

МАШИНОВИКОРИСТАННЯ У РОСЛИННИЦТВІ ТА ТВАРИННИЦТВІ

УДК 631.3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЕРТИКАЛЬНИХ І ПОЗДОВЖНЬО-КУТОВИХ
КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ «ДВИГУН - ТРАНСМІСІЯ - КОЛЕСА - МІСТ - ПІДРЕСОРЕНА
МАСА» ТРАКТОРА

*Борисюк Дмитро Вікторович аспірант
Вінницький національний аграрний університет
Borysyuk D.
Vinnitsa National Agrarian University*

Анотація: в даній статті пропонується розглянути математичну модель вертикальних і поздовжньо-кутових коливань системи «двигун - трансмісія - колеса - міст - підресорена маса» трактора. Представлено динамічну модель руху трактора і її параметри

Ключові слова: коливання, двигун, трансмісія, колеса, міст, підресорена маса, трактор.

Вступ

Експлуатаційні властивості трактора в даній роботі розглянуті на досить простих математичних моделях, які, однак, дозволяють провести аналіз показників цих властивостей з достатньою точністю при вирішенні великої кількості проблем експлуатації і проектування тракторів. Для більш детального аналізу конструкції тракторів проводять дослідження на складних математичних моделях (системах диференціальних рівнянь), вирішення яких можливе тільки за допомогою електронно-обчислювальних машин. При цьому складність математичної моделі багато в чому залежить від вирішуваної проблеми і вимозі до точності одержуваних розрахункових даних [1].

Основна частина

Як приклад розглянемо один з методів побудови математичних моделей руху трактора, який базується на рівнянні Лагранжа другого роду. У загальному випадку будь-яка машина являє собою складну багатомасову систему. Окремі її частини здійснюють складні рухи і переміщення відносно один одного (обертання зубчастих коліс, трансмісійних валів, повороти фрикційних тіл обертання і т.д.). Однак при вирішенні ряду задач, наприклад дослідженні тягово-швидкісних властивостей, паливної економічності, плавності ходу, керованості і стійкості, цими переміщеннями можна знехтувати.

Розглянемо прямолінійний плоский рух двовісного задньопривідного трактора, в якому вважаємо, що основні переміщення відбуваються в напрямку осі OX , коливальні - в напрямку осі OZ і поздовжньо-кутові коливання підресореної маси (рис. 1) - при наступних припущеннях:

- рух трактора в поперечній площині відсутній (плоский рух);
- не підресорені маси можуть переміщатися тільки в напрямку поздовжньої осі разом з підресореною масою і перпендикулярно площині дороги;
- всі пружні зв'язки вважаються лінійними;
- розсіювання енергії в шинах враховується коефіцієнтами опору коченню;
- кут закручування шини прямо пропорційний зміщенню контактної площадки колеса в порівнянні з нерухомим ободом колеса і обернено пропорційний радіусу кочення колеса;
- поздовжньо-кутові і поперечно-кутові коливання незалежні і їх можна досліджувати окремо.

Введені позначення на рис. 1: V - поздовжня швидкість руху трактора в напрямку осі OX прямокутної декартової системи координат XOZ з віссю OZ , що перпендикулярна площині дороги, при русі по нерівному дорожньому покриттю; M_n, J_0 - підресорена маса і її момент інерції щодо поперечної осі, що проходить через центр ваги трактора (точка O); M_1, M_2 - маси не підресорені, що припадають відповідно на передній і задній мости; J_{06} - момент інерції обертових деталей двигуна, ведучих деталей зчеплення і маховика; $J_{сш}, J_{кш}, J_2$ - моменти інерції відповідно обертових ведених деталей муфти зчеплення, обертових деталей коробки передач від первинного вала до синхронізатора включеної передачі і ділянки трансмісії від синхронізатора включеної передачі до ведучих коліс рушія трактора; J_{k1}, J_{k2} - моменти інерції коліс відповідно переднього і заднього мостів; P_w - сила опору повітря; G_m - вага трактора; P_{f1}, P_{f2} - сили опору коченню коліс відповідно переднього і заднього мостів; P_{N1}, P_{N2} - нормальні реакції коліс відповідно переднього і заднього мостів; P_k - сила



тяги на ведучих колесах; C_{n1}, C_{n2} - коефіцієнти жорсткості переднього і заднього моста; K_{n1}, K_{n2} - коефіцієнти демпфування переднього і заднього мостів; $C_{mp1}, C_{mp2}, K_{mp1}, K_{mp2}$ - відповідно коефіцієнти жорсткості і демпфування ділянок трансмісії; C_{u1}^N, C_{u2}^N - коефіцієнти нормальної жорсткості шин передніх і задніх коліс; $M_{\delta\delta}$ - крутний момент двигуна; Δ_{n1}, Δ_1 - сумарний лінійний зазор в конструкції переднього моста і кутовий зазор на ділянці трансмісії; θ - кут, що характеризує поздовжньо-кутові коливання підресореної маси; η_1, η_2 - переміщення відповідно мас M_1, M_2 перпендикулярно площині дороги; h_1, h_2 - висота нерівностей дороги відповідно під передніми і задніми колесами трактора; α - крутизна кута спуску (підйому) трактора; L_1, L_2 - відстані від центра ваги відповідно до осей передніх і задніх коліс.

В якості узагальнених координат візьмемо наступні незалежні один від одного параметри, число яких дорівнює числу ступенів свободи динамічної моделі трактора: X - поздовжнє переміщення мас M_n, M_1, M_2 ; Z - переміщення перпендикулярно площині дороги підресореної маси; θ - кут поздовжньо-кутових коливань підресореної маси; η_1, η_2 - переміщення мас M_1 і M_2 перпендикулярно площині дороги; $\varphi_{\delta\delta}$ - кут повороту колінчастого валу двигуна; φ_{cu} - кут повороту ведених деталей муфти зчеплення; φ_{kn} - кут повороту обертових деталей коробки передач від первинного валу до синхронізатора; φ_z - кут повороту обертових деталей від синхронізатора включеної передачі до ведучих коліс рушія трактора з урахуванням редукторів на цій ділянці трансмісії; φ_{k2} - кут повороту обода заднього колеса.

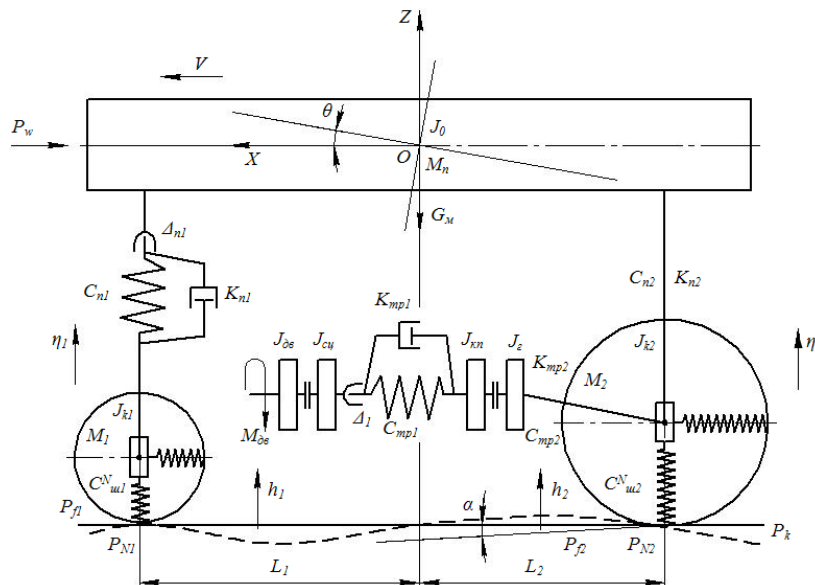


Рис. 1. Схема динамічної моделі руху трактора

Математична модель руху трактора багатоструктурна, тобто кожен режим руху описується своєю системою диференціальних рівнянь. Виведення систем рівнянь проведемо за допомогою рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} = Q_k, \quad (1)$$

де T - кінетична енергія трактора;

Π - потенційна енергія трактора;

Φ - дисипативна функція, що характеризує зменшення енергії з плином часу;

Q_k - узагальнена сила, що відповідає k -й узагальненій координаті q_k ;

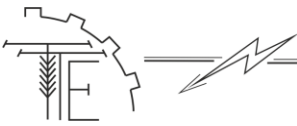
\dot{q}_k - швидкість узагальненої координати.

Кінетична енергія трактора визначається за формулою:

$$T = \sum_{i=1}^{10} T_{q_i} = 0,5(M_n + M_1 + M_2) \dot{X}^2 + 0,5M_n \dot{Z}^2 + 0,5M_1 \dot{\eta}_1^2 + 0,5M_2 \dot{\eta}_2^2 + 0,5J_\theta \dot{\theta}^2 + 0,5J_{\delta\delta} \dot{\varphi}_{\delta\delta}^2 + 0,5J_{cu} \dot{\varphi}_{cu}^2 + 0,5J_{kn} \dot{\varphi}_{kn}^2 + 0,5J_z \dot{\varphi}_z^2 + 0,5J_{k2} \dot{\varphi}_{k2}^2. \quad (2)$$

Потенційна енергія трактора визначається за формулою:

$$\Pi = \Pi_h + \Pi_{mp1} + \Pi_{mp2} + \Pi_{k2} + \Pi_n, \quad (3)$$



де P_h - потенційна енергія трактора при подоланні підйому (спуску), до складу якої входять X, α ;

P_{mp1}, P_{mp2} - потенційна енергія на першій і другій ділянці трансмісії трактора, до складу яких входять C_{mp1}, C_{mp2}, A_1 ;

$P_{\kappa 2}$ - потенційна енергія шин при закручуванні;

P_n - сумарна потенційна енергія мостів трактора, до складу яких входять C_{mp1}, C_{mp2}, A_1 .

До дисипативної функції Φ динамічної моделі руху трактора віднесемо енергію, пов'язану з силами демпфування. В якості коефіцієнтів дисипації пружних ділянок трансмісії і мостів візьмемо відповідні коефіцієнти демпфування $K_{mp1}, K_{mp2}, K_{n1}, K_{n2}$. Тоді дисипативна функція набуде вигляду:

$$\Phi = \Phi_{mp1} + \Phi_{mp2} + \Phi_{n1} + \Phi_{n2}. \quad (4)$$

Кінетична енергія трактора не залежить від узагальнених координат. Тому $\partial T / \partial q_{\kappa} = 0$. З урахуванням цього зауваження рівняння Лагранжа другого роду (1) за введеними узагальненими силами, значенням кінетичної (2) і потенційної (3) енергій і дисипативної функції (4) дозволяє записати системи диференціальних рівнянь, що описують різні режими руху трактора з урахуванням його вертикальних і поздовжньо-кутових коливань і динаміки трансмісії.

Математична модель процесу зрушення з місця трактора має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 0; \\ \ddot{Z} = 0; \\ \ddot{\theta} = 0; \\ \ddot{\eta}_1 = 0; \\ \ddot{\eta}_2 = 0; \\ J_{\partial \phi} \ddot{\phi}_{\partial \phi} + M_{\text{сц}} - M_{\partial \phi} = 0; \\ J_{\text{сц}} \ddot{\phi}_{\text{сц}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_{\text{сц}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi_{\text{сц}}} + M_{mp1} - M_{\text{сц}} = 0; \\ (J_{\kappa n} i_{\kappa}^2 + J_z) \ddot{\phi}_z + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_{\kappa n}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi_{\kappa n}} \right) i_{\kappa} + \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi_z} + M_{mp2} = 0; \\ \ddot{\phi}_{\kappa n} = \ddot{\phi}_z i_{\kappa}; \\ J_{\kappa 2} \ddot{\phi}_{\kappa 2} + \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_{\kappa 2}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi_{\kappa 2}} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де i_{κ} – передаточне відношення ввімкненої передачі.

Системою диференціальних рівнянь (5) описується невеликий проміжок часу руху: трактор стоїть, так як буксує муфта зчеплення і крутний момент, що підводиться до ведучих коліс, менший за момент опору руху:

$$M_{\text{сноп}} = (P_{f1} + P_{f2} + P_w + M_m g \sin \alpha) r_{\kappa 2}, \quad (6)$$

де M_m – маса трактора;

g – прискорення вільного падіння;

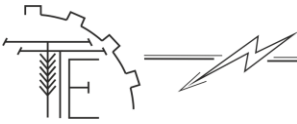
$r_{\kappa 2}$ – радіус заднього колеса.

Отже, система диференціальних рівнянь (5) справедлива, поки виконується нерівність

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_{\kappa 2}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \phi_{\kappa 2}} \leq M_{\text{он}}, \quad (7)$$

де $\phi_{\kappa 2}$ - частота обертання заднього колеса.

В іншому випадку починається розгін трактора з буксуючою муфтою зчеплення. Відповідна система рівнянь складатиметься з п'яти останніх рівнянь системи (5) і п'яти диференціальних рівнянь, що описують узагальнені координати $X, Z, \theta, \eta_1, \eta_2$:



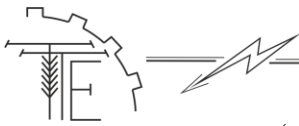
$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_m \ddot{X} + \frac{\partial \Pi}{\partial X} + P_{f1} + P_{f2} + P_w - P_k = 0; \\
 M_n \ddot{Z} + \frac{\partial \Pi}{\partial Z} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \text{sign}(\dot{Z} + L_1 \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\eta}_1) P_{n1} + \text{sign}(\dot{Z} - L_2 \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\eta}_2) P_{n2} = 0; \\
 J_\theta \ddot{\theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \text{sign}(\dot{Z} + L_1 \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\eta}_1) P_{n1} L_1 + \text{sign}(\dot{Z} - L_2 \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\eta}_2) P_{n2} L_2 = 0; \\
 M_1 \ddot{\eta}_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} = 0; \\
 M_2 \ddot{\eta}_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2} = 0; \\
 J_{\text{об}} \ddot{\varphi}_{\text{об}} + M_{\text{сц}} - M_{\text{об}} = 0; \\
 J_{\text{сц}} \ddot{\varphi}_{\text{сц}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{\text{сц}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\text{сц}}} + M_{\text{мп1}} - M_{\text{сц}} = 0; \\
 (J_{\text{кн}} i_k^2 + J_z) \ddot{\varphi}_z + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{\text{кн}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\text{кн}}} \right) i_k + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_z} + M_{\text{мп2}} = 0; \\
 \ddot{\varphi}_{\text{кн}} = \ddot{\varphi}_z i_k; \\
 J_{\text{к2}} \ddot{\varphi}_{\text{к2}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{\text{к2}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\text{к2}}} = 0.
 \end{array} \right. \quad (8)$$

Система диференціальних рівнянь (8) справедлива до моменту вирівнювання частот обертання ведучих і ведених деталей муфти зчеплення, що відповідає виконанню рівності $\varphi_{\text{об}} = \varphi_{\text{сц}}$. Далі починається наступний режим руху із заблокованою муфтою зчеплення. Відповідна система диференціальних рівнянь включає п'ять перших рівнянь системи (8), три останніх рівняння системи (5) і два рівняння, що описують положення узагальнених координат $\varphi_{\text{об}}$ та $\varphi_{\text{сц}}$ в цьому режимі руху:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \ddot{X} = 0; \\
 \ddot{Z} = 0; \\
 \ddot{\theta} = 0; \\
 \ddot{\eta}_1 = 0; \\
 \ddot{\eta}_2 = 0; \\
 (J_{\text{об}} + J_{\text{сц}}) \ddot{\varphi}_{\text{об}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{\text{сц}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\text{сц}}} + M_{\text{мп1}} - M_{\text{об}} = 0; \\
 \ddot{\varphi}_{\text{сц}} = \ddot{\varphi}_{\text{об}}; \\
 (J_{\text{кн}} i_k^2 + J_z) \ddot{\varphi}_z + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{\text{кн}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\text{кн}}} \right) i_k + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_z} + M_{\text{мп2}} = 0; \\
 \ddot{\varphi}_{\text{кн}} = \ddot{\varphi}_z i_k; \\
 J_{\text{к2}} \ddot{\varphi}_{\text{к2}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{\text{к2}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{\text{к2}}} = 0.
 \end{array} \right. \quad (9)$$

Для опису висот нерівностей дороги під передніми і задніми колесами трактора h_1 та h_2 (мікропрофілю дорожнього покриття) застосовують ряд функцій, які досить точно описують різні типи дорожніх покриттів [1, 2]. Найбільш поширеними функціями є: математичне очікування і середнє значення ординат мікропрофілю, дисперсія або середнє квадратичне відхилення ординат, кореляційна функція, що характеризує взаємозв'язок різних реалізацій функцій мікропрофілю по довжині дорожньої ділянки, і спектральна щільність мікропрофілю дороги. Якщо є m реалізацій ординат мікропрофілю (залежностей ординат по довжині L дорожньої ділянки $r(L)$) вибраного типу дорожнього покриття, то в якості висоти нерівності, наприклад h_1 , беруть середнє значення ординат:

$$h_1(L) = \sum_{i=1}^m r_i(L) / m.$$



Відповідно $h_2(L) = h_1(L - L_1 - L_2)$.

Висновок

Розроблена математична модель вертикальних і поздовжньо-кутових коливань системи «двигун - трансмісія - колеса - міст - підресорена маса» є інваріантом стосовно різним двохосьовим транспортним засобам і може використовуватися в якості базової при дослідженні взаємопов'язаних коливань мостів і трансмісії, впливу різних конструктивних параметрів і характеристик на експлуатаційні властивості машин, а також при аналізі динамічних процесів, що відбуваються в машинних агрегатах.

Список літератури

1. Гуськов В.В. Тракторы: Теория. Учебник для студентов вузов по спец. «Автомобили и тракторы» / В.В. Гуськов, Н.Н. Велев, Ю.Е. Атаманов и др.; Под общ. ред. В.В. Гуськова. — М.: Машиностроение, 1988. — 376 с.
2. Скотников В.А. Основы теории и расчета трактора и автомобиля / В.А. Скотников, А.А. Мащенский, А.С. Солонский. Под ред. В.А. Скотникова. — М.: Агропромиздат, 1986. — 383 с.

References

1. Gus'kov V.V. Traktory: Teoriya. Uchebnik dlya studentov vuzov po spets. «Avtomobili i traktory» / V. V. Gus'kov, N.N. Velev, YU.Ye. Atamanov i dr.; Pod obshch. red. V.V. Gus'kova. - M.: Mashinostroyeniye, 1988. - 376 s.
2. Skotnikov V.A. Osnovy teorii i rascheta traktora i avtomobilya / V.A. Skotnikov, A.A. Mashchenskiy, A.S. Solonskiy. Pod red. V.A. Skotnikova. - M.: Agropromizdat, 1986. - 383 s.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕРТИКАЛЬНЫХ И ПРОДОЛЬНО-УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ «ДВИГАТЕЛЬ - ТРАНСМИССИЯ – КОЛЕСА – МОСТ – ПОДРЕССОРЕННАЯ МАССА» ТРАКТОРА

Аннотация: в данной статье предлагается рассмотреть математическую модель вертикальных и продольно-угловых колебаний системы «двигатель - трансмиссия – колеса – мост – поддресоренная масса» трактора. Представлено динамическую модель движения трактора и её параметры.

Ключевые слова: колебания, двигатель, трансмиссия, колеса, мост, поддресоренная масса, трактор.

MATHEMATICAL MODEL OF VERTICAL AND LONGITUDINAL ANGULAR FLUCTUATIONS OF THE "ENGINE - TRANSMISSION - WHEEL - AXLE - SPRUNG MASS" OF TRACTOR

Summary: in this article we are invited to consider a mathematical model of the vertical and longitudinal angular fluctuations of the "engine - transmission - wheel - axle - sprung mass" of tractor. The dynamic model of the tractor and its parameters are presented.

Keywords: vibrations, engine, transmission, wheel, axle, sprung mass, tractor.