

УДК 629.114

С.В. Коваленко, аспірант КНУБА

## ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ТЕЛЕСКОПІЧНИХ СТРИЛ АВТОМОБІЛЬНИХ КРАНІВ З АМПЛІТУДНО ЗАЛЕЖНИМ РОЗСИЮВАННЯМ ЕНЕРГІЇ У МАТЕРІАЛІ

**Актуальність проблеми.** При роботі автомобільного крану виникає потреба в гарантованому стані телескопічної стріли, яка будучи під навантаженням може здійснювати коливання в тій чи іншій площині. В роботі досліджуються повздовжні та поперечні коливання стріли із амплітудно залежним розсіюванням енергії.

**Дослідження повздовжніх коливань.** Розглянемо консольний стрижень, який здійснює вимушені біля резонансні коливання під дією навантаження  $p(x) \cdot \sin \nu t$  (рис.1). Фізичною причиною виникнення подібних коливань є маятникові коливання вантажу на висунутій секції телескопічної стріли автомобільного крану (ТСАК).

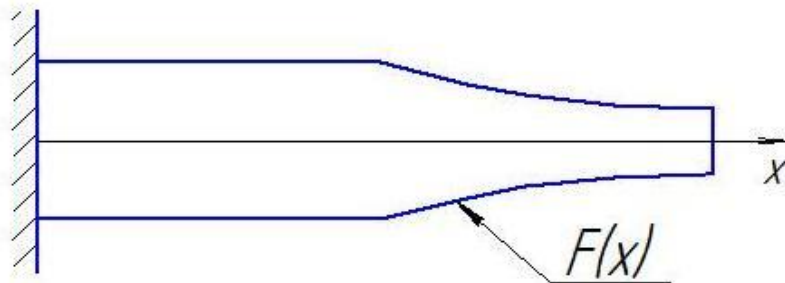


Рисунок 1. Геометрія задачі:  $F(x)$  – залежність від  $x$  профілю стрижня ТСАК (вид збоку).

Рівняння коливань із врахуванням амплітудно-залежного розсіювання енергії можна записати у виді [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ ES \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + S \cdot \frac{k}{\pi} \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|_m^n \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 / \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_m^2} \right] - \rho S \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = p(x) \cdot \sin \nu t, \quad (1)$$

де  $k, n$  – коефіцієнти, що впливають на форму кривої енергії,

$\Delta W = k \cdot \varepsilon_0^{n+1}$ ,  $\Delta W$  – об'ємна щільність амплітудного значення потенціальної енергії,  $\varepsilon_0$  – амплітуда деформацій,  $E$  – модуль пружності матеріалу стрижня,  $V(x)$  – переміщення вздовж вісі  $OX$ ,  $\rho$  – щільність матеріалу стрижня,  $S(x)$  – площа його поперечного перерізу,  $p(x)$  – амплітуда поздовжніх коливань збуджуючої зовнішньої сили, яка здійснює коливання з частотою  $\nu$  (частота  $\nu$  близька до частоти маятникових коливань вантажу;  $\nu$  одного порядку з частотою (лінійною) коливань математичного маятника),  $\left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|_m$  –

амплітудне значення деформацій. Слід зазначити що, детальний опис та перелік варіантів форм петель гістерезису наведені у роботі [2].

Розв'язок рівняння (1) може бути знайдений енергетичними методами чи методами малого параметру [3-8]. При цьому для амплітуди резонансних коливань отримаємо:

$$a_p = \sqrt[n]{p^* \cdot \pi / \Delta \bar{W}}, \quad \text{де } p^* = \int_0^l y(x) p(x) dx - \text{робота за цикл зовнішніх сил, які відповідальні за}$$

збудження резонуючої форми коливань;  $l$  – довжина секції ТСАК;  $\Delta \bar{W} = k \cdot \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^{n+1} \cdot S \cdot dx$  –



енергія, котра розсіюється у секції за цикл коливань;  $y$  – нормована форма коливань, пов'язана з  $V$  співвідношенням  $V = a_p \cdot y(x) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ , і яка є розв'язком рівнянь власних

коливань  $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{E \cdot S(x)}$ ;  $\frac{dQ}{dx} = -\rho \cdot \omega^2 \cdot S(x) \cdot y$  (2), де  $\omega$  – власна кутова частота коливань

секції ТСАК із відповідними граничними умовами:  $y(0)=Q(l)=0$ , та умовою нормування:  $\max y=y(l)=1$  (3).

При дії зосередженої сили на кінці стрижня  $p(x) = P_0 \cdot \delta(x-l)$  функціонал  $P^* = \int_0^l P_0 \cdot \delta(x-l) y(x) dx = P_0 \cdot y(l) = P_0$  не залежить від конфігурації стрижня ТСАК  $S(x)$ , й управління функціоналом демпфірування у системі є єдиним засобом екстремальної зміни амплітуди резонансних коливань.

Таким чином, відшукування екстремального значення амплітуди резонансних коливань зводиться до розв'язку задачі оптимізації з функціоналом якості:

$$I = r \cdot \int_0^l |Q|^{n+1} \cdot S^{-n} dx, \quad r = \pm 1 \quad (4)$$

при обмеженнях (2), (3) й обмеженнях на конфігурацію виду  $S_1 \leq S(x) \leq S_2$ . Виходячи із результатів роботи [1]. Необхідні умови оптимальності для цього випадку можуть бути представлені нелінійною крайовою задачею для системи, яка включає у себе вихідну крайову задачу (1), (2), (3) й спрощену крайову задачу:

$$\frac{d\psi_1}{dx} = \rho \cdot \omega^2 \cdot S \cdot \psi_2; \quad \frac{d\psi_2}{dx} = -\frac{\psi_1}{ES} + \frac{(n+1) \cdot |Q|^{n-1} \cdot Q}{S^n}; \quad (5)$$

$$\psi_1(l) = -\mu = \frac{(n+1) \cdot \Delta \bar{W}}{y(l) \cdot r}; \quad \psi_2(0) = 0; \quad \psi_1(0) = 0, \quad (6)$$

замкнуті умовою максимуму гамільтоніану

$$H = k \cdot \left( \frac{Q^2}{ES} + \rho \omega^2 \cdot S \cdot y^2 \right) + r \cdot \left( \frac{Q \cdot \psi_1}{ES} - \rho \omega^2 \cdot S \cdot y \cdot \psi_2 + \frac{|Q|^{n+1}}{S^n} \right); \quad (7)$$

$$H(S_{opt}, y, Q, \psi_1, \psi_2) = \max_{S_1 \leq S \leq S_2} H(S, y, Q, \psi_1, \psi_2). \quad (8)$$

Завдяки результатам, отриманим у роботах [9-11], можна стверджувати що отримана структура необхідних умов оптимальності забезпечує розв'язок задачі динамічного синтезу сумісно за рахунок відходу від резонансу (чи налаштування на резонанс – для задач вібротехніки) й максимізації демпфіруючих властивостей стрижня ( $r=-1$ ) (або мінімізації для задач ітротехніки ( $r=1$ )). Континуум оптимальних за критеріями  $\omega^2$ , та  $\Delta W$  конфігурацій формує у координатах  $\omega, \Delta W$  або  $\omega, a_p$  замкнену криву, яка показує розв'язок задач  $\min \Delta \bar{W}, \max \Delta W$  при  $\omega = const$  або  $\min \omega, \max \omega$  при  $\Delta W = const$ .

**Дослідження згинних коливань.** Розглядається рівняння вимушених біля резонансних коливань виду:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \bar{M} \right) + \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = p(x) \cdot \sin \omega t, \quad (9)$$

де  $\bar{M}$  – «неідеально пружний момент» із врахуванням несумісності гілок навантаження й розвантаження  $\bar{M} = \int_{(s)} z ds$ . Підставляючи у вираз для моменту запис

фізичного закону у відповідності, наприклад, з гіпотезою М.М. Давиденкова із врахуванням  $\varepsilon = -z \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ , отримаємо

$$\ddot{M} = EI \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \pm \frac{k}{\pi} \cdot R \cdot \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_m^n \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right)^2}, \quad (10)$$

де

$$I = \int_s z^2 ds, \quad R = \int_s |z|^{n+1} ds, \quad \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_m = \max_t \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\}. \quad (11)$$

Після цього рівняння коливань приймає наступний вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( ES \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) \pm \frac{k}{\pi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ R \cdot \left| \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right|_m^n \right] \cdot \sqrt{1 - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} / \left( \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right)_m} + \rho s \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = p(x) \cdot \sin vt. \quad (12)$$

Записуючи розв'язок  $V$ , як і раніше, через резонуючу власну форму  $y(x)$   $V = ay(x) \cdot \sin(vt + \psi)$ , знаходимо для резонансної амплітуди  $a_p$  формулу:

$$a_p = \sqrt[n]{\pi p^* / \Delta \bar{W}}. \quad (13)$$

При цьому  $p^*$  зберігає свій попередній зміст (нормованої амплітуди вимушених коливань), а функціонал енергії, яка розсіюється у стрижні ТСАК при згинних коливаннях (фізичною причиною виникнення котрих теж є маятникові коливання вантажу на канаті ТСАК при висунутих секціях), записуються у вигляді:

$$I = \Delta \bar{W} = k \cdot \int_0^l R \cdot \left| \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|^{n+1} dx \quad (14)$$

(Оскільки  $y=y(x)$ , тоді  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ ).

Власна форма  $y(x)$  є розв'язком однорідної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi; \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{E \cdot I(x)}, \quad \frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{dQ}{Dx} = -\omega^2 \cdot \rho \cdot S(x) \cdot y \quad (15)$$

з граничними умовами для випадку консольного кріплення стрижня ТСАК:

$$y(0) = \varphi(0) = Q(l) = M(l) = 0 \quad (16)$$

й умовою нормування:  $y(l)=1$ . (17)

При складанні необхідних умов оптимальності треба мати на увазі зв'язок між геометричними параметрами  $I, R, S$ , існуючий для різних випадків поперечного перерізу балки. Так, для прямокутного перерізу зі змінною шириною:

$$I = \frac{sh^2}{12}, \quad R = S \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^{n+1}; \quad \text{для круга зі змінним радіусом } I = \frac{s^2}{4 \cdot \pi}, \quad R = \frac{c}{\pi a z} \cdot \left( \frac{S}{\pi} \right)^{\frac{n+3}{2}}, \quad \text{де}$$

$c = \int_0^{2\pi} |\sin|^{n+1} d\varphi$ . Таким чином, для цих і багатьох інших випадків справедлива форма запису

$I = k_1 \cdot s^{\gamma_1}, \quad R = k_2 \cdot s^{\gamma_2}$ . Функціонал із врахуванням рівнянь (15) запишемо у вигляді:

$$I = r \cdot \int_0^l R(s) \cdot \frac{|M|^{n+1}}{[I(S)]^{k+1}} dx. \quad (18)$$

Необхідні умови оптимальності для розглядуваної задачі складаються з вихідної граничної задачі аналізу (15)-(17) (разом з умовою нормування), спряженої граничної задачі:



$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dx} = \omega^2 \cdot \rho \cdot s \cdot \psi_4; \frac{d\psi_2}{dx} = -\psi_1; \frac{d\psi_4}{dx} = -\psi_3; \\ \frac{d\psi_3}{dx} = \frac{\psi_2}{E \cdot I(S)} + (n+1) \cdot \sin(M) \cdot \frac{|M|^n \cdot R(S)}{[I(S)]^{n+1}}; \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{де } \psi_1(l) = -\mu = \frac{(n+1) \cdot I}{y(l) \cdot r}; \psi_2(l) = \psi_3(0) = \psi_4(0) = 0; \psi_1(0) = 0 \quad (20)$$

й умови максимуму:

$$H(S, \bar{y}, \bar{\psi}) = k \cdot \left( \frac{M^2}{EI(S)} + \omega^2 \cdot \rho \cdot S \cdot y^2 \right) - r \left( \frac{M\psi_2}{EI(S)} + \omega^2 \cdot \rho \cdot S \cdot y \cdot \psi_4 + \frac{|M|^{n+1} \cdot R(S)}{[I(S)]^{n+1}} \right); \quad (21)$$

$$H(S_{opt}, \bar{y}, \bar{\psi}) = \max_{S_1 < S(x) < S_2} H(S, \bar{y}, \bar{\psi}). \quad (22)$$

Самі необхідні умови оптимальності, як і їх фізичний зміст, полягають у відшуванні мінімуму ( $r=1$ ) й максимуму ( $r=-1$ ) функціоналу розсіювання енергії на різних резонансних частотах  $\omega^2 = const$ , отримані у повній відповідності до результатів робіт [9-11].

### Висновки.

1. Розглянуті повздовжні та згинні коливання телескопічних стріл автомобільних кранів, і дана оцінка параметрів цих коливань.
2. Отримані аналітичні залежності для визначення розсіювання енергії в секціях стріл автокранів із амплітудно-частотною характеристикою, що відкривають можливість для оптимізації секцій телескопічних стріл автокранів.

### Література

1. Богомолов С.И., Симсон Э.А., Сукласова Н.Г. Оптимизация стержнем характеристикам демпфирования.// Динамика и прочность машин. – 1980. – с.70-76.
2. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960, - 193с.
3. Бголюбов Н.Н., Митростольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503с. в
4. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. – К.: изд-во АН УССР, 1934 – 142с.
5. Пановко Я.Г. основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976-320с.
6. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учётом несовершенной упругости материалов. – К.: Наукова думка, 1979 – 379с.
7. Писаренко Г.С. Рассеяния энергии при механических колебаниях. - К.: изд-во АН УССР, 1962 – 436с.
8. Писаренко Г.С., Хальчевский В.В., Дубенец В.Г. Расчёт свободных и вынужденных колебаний круглых пластин с учетом рассеяния энергии в материале// Проблемы прочности. – 1972. №11. – с.3 – 9.
9. Богомолов С.И., Симсон Э.А. Оптимальное управление в линейных кривых задачах на собственные значения. – Вкн.: Оптимальное управление механических систем: Тез. докл. Всесоюз. Конф. К. изд-во АН УССР, 1979 – с. 82 – 83.
10. Богомолов С.И., Симсон Э.А. Оптимальное управление демпфированием при колебаниях элементов конструкций. - Вкн.: Всесоюз. совещ. по вибротехнике – Тбилиси: Мецниереба, 1978. – с. 26 – 27
11. Симсон Э.И.. Оптимизация элементов машин у резонансных режимах: Автореф. Дис. к. т. н. – Харьков, 1981 – 32с.