



## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ: СЕРЕДОВИЩЕ – ПРУЖНИЙ ШНЕК ЕКСТРУДЕРА

*Кондратюк Дмитро Гнатович к.т.н., доцент*  
*Дмитренко Віктор Петорович аспірант*  
*Волошиненко Володимир Михайлович студент*  
*Вінницький національний аграрний університет*  
**Kondratyuk, D.**  
**Dmitrenko V.**  
**Voloshynenko V.**  
*Vinnytsia National Agrarian University*

**Анотація:** розроблена математична модель динаміки середовище – пружний шнек екструдера та запропоновано конструкція робочого органу. Приведена методика розрахунку частоти власних коливань середовище-пружний шнековий робочий орган.

**Ключові слова:** екструдер, шнек, аналітичний метод, суміш, однорідність.

### **Метою дослідження**

Метою роботи є розробка математичної моделі динаміки середовище – пружний шнековий робочий орган екструдера, яка враховує частоти власних коливань системи в залежності від кінематичних та інших параметрів.

### **Постановка проблеми**

Прогресивним напрямом виробництва кормів для тваринництва є екструдювання кормових сумішей, в результаті якого відбувається перетворення високомолекулярних з'єднань в більш прості, які ліпше засвоюються тваринами. Якість продукту, який отримують в результаті екструдювання в значній мірі залежить від динаміки взаємодії шнека екструдера з кормовою сумішшю.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Динаміка середовища в тілі шнекової машини значною мірою визначає якість кінцевого продукту, мова йде про щільність екструдюваного корму, його однорідність структури і т.д. Тому важливою задачею, яка передує процесу формування середовища у брикети є його динаміка у шнеку. Задачі про переміщення середовищ вздовж різних поверхонь розглядалися на базі багатьох гіпотез: від руху системи матеріальних точок вздовж поверхні (Г. Лінднер [1, 4-5]) до суцільного середовища [6-9] нульової (аналог рідини) чи скінченної жорсткості (аналог пружного тіла).

Підхід дослідження динамічних процесів у середовищі побудований на базі системи матеріальних точок не знайшов належного розвитку, через те що потребує аналізу великої кількості диференціальних рівнянь руху (як правило нелінійних), а вибір гіпотез взаємодії між окремими точками системи не завжди піддається узагальненню через індивідуальні властивості середовищ. В основу другого підходу (суцільне середовище) [6-9] покладені його інтегральні показники. Такий розгляд сипкого середовища дозволив побудувати математичні моделі динаміки сипкого середовища (нашарування плоских балок). Однак, під час процесу переміщення середовища вздовж модернізованого шнекового гвинта мають місце процеси, які відрізняються від наведених вище.

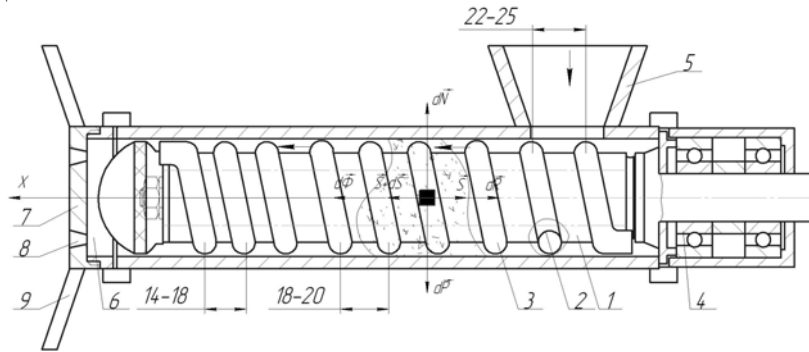
### **Викладення основного матеріалу**

Для описання динаміки досліджуваної системи можна використати загальні принципи побудови математичних моделей динаміки механічних систем [2-3]. Відповідно до них розглянемо динамічну рівновагу умовно виділеного елемента системи середовище – пружне тіло. Його активні, пасивні та сила інерції вказані на рис. 1.

Приймаючи до уваги, що у запропонованій моделі системи відсутня депланація нормальних плоских перерізів пружного тіла, для однозначного визначення переміщення довільного його перерізу достатньо знати переміщення центру цього перерізу. Таким чином, за розрахункову модель слід прийняти одновимірне пружне тіло, вздовж котрого рухається суцільне середовище. Для нього переміщення центру ваги перерізу із координатою  $X$  в довільний момент часу  $t$  однозначно визначається функцією  $u(x, t)$ . Сила інерції вказаного елемента, в такому разі, рівна  $dm \frac{d^2u}{dt^2}$ , де  $dm$  -



маса виділеного елемента. Вона рівна сумі мас суцільного середовища  $dm_1$  і пружного тіла  $dm_2$ , тобто  $dm = dm_1 + dm_2$ . В свою чергу  $dm_1 = \rho_1(x)dx$ ,  $dm_2 = \rho_2(x)dx$ , а  $\rho_1(x)$  та  $\rho_2(x)$  - погонні маси відповідно середовища та тіла.



**Рис. 1. Розрахункова схема середовище – пружний шнековий робочий орган екструдера:**  
**1- вал; 2- гвинтова канавка; 3- гвинтова пружина; 4- циліндричний корпус; 5-**  
**завантажувальним бункером; 6- зона вивантаження; 7- гайка; 8-калібруючі отвори; 9 -**  
**рукоятка;  $d\vec{P}$  - вага виділеного елемента;  $d\vec{N}$  - нормальна реакція;  $d\vec{R}$  - сила опору;  $d\vec{\Phi}$  - сила**  
**інерції відносного руху вказаного елемента середовища разом із гвинтовою спіраллю;  $\vec{S}$  –**  
**зусилля, яке діє на правий кінець виділеного елемента зі сторони відсіченої частини пружного**  
**гвинта;  $\vec{S} + d\vec{S}$  – зусилля, яке діє на лівий кінець виділеного елемента зі сторони відсіченої**  
**частини пружного гвинта**

Приймається, що пружні властивості розглядуваної моделі шнекового гвинта описуються квазілінійним законом пружності  $\sigma = E\varepsilon + \mu f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ , в якому  $\sigma$  - нормальне напруження у перерізі моделі системи,  $\varepsilon$  та  $\dot{\varepsilon}$  відповідно відносна деформація та її швидкість;  $\mu f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ - функція, яка вказує на відхилення пружних властивостей матеріалу моделі системи від лінійного закону;  $\mu$ - малий параметр, який вказує на мале відхилення вказаних властивостей від лінійного закону. В такому разі величини внутрішніх сил  $S$  та  $S + dS$  можна записати у вигляді

$$S = EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + A \mu f \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right), \quad (1)$$

$$S + dS = EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + A \mu f \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + A \mu f \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \right] dx \quad (2)$$

У наведених вище співвідношеннях враховано, що відносна деформація для одновимірної моделі тіла визначається залежністю  $\varepsilon = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ , а  $A$ - площа його поперечного перерізу. Якщо перейти від векторного співвідношення, що виражає рівняння кінетостатики для виділеного елемента до скалярного його вигляду, отримуємо

$$(\rho_1(x) + \rho_2(x)) \frac{d^2 u(x,t)}{dt^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + A \mu f \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \right] + R \left( \frac{du(x,t)}{dt} \right) = 0. \quad (3)$$

Проте, вздовж виділеного елемента пружного тіла рухається зі відносною швидкістю  $V$  суцільний потік середовища, то сила інерції суцільного середовища набуває значення

$$\rho_2(x) \frac{d^2 u(x,t)}{dt^2} = \rho_2(x) \left[ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} V + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} V^2 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{dV}{dt} \right] \quad (4)$$

Таким чином, диференціальне рівняння динаміки системи суцільне середовище – пружний шнековий гвинт, можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_1(x) + \rho_2(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + A \mu f \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \right] + R \left( \frac{du(x,t)}{dt} \right) - \rho_2(x) \left[ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} V + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} V^2 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{dV}{dt} \right] \right\} = 0 \quad (5)$$



Для покращення структури і однорідності суцільного середовища правий кінець пружного спірального шнекового гвинта піддається періодичним збуренням руху, точніше кажучи здійснює гармонічні коливання. Для того, щоб їх урахувати у математичній моделі процесу, необхідно записати крайові умови для рівняння (5). Періодичне переміщення, правого кінця можна записати за допомогою крайової умови

$$u(x, t)|_{x=0} = h \sin \theta, \quad \theta = \omega t + \varphi, \quad (6)$$

де  $h, \omega, \varphi$  - сталі. Подібним способом запишемо і крайову умову для лівого кінця виходячи із того, що він нерухомий

$$u(x, t)|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Отже, для дослідження впливу всього спектру геометричних, кінематичних та фізико-механічних чинників на процес переміщення середовища у горловині шнекової машини необхідно побудувати розв'язок рівняння, яке описує динаміку системи суцільне середовище – спіраль шнекового гвинта, тобто рівняння (5) за крайових умов (6), (7).

Отримати точний розв'язок рівняння (5) за крайових умов (6), (7) без додаткових обмежень щодо розподілу маси середовища вздовж шнеку, відносної складової швидкості руху його вздовж спіралі, сили опору, амплітуди гармонічного збурення і т.д. є на сьогоднішній день не розв'язаною задачею. Тому, накладемо на основні характеристики розглядуваної механічної системи деякі обмеження, які притаманні реально існуючим шнековим машинам, а саме:

- розподіл мас суцільного середовища та шнекової спіралі вздовж довжини шнеку є повільно змінними функціями лінійної змінної  $x$ , тобто  $\rho_1(x) = \rho_{10} + \mu \rho_{11}(x)$ ,  $\rho_2(x) = \rho_{20} + \mu \rho_{21}(x)$  ( $\rho_{11}(x)$ ,  $\rho_{12}(x)$  - відомі неперервні функції); - максимальне значення сили опору є величиною порядку  $\mu$  у порівнянні із максимальним значенням відновлювальної сили, тобто  $\max_{EA} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \gg$

$\max R \left( \frac{du(x, t)}{dt} \right)$ ; - амплітуда зовнішнього збурення правого кінця шнекової спіралі є малою величиною у порівнянні із амплітудою коливань самої шнекової спіралі із суцільним середовищем.

Наведене у сукупності дозволяє математичну модель динаміки суцільне середовище – шнековий гвинт представити у дещо спрощеній формі, а саме

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\rho_{20}}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} - \frac{(EA - \rho_{20})}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \mu f_1 \left( x, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} \right) \quad (8)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = \mu h_0 \sin \theta,$$

$$u(x, t)|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

де

$$f_1 \left( x, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} \right) = \frac{1}{\rho_{10} + \rho_{20}} \left\{ -\rho_{21}(x) \left[ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} - \frac{(EA - \rho_{20})}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] + \right. \\ \left. + A \frac{\partial}{\partial x} f \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \right) - R \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) - \rho_{21}(x) \left[ 2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} V + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} V^2 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{dV}{dt} \right] \right\}$$

Ліва частина наведеного диференціального рівняння є лінійною, до того ж зі сталими коефіцієнтами, а праві частини рівняння (8) та крайових умов (9) - пропорційні малому параметру, а це означає, що для побудови розв'язку вказаної задачі можна використати загальні ідеї наближених аналітичних методів - методів збурень [3].

Ефективність використання методів збурень залежить від можливості побудови розв'язку так званої "незбуреної" задачі, тобто задачі без урахування малих нелінійних сил. В нашому випадку – за умови рівномірного розподілу маси вздовж шнеку, лінійно пружних властивостей гвинтової спіралі.

Математичною моделлю руху такого спрощеного об'єкту дослідження є рівняння

$$\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} + \frac{2\rho_{20}}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x \partial t} - \frac{(EA - \rho_{20} V^2)}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

за крайових умов



$$\begin{aligned}u_0(x, t)|_{x=0} &= 0 \\ u_0(x, t)|_{x=l} &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Не дивлячись на це, що остання крайова задача є лінійною, для свого інтегрування вона не дозволяє застосувати методи Фур'є та Д'Аламбера [6].

Проте, розвиваючи для неї основну ідею роботи [8] покажемо, що динамічний процес лінійної моделі динаміки системи суцільне середовище - шнековий гвинт можна подати у вигляді

$$u_0(x, t) = a(\cos(Kx + \Omega t + \varphi) - \cos(Hx - \Omega t - \varphi)). \quad (12)$$

У останньому співвідношенні  $a$  та  $\varphi$  амплітуда та початкова фаза хвиль (сталі величини, адже система є консервативною), а  $K$ ,  $H$  - хвильові числа,  $\Omega$  - їх частота. Вказане подання розв'язку крайової задачі (10) (11) можна інтерпретувати як узагальнення основної ідеї методу Д'Аламбера на рівняння гіперболічного типу, які містять мішану похідну лінійної та часової змінних.

До речі, саме доданки  $\frac{2\rho_{20}}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x \partial t} V$  та  $\frac{\rho_{20} V^2}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2}$  ураховують у лінійній моделі рух суцільного середовища відносно гвинтової спіралі. Із диференціального рівняння (10) випливає, що хвильові числа зв'язані і частотою дисперсійними співвідношеннями

$$\begin{aligned}\Omega^2 + \frac{2\rho_{20}V}{\rho_{10} + \rho_{20}} \Omega K - \frac{EA - \rho_{20}V^2}{\rho_{10} + \rho_{20}} K^2 &= 0, \\ \Omega^2 - \frac{2\rho_{20}V}{\rho_{10} + \rho_{20}} \Omega H - \frac{EA - \rho_{20}V^2}{\rho_{10} + \rho_{20}} H^2 &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Із крайових умов (11) отримуємо зв'язок між хвильовими числами

$$K + H = \frac{2k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Система алгебраїчних рівнянь (13) (14) визначає основні параметри динамічного процесу лінійної моделі системи суцільне середовище - пружний шнековий гвинт

$$\begin{aligned}H_k &= \frac{k\pi}{l} (1 + \rho_{20}V) \sqrt{\frac{1}{(\rho_{10} + \rho_{20})(AE - 2\rho_{20}V^2) + \rho_{20}^2V^2}}, \\ H_k &= \frac{k\pi}{l} (1 - \rho_{20}V) \sqrt{\frac{1}{(\rho_{10} + \rho_{20})(AE - 2\rho_{20}V^2) + \rho_{20}^2V^2}}, \\ \Omega_k &= \frac{k\pi}{l} (AE - 2\rho_{20}V^2) \sqrt{\frac{1}{(\rho_{10} + \rho_{20})(AE - 2\rho_{20}V^2) + \rho_{20}^2V^2}}.\end{aligned}\quad (15)$$

Окремим їх випадком при  $\rho_{10} = 0$  є основні параметри коливань суцільного пружного тіла, яке переміщається вздовж осі  $OX$  зі сталою швидкістю  $V$ , а при  $V = 0$  - пружного тіла із закріпленими кінцями.

Із лінійності розглянутої вище крайової задачі випливає, що загальний розв'язок рівняння (10) за крайових умов (11) можна подати у вигляді лінійної комбінації одно частотних, тобто

$$u_0(x, t) = \sum_{k=1} a_k (\cos(K_k x + \Omega_k t + \varphi_{0k}) - \cos(H_k x - \Omega_k t - \varphi_{0k})), \quad (16)$$

де  $a_k$  і  $\varphi_{0k}$  сталі, які знаходяться із початкових умов.

### Висновки

Отримані теоретичні результати показують, що власна частота коливань системи середовище пружний шнековий гвинт є меншою:

- для більших швидкостей відносного руху середовища та більших значень погонних мас середовища та пружного гвинта;
- зростання швидкості відносного руху середовища до 2 м/с спричиняє зменшення власної частоти коливань системи, а зростання довжини шнеку від 0,5 м до 0,75 м призводить до зменшення частоти коливань на 26 %.

Отримані вище співвідношення є одночасно базою для визначення впливу нелінійних сил та періодичного збурення на нелінійні коливання досліджуваного об'єкту.

**Список літератури**

1. Василенко П. М. Теория движения частицы по шероховатой поверхности с/х машин / П. М. Василенко // Киев., изд. Акад с/х наук УССР. – 1960. – 283 с.
2. Андронов А. А. Теория колебаний / Андронов А. А., Витт А. П., Хайкин С. Э. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний / Бабаков И. М. – М.: Наука, 1965. – 560 с.
4. Блехман И. И. Вибрационное перемещение. / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе // М., Наука. – 1964. – 410 с.
5. Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е. Динамика частиц при воздействии вибрации / Р. Ф. Ганиев, Л. Е. Украинский // Киев, Наукова думка. – 1975. – 168 с.
6. Стоцько З. А. Вплив конструкційних і кінематичних параметрів вібромашин на підвищення інтенсивності об'ємної обробки / Стоцько З. А., Сокіл Б. І., Топільницький В. Г. // Всеукраїнський науково – технічний журнал Вібрації в техніці та технологіях. – №4(25). – 2002. – с. 46 – 52.
7. Стоцько З. А. Нелінійна модель руху шару середовища робочого контейнера вібраційної машини об'ємної обробки виробів зі змінним параметром не лінійності / Стоцько З. А., Сокіл Б. І., Топільницький В. Г. // Машинознавство. – 2001. – №1. – с. 19 – 23.
8. Субач А. П. Динамика процессов и машин объемной вибрационной и центробежной обработки насыпных деталей – Рига Знание. – 1991. – 400 с.
9. Субач А. П. Вынужденные колебания виброударной системы при неупругом соударении масс / А. П. Субач // Вопр. динам. и прочности. Рига. Зинатне. – 1969. – вып. 18. – с. 67 – 78.

**References**

1. Vasilenko P. M. Teorija dvizhenija chasticy po sherohovatoj poverhnosti s/h mashin / P. M. Vasilenko // Kiev., izd. Akad s/h nauk USSR. – 1960. – 283 s.
2. Andronov A. A. Teorija kolebanij / Andronov A. A., Vitt A. P., Hajkin S. Je. – М.: Nauka, 1981. – 568 s.
3. Babakov I. M. Teorija kolebanij / Babakov I. M. – М.: Nauka, 1965. – 560 s.
4. Blehman I. I. Vibracionnoe peremeshhenie. / I.I. Blehman, G.Ju. Dzhanelidze // М., Nauka. – 1964. – 410 s.
5. Ganiev R. F., Ukrainskij L. E. Dinamika chastic pri vozdejstvii vibracii / R. F. Ganiev, L. E. Ukrainskij // Kiev, Naukova dumka. – 1975. – 168 s.
6. Stoc'ko Z. A. Vpliv konstrukcijnih i kinematičnih parametriv vibromashin na pidvishhennja intensivnosti obemnoj obrobki / Stoc'ko Z. A., Sokil B. I., Topil'nic'kij V. G. // Vseukraїns'kij naukovo – tehničnij zhurnal Vibracii v tehnici ta tehnologijah. – №4(25). – 2002. – s. 46 – 52.
7. Stoc'ko Z. A. Nelinijna model' ruhu шарu seredovishha robochogo kontejnera vibracijnoї mashini ob'emnoj obrobki virobiv zi zminnim parametrom ne linijnosti / Stoc'ko Z. A., Sokil B. I., Topil'nic'kij V. G. // Mashinoznavstvo. – 2001. – №1. – s. 19 – 23.
8. Subach A. P. Dinamika processov i mashin ob'emnoj vibracionnoj i centrobeznoj obrabotki nasypnyh detalej – Riga Znanie. – 1991. – 400 s.
9. Subach A. P. Vynuzhdenye kolebanija vibroudarnoj sistemy pri neuprugom soudarenii mass / A. P. Subach // Vopr. dinam. i prochnosti. Riga. Zinatne. – 1969. – vip. 18. – s. 67 – 78.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СРЕДА – УПРУГИЙ ШНЕК  
ЭКСТРУДЕРА**

**Аннотация:** разработана математическая модель динамики среда – упругий шнек экструдера и предложена конструкция рабочего органа. Приведена методика расчета частоты собственных колебаний среда-упругий шнековый рабочий орган.

**Ключевые слова:** экструдер, шнек, аналитический метод, смесь, однородность.

**THE MATHEMATICAL MODEL FOR DYNAMICS OF ENVIRONMENT - FLEXIBLE  
AUGER IN EXTRUDER**

**Summary:** the mathematical model of the environment - flexible auger extruder is design and working element is proposed. The method of calculating the frequency of natural oscillations of environment- flexible auger is present.

**Keywords:** extruder, auger, analytical method, mix, homogeneity.