо критерій подібності

$$\frac{\lambda}{\mu}=idem \quad или \quad \sigma=idem, \qquad (32)$$

Далі з урахуванням (30) одержуємо:

$$K^2=\frac{ET^2}{\rho L_2}=idem \quad или \quad T=KL\sqrt{\frac{\rho}{E}}; \qquad (33)$$

$$Fr=\frac{gT^2}{L}=idem \quad или \quad \frac{g\rho L}{E}idem; \qquad (34)$$

$$\frac{\ddot{\omega}_0T^2}{L}=idem \quad или \quad \frac{\ddot{W}_{0\rho}L}{E}=idem. \qquad (35)$$

Приводячи (28) і аналогічні рівняння на поверхні до безрозмірного виду, одержуємо з урахуванням (30):

$$\frac{X_v}{E}=\frac{Y_v}{E}=\frac{Z_v}{E}=idem. \qquad (36)$$

Нарешті, якщо пружне тіло складається з різнорідних матеріалів, то, виписуючи умови спільності деформацій і рівноваги елементів на границі розділення двох середовищ із використанням рівностей типу (29), одержуємо (підрядкові індекси відносяться до матеріалів із різних сторін від границі):

$$\frac{E_1}{E_2} = idem, \qquad (37)$$

а із врахуванням того, що в (33) масштаби L й T постійні для всіх областей моделі:

$$\sqrt{\frac{E_1\rho_2}{\rho_1 E_1}} = idem,$$

тобто з врахуванням (37)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = idem. \qquad (38)$$

Отже, існує принципова можливість створення моделі, що задовольняє одночасно критерію Фруда й іншим критеріям. Для цього необхідно, щоб відношення швидкостей хвиль стискування в матеріалах моделі й оригіналу були пропорційно кореню із лінійного масштабу, тобто

$$\frac{E}{\rho L} = idem. \qquad (39)$$

Таким чином, для забезпечення подібності явищ у моделі лінійно-деформованого пружнього тіла й для реального тіла необхідно і достатньо забезпечити геометричну подібність , подоба умов на поверхні (36) (маючи на увазі, що якщо за умовою задачі на поверхні задані переміщення або деформації, та їхня подібність входить в умови геометричної подібності) і початкових умов, рівність коефіцієнтів Пуассона матеріалів моделі й оригіналу, зміна масштабу часу пропорційно лінійному масштабу й обернено пропорційно відношенню швидкостей поширення хвиль стискування в матеріалах моделі й натури, збереження відносини між модулями пружності й густині різнорідних матеріалів згідно (37) і (38) і, нарешті, подібність заданих прискорень згідно (35), якщо рух тіла відбувається в неінерціальній системі координат.

Моделювання вібраційного процесу ущільнення середовища. Задача формулюється наступним чином. Задано вібраційну систему з параметрами: амплітуда x_0 і частота ω вібродії; маса m частинок суміші, що має щільність ρ і середній розмір r, має середню швидкість ν відносно вібруючого робочого органу; сила тертя $F_{тр}$, що виникає між частинками при коливаннях, пропорційна квадрату лінійного розміру.

Необхідно визначити значення деякої сукупності параметрів вібросистеми, які забезпечують найбільше значення коефіцієнта ущільнення сипкого середовища при обмежених значеннях питомої робота $\overline{A}$ и питомої потужності $\overline{P}$:

$$\overline{A} = \frac{1}{2}x_0^2\omega^2; \quad \overline{P} = \frac{1}{A\pi}x_0^2\omega^3 \qquad (40)$$

Вихідним параметром є коефіцієнт ущільнення

$$K_y = \frac{\rho - \rho_0}{\rho}100\% = \rho_c \qquad (41)$$

Таким чином, загальна функціональна залежність має вигляд

$$\rho_c = f\left(m_c, r, x_0\omega, F_{TP}, t, g, \overline{A}, \overline{P}\right). \qquad (42)$$

Застосовуючи метод розмірностей, одержуємо:

$$\rho_c = f\left(\frac{F_{TP}}{mx_o\omega^2}; \frac{v}{x_0\omega}; \omega\, t; \frac{x_0\omega^2}{g}; x_c^2\omega_c^2; x_c\omega_c^3\right) \qquad (43)$$

Тут $F_{тр}/m_c x_0\omega^2$ и $v/\alpha\omega$ характеризують опір відповідно сил і швидкостей; інші параметри є •обмежувальними.

Очевидно,

$$F_c = \frac{F_{TP}}{mx_0\omega^2} = \frac{\mu\, r^2}{k\rho r^2 x_0\omega^3} = \frac{\mu_1}{\rho r\omega v}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{k}, \quad k = \frac{4}{3}\pi, \qquad (44)$$

тобто відношення сили тертя (μ - коэфіцієнт пропорційності) до вібраційної сили, що діє на частинку m, обернено пропорційне щільності середовища ρ , амплітуді швидкості збудження v розміру частинки r і частоті ω.

Мірою ефективності процесу може бути прийняте відношення

$$K_v = \frac{U}{V} = \frac{UF_c\ \rho\ r\omega}{\mu} \qquad (45)$$

Звідси:

при $U = v \quad K_v = 1, \quad F_c = 0\left(F_{TP} = 0\right);$

при $U = 0 \quad K_v = 0, \quad F_c = 1\ \left(F_{TP} = mx_0\omega^2\right);$

при $\dfrac{UF_{cp}\rho}{\mu} = const = C, \quad K_v = cr\omega.$

Отже, для досягнення однакової ефективності вібрування при зменшенні розміру частинок заповнювача необхідно підвищити частоту коливання ω.

Цікаво зіставити силу тертя з вагою частинки

$$\frac{F_{TP}}{mg} = \frac{\mu\ r^2}{mg} = \frac{\mu\ r^2}{k\rho\ r^3 g} = \frac{\mu_1}{\rho g r},$$

тобто відношення сил тертя, що діють на частинку, до її ваги обернено пропорційне щільності ρ і розміру частинок r .

Зіставлення сили інерції й ваги частинки

$$\frac{mx_0\omega^2}{mg} = \frac{x_0\omega^2}{g} = n$$

дає відомий параметр – вібраційне перевантаження.

Тепер, маючи всі параметри, можна визначити режим вібрування, побудувавши амплітудно-частотну характеристику в безрозмірних координатах. Аналіз такої характеристики для конкретних вихідних даних $\left(m, r, \rho, v, x_0\omega\right)$ дає можливість одержати питомі значення роботи й потужності, що забезпечують максимальне значення щільності суміші.

Висновки.

1. Застосування методів подібності і розмірностей при визначенні параметрів вібросистем дозволяє отримати достатньо ефективні залежності для розрахунку робочих параметрів вібромашин.
2. Отримані критерії ущільнення суміші показують на суттевий вплив швидкості та прискорення, що є складовими питомої роботи та питомої потужності.
3. Запропонований підхід може бути успішно застосованим для вібросистем і більш складної структури.

Література.

1. Алабужев П.М., Геронимус В.В., Мицкевич Л.М., Шеховцов Б.А. Теория подобия и розмерностей. Моделирование. – М.: Высшая школа, 1968. –205с.
2. Назаренко І.І. Вібраційні машини і процеси будівельної індустрії. Навчальний посібник – К.: КНУБА, 2007. – 230с.
3. Назаренко И.И. Прикладные задачи теории вибрационных систем: Учебное пособие. – К.: ИСИО, 1993. – 216 с.
4. Сердюк Л.І. Основи теорії розмірностей, теорії розмірностей та математичного моделювання: Навчальний посібник – Полтава: ПНТУ, 2002 – 98с.