

УДК.624.138.22

О.П. Дєдов, к.т.н., доц. КНУБА

РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ НАПРУЖЕННЯ В ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ ПІД ДІЄЮ СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Актуальність проблеми. Знання напружень в перерізах стовпа ґрунту під дією силового навантаження дозволяє визначити зону ущільнення і, як наслідок, достатньо аргументовано визначити параметри обладнання для ущільнення.

Тому пошук методів визначення напружено-деформованого стану, які наближені до реальних умов деформування є задачею актуальною.

Огляд літературних джерел. Дослідженню процесів деформування різних середовищ присвячена низка робіт, в яких розглядаються різні підходи. В роботах по ущільненню бетонних сумішей застосовуються моделі з різним законом зміни сил опору [6, 7], і експериментальні криві зміни напруження в функції відносної деформації в пружно-пластичній постановці [6]. Для ущільнення ґрунтів домінуючими є дослідження на основі розгляду діаграми напруження-деформація в лінійній постановці [8]. Варто відмітити, що право на застосування мають будь-які моделі, якщо вони обґрунтовані і експериментально підтвердженні. В роботі, що пропонується розглядається контактна задача “вібротрамбівка – ущільнювальне середовище” з метою отримання параметрів напружено-деформованого стану середовища за умови максимальної передачі енергії від робочого органу.

Методика досліджень. Передбачається, що навантаження від робочого органу рівномірно розподілене по значній частині поверхні ґрунту та його динамічні властивості розглядаються в координатах напруження – деформація, у вигляді діаграми деформування контактної зони, характеристики якої можуть оцінити рівень сприйняття енергії. У першому наближенні середовище розглядається як пружно-пластичне тіло.

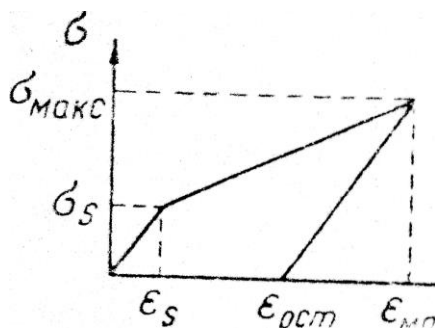


Рисунок 1. Залежність напруження від деформації для пружно-пластичного матеріалу.

При вирішенні задач про поширення хвиль стиснення і розрідження в середовищі, для якого залежність між напруженням σ і деформацією ε може бути апроксимована схемою Прандтля з лінійним зміцненням (рис. 1) і виражається трьома рівняннями [1, 3, 6]:

$$\sigma = \sigma_0 + E_0 \varepsilon \quad \text{при } \sigma \leq \sigma_s, \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma_s + E_1 (\varepsilon - \varepsilon_s) \quad \text{при } \sigma > \sigma_s, \quad (2)$$

$$\sigma = \sigma_{\max} + E_2 (\varepsilon - \varepsilon_{\max}) \quad \text{при розвантаженні.} \quad (3)$$

Прийнято розглядати динамічний процес в площині x, t (x – координата Лагранжа, t – час),

користуючись при цьому методом характеристик для вирішення хвильового рівняння і вважаючи швидкості розповсюдження пружних і пластичних хвиль відповідно рівними

$\sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$ та $\sqrt{\frac{E_1}{\rho}}$. У цьому рішенні щільність середовища ρ приймається однаковою при

проходженні як пружних, так і пластичних хвиль на підставі, що у виразі для щільності

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \varepsilon} \quad (4)$$

значенням відносної деформації ε можна знехтувати порівнянні з одиницею. Для щільних середовищ (метал, водо насичених ґрунтів) або для невеликих тисків це нехтування зміною ρ допустиме і дозволяє спростити хвильове рівняння. Але для не ущільнених ґрунтів при



значних напруженнях розглядання щільності як постійної величини на всьому етапі навантаження може привести до суттєвих помилок. Як видно із виразу для швидкості розповсюдження хвиль напружень

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} (1 - \varepsilon), \quad (5)$$

вже при $\varepsilon = 20\%$ похибка при визначенні a без урахування зміни щільності перевищує 10%.

Результати досліджень. Рішення поставленої задачі про розповсюдження плоских хвиль напружень при динамічному деформуванні лінійного пружно-пластичного середовища, щільність якого не вважається постійною на різних етапах навантаження і розвантаження, отримано в роботі [1] у системі координат Лагранжа маса – час. По аналогії із робіт [1–6] визначається зона поширення залишкових деформацій, межа якої відповідає падінню тиску на фронті пружно-пластичної хвилі до значення p_s .

В якості координат Лагранжа приймається система (h, t)

$$h = \int_{x(0,t)}^{x(h,t)} \rho(x,t) dx = \int_{x(0,0)}^{x(h,0)} \rho dx, \quad (6)$$

де h – маса між аналізованим і початковим перерізом, незмінна у часі, але щільність середовища при цьому є функцією часу і відстані.

У координатах Ейлера мають місце два рівняння одновимірної течії, відомі з газодинаміки:

а) рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} u + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad (7)$$

б) рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

де x – система координат, нерухома у просторі;

u – абсолютне значення швидкості частинок цій системі координат;

p – питомий тиск (власна вага елементів стержня не враховується).

Із виразу (6) отримуємо натупну залежність між прийнятими координатами Ейлера та Лагранжа:

$$x = \frac{h}{\rho_0}, \quad (9)$$

В новій системі координат h, t рівняння (7) і (8) з урахуванням (9) приймають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial h} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial h} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

На ділянці пружних деформацій (при $p \leq p_s$) рівняння (1) після переходу до змінних p, ρ (де $p = \sigma$, а залежність між ρ і ε описується формулою (4)), приймає вид

$$p = p_0 + E_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho}. \quad (11)$$

Тут ρ_0 – щільність при тиску p_0 ; для середовища, що не володіє зчепленням, $p_0 = 0$.

Швидкість поширення звукових хвиль на цій ділянці завантаження дорівнює

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E_0 \rho_0}{\rho^2}}, \quad (12)$$

Для тиску p_0 одержуємо

$$c = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}.$$

Позначимо через Z хвильовий опір (характеристичний імпеданс)

$$Z_0 = c\rho = \sqrt{E_0 \rho_0} = c_0 \rho_0. \quad (13)$$

Як випливає з виразів (12) і (13), в середовищі, що підкоряється рівнянню (1), швидкість звуку є величиною змінної, у той час як хвильовий опір Z_0 при системі, яка не має дисипативних властивостей, постійний.

Рівняння (11) перепишемо в наступному вигляді:

$$p = R_0 - \frac{Z_0^2}{\rho}, \quad (14)$$

де $R_0 = p_0 + E_0 = p_0 + c_0^2 \rho_0.$

При значенні $p > p_s$ закон стискування середовища (2) також може бути представлений у вигляді рівняння (14), якщо замість Z_0 і R_0 підставити Z_1 і R_1 , вирази для яких можуть бути отримані аналогічні розрахунки

$$Z_1 = c_1' \rho_1' = \sqrt{E_1 \rho_1}; \quad R_1 = p_s + E_1 = p_s + c_1'^2 \rho_1,$$

де c_1' – швидкість розповсюдження пружно-пластичних деформацій при $p_s < p < p_{\max}$;

ρ_1' – щільність середовища при $p_s < p < p_{\max}$;

ρ_1 – щільність середовища при $p = p_s$;

$p_s = \sigma_s$ – тиск, що відповідає переходу від пружних до пружно-пластичних деформацій;

c_1 – швидкість розповсюдження пружно-пластичних деформацій при $p = p_s$, що рівна

$$c_1 = \frac{E_1}{\rho_1}.$$

Як і на ділянці пружних деформацій, швидкість розповсюдження пружно-пластичних хвиль a_1 при $p > p_s$ змінюється в залежності від зміни щільності (зі збільшенням щільності швидкість зменшується), а хвильовий опір середовища Z_1 , при відсутності втрат залишається незмінним.

При розвантаженні зв'язок між тиском і щільністю, що відповідає рівнянню (3), також може бути виражена у вигляді рівняння (14), і при цьому

$$Z_2 = \sqrt{E_2 \rho_0}; \quad R_1 = p_{\max} + \frac{Z_2^2}{\rho_{\max}},$$

де p_{\max} – тиск, при якому починається розвантаження;

ρ_{\max} – щільність середовища при цьому тиску.



Таким чином, залежність між тиском і щільністю відповідно до рівняння (14) лінійна як при збільшенні, так і при зменшенні тиску. У межах кожної ділянки діаграми $\sigma - \varepsilon$ (рис. 1) значення Z_i, R_i ($i=0, 1, 2$) постійні. Тому рівняння (10) з урахуванням виразу (14) можуть бути представлені в наступному вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial h} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial h} + \frac{1}{Z_i^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (10a)$$

Диференціюючи перше рівняння по h , а друге по t , віднімаючи одне рівняння від іншого і помноживши на Z_i^2 , отримаємо

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = Z_i^2 \frac{\partial^2 p}{\partial h^2}. \quad (15)$$

Вираз (15) представляє собою хвильове рівняння в координатах h, t , з коефіцієнтом у правій частині, постійним у межах кожної лінійної ділянки діаграми $\sigma - \varepsilon$. Рішення завдання в площині x, t при розгляді щільності як змінної величини, що залежить від діючого тиску та історії навантажування, призвело б до складання аналогічного хвильового рівняння, але нелінійного, і в загальному вигляді було б навряд чи можливо.

Рівняння (15) може бути також отримано безпосередньо па рівняння динамічного деформування шару контактної зони, при складанні якого нехтується зміною щільності при зміні напруженого стану. Як відомо, це рівняння має такий вигляд

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

де $\omega = \omega(x, t)$ – переміщення елементів шару.

Диференціюючи обидві частини цього рівняння по x , отримаємо

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \quad (16)$$

При розвантаженні ε і σ , згідно рівняння (3), пов'язані між собою наступним співвідношенням

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max}(x) + \frac{\sigma + \sigma_{\max}(x)}{E_2} = \frac{\sigma}{E_2} + \Phi(x).$$

Переходячи до координат h, t за формулою (9) і враховуючи, що $E_2 \rho_0 = Z_2^2$, приходимо до рівняння (15).

Як видно з рівняння (15), Z_i , є швидкістю розповсюдження тиску p в координатах h, t . Можна показати, що при $E_2 \geq E_0 > E_1$ має місце нерівність

$$Z_2 \geq Z_0 > Z_1$$

Дійсно, так як зазвичай при досягненні межі пружності має місце відносно незначне збільшення щільності, можна записати

$$\frac{E_1}{E_2} \leq \frac{E_1}{E_0} < \frac{\rho_0}{\rho_1},$$

звідки

$$E_1 \rho_1 \leq E_0 \rho_0 < E_2 \rho_0$$

Розв'язок рівняння (15) в формі Даламбера має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} p(h, t) &= F_1(h - A_i t) + F_2(h + A_i t); \\ u(h, t) &= \frac{1}{A_i} [F_1(h - A_i t) - F_2(h + A_i t)]. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Останній вираз написано на тій підставі, що тиск у кожній точці прямо пропорційно пов'язаний зі швидкістю частинки коефіцієнтом, що дорівнює характеристичному імпедансу A_i . На хвилі, що поширюється в бік зменшення h , тиск та швидкість частинок мають різні знаки, тому у виразі для u функція F_2 записана з мінусом.

Так як для ґрунтів при дуже великих значеннях p_{\max} справжня динамічна діаграма $\sigma - \varepsilon$ має більш складну форму [7] і апроксимація прийнятою пружно-пластичною схемою з лінійним зміцненням (див. рис.1) має бути більш обґрунтована. Крім цього внаслідок можливого порушення контакту між робочим органом і середовищем утворюються хвилі сильних розривів і величина тиску буде мати вигляд:

$$p_{\max} < -\frac{2A_0}{A_0 - A_1} p_s. \quad (18)$$

що виконується в більшості практичних випадків застосування ударних навантажень до реальних матеріалів без їх руйнування.

Висновки.

1. В подальших дослідженнях передбачається вирішення рівнянь (1-18) для конкретних чисельних значень характеристик ґрунтів.
2. Отримані аналітичні залежності для визначення напружено-деформованого стану та розповсюдження хвиль в рамках прийнятої моделі пружно-пластичного тіла.

Література

1. Ляхов Г. М. Полякова Н.І. Распространение и взаимодействие волн сжатия и разрежения в упругопластических средах. «Механика и машиностроение» № 3, 1960.
2. Ляхов Г. М., Покровський Г. І. Взрывные волны в грунтах, Госгортехиздат, 1962.
3. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматгиз, 1961.
4. Давыдов С. С. Колебания разнородного грунта в упругопластической стадии от кратковременной нагрузки. Сб. трудов НИИЮСГ1 № 82 «Динамика грунтов». Госстройиздат, 1958.
5. Дидух Б.И. Динамическое взаимодействие трамбующей плиты с уплотняемым грунтом. «Инженерно-физический журнал» К 2, 1962.
6. Сівко В.Й. Основы механики вибрируемой смеси. – К.: Вища шк., 1987.
7. Назаренко І.І. Прикладні задачі теорії вібраційних систем. Навчальний посібник (2-е видання) – К.: Видавничий дім «Слово», 2010.
8. Хархута Н.Я. Машины для уплотнения грунтов. – Л.: Машиностроение, 1973.