№ 2 (97)
2017
Техніка, енергетика, транспорт АПК

УДК 519.87:664.143.3

ВИЗНАЧЕННЯ ОБ'ЄМНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИКОНАВЧОГО ОРГАНА ТЕХНОЛОГІЧНОГО ОБЛАДНАННЯ МЕТОДОМ ВИКОРИСТАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТ

Дубчак Віктор Миколайович *к.т.н., доцент*
Новицька Людмила Іванівна *к.п.н., доцент*
Вінницький національний аграрний університет
Dubchak V.
Novitska L.
Vinnytsia National Agrarian University

Анотація: *в роботі приведені та досліджені обчислення об'ємів виконавчих органів у вигляді геометричних фігур як конус, куля та циліндр з використанням криволінійних координат, в тому числі циліндричних і сферичних. Порівняльна методика обчислень конкретної математичної характеристики, а саме об'єму, підтверджує ефективність застосування циліндричних координат у випадку відокремлення однієї із незалежних змінних, і сферичних координат, якщо всі змінні, що описують поверхню, рівноправні.*

Ключові слова: *декартові координати, криволінійні (циліндричні та сферичні) координати, обчислення об'ємів геометричних фігур в криволінійних координатах, виконавчий орган машини, змішування.*

Вступ

Відомо [1,2],що змішувачі класифікують за такими кількома головними ознаками:

- за характером протікання процесу змішування;
- за способом змішування;
- за призначенням;
- за розміщенням робочого органа;
- за типом робочого органа.

Можливість ефективного обчислення об'єму є однією з головних характеристик виконавчого органа. Ефективне обчислення такої ознаки для стандартних геометричних просторових фігур,таких як циліндр,конус,куля, є актуальною задачею,особливо з використанням математичного апарату криволінійних координат.

Як відомо [3 - 6], одним із головних застосувань потрійного інтеграла у вищій математиці є можливість знаходження числового значення об'єму деякої замкненої області простору R^3. Область інтегрування обмежується однією або декількома поверхнями в тривимірному просторі, тобто

$$V = \iiint\limits_{D} 1dxdydz,$$

тут D – замкнена область в R^3, об'єм якої знаходиться.

Якщо дану область D обмежують поверхні першого порядку, то раціонально проводити обчислення даного потрійного інтеграла в декартових координатах. Але якщо область D обмежують одна чи декілька поверхонь вищих порядків, в першу чергу, поверхні другого порядку, то є доцільним в обчисленнях перейти до застосування криволінійних, а саме, циліндричних чи сферичних координат. Зокрема, в тих випадках, коли в рівняннях поверхонь всі три змінні рівноцінні, то ефективніше застосовувати сферичні координати:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\cos\varphi\sin\psi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Яскравим прикладом таких поверхонь є куля чи еліпсоїд.

Якщо в рівнянні поверхні, яка обмежує область D, одна із змінних відокремлена, тоді доцільно застосовувати циліндричні координати:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Прикладом таких поверхонь є циліндр, конус, тощо.

В сферичних координатах об'єм області D обчислюється за формулою

$$V = \iiint_D r^2 \cos\varphi dr d\varphi d\psi,$$

де значення $r^2 \cos\varphi$ є визначником-якобіаном переходу від декартових координат $(x,\ y,\ z)$ до сферичних $(r,\ \varphi,\ \psi)$ [7, 8]. Даний визначник переходу від декартових координат $(x,\ y,\ z)$ до циліндричних $(r,\ \varphi, z)$ чи сферичних $(r,\ \varphi,\ \psi)$ відповідно буде визначатись наступним чином:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\left(\left[\cos^2\psi(-\sin\varphi\cos\varphi) - \sin^2\psi(\sin\varphi\cos\varphi)\right]\sin\varphi - \left[\cos^2\psi\cos^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\psi\right]\cos\varphi\right) =$$

$$= r^2\left(-\sin^2\varphi\cos\varphi - \cos^2\varphi\cos\varphi\right) = -r^2\cos\varphi.$$

Модуль останнього значення дорівнює $r^2 \cos\varphi$.

В циліндричних координатах об'єм області D визначається як

$$V = \iiint_D r dr d\varphi dz,$$

де r – значення визначника-якобіана переходу від декартових координат $(x,\ y,\ z)$ до циліндричних $(r,\ \varphi, z)$.

Постановка задачі

В даній роботі ставимо за мету порівняти альтернативне використання криволінійних координат при знаходженні об'ємів згаданих поверхонь другого порядку. Наприклад, для знаходження об'єму конуса застосуємо сферичні координати, а для об'єму кулі – циліндричні координати.

Результати досліджень

Нехай задано конус (рис.1), для якого R – радіус основи кола, H – його висота. Рівняння такої поверхні, очевидно, визначається як $z = H$. Тоді кут $\alpha = arctg\frac{H}{R}$, і сферична координата $\varphi \in \left[arctg\frac{H}{R},\ \frac{\pi}{2}\right]$. З рівняння $z = H$ маємо $H = r\sin\varphi$, звідки $r = \frac{H}{\sin\varphi}$, при цьому $\psi \in [0;\ 2\pi]$.

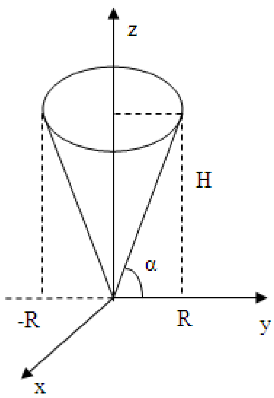

Рис. 1. Конус, R – радіус основи, H – висота, α – кут між твірною конуса та радіусом основи

Таким чином, $V=\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_{arctg\frac{H}{R}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\int\limits_0^{\frac{H}{\sin\varphi}}r^2dr=\psi\Big|_0^{2\pi}\cdot\int\limits_{arctg\frac{H}{R}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{\frac{H}{\sin\varphi}}d\varphi=$

$$=\frac{2\pi}{3}\int\limits_{arctg\frac{H}{R}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{H^3}{\sin^3\varphi}\cos\varphi d\varphi=\frac{2\pi H^3}{3}\left(-\frac{1}{2\sin^2\varphi}\Big|_{arctg\frac{H}{R}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{3}\pi H^3\left(\frac{1}{\sin^2 arctg\frac{H}{R}}-1\right).$$

Окремо знайдемо $\sin^2\left(arctg\frac{H}{R}\right)=\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=1-\frac{1}{1+tg^2\alpha}=$

$$=1-\frac{1}{1+\left(tg\left(arctg\frac{H}{R}\right)\right)^2}=1-\frac{1}{1+\frac{H^2}{R^2}}=\frac{H^2}{R^2+H^2}.$$

Тому об'єм конуса дорівнює:

$$V=\frac{1}{3}\pi H^3\left(\frac{R^2+H^2}{H^2}-1\right)=\frac{1}{3}\pi H^3\frac{R^2}{H^2}=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H.$$

В циліндричних координатах дана відповідь знаходиться таким чином:

$$V=\iiint\limits_D rdrd\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^H dz\int\limits_0^{\frac{zR}{H}}rdr=\frac{1}{3}\pi R^2H,$$

(тут при визначенні границь по змінній r враховано, що в циліндричних координатах рівняння конуса буде мати вигляд $r^2=\frac{z^2R^2}{H^2}$, звідки $r=\frac{zR}{H}$ $(r\ge 0)$.

Тепер спробуємо знайти об'єм кулі (рис.2)

$x^2+y^2+z^2=R^2$ в циліндричних координатах, в яких маємо $r^2+z^2=R^2$ $(r\ge 0)$.

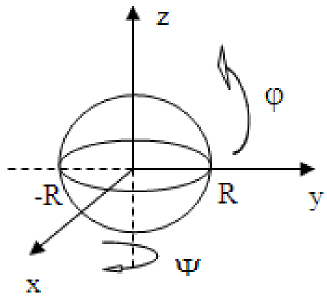

Рис. 2. Куля, R- радіус

Тому $V=\int\limits_{-R}^{R}dz\int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}}rdr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\cdot 2\pi\cdot\int\limits_0^R\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\sqrt{R^2-z^2}}dz=2\pi\int\limits_0^R\left(R^2-z^2\right)dz=2\pi\left(R^2z-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.$

Цей результат в сферичних координатах досягається значно простіше:

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^R r^2\cos\varphi dr=\psi\Big|_0^{2\pi}\cdot\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Зупинимось на підходах обчислення об'єму циліндра (рис.3) в різних координатах, коли використання циліндричних координат є настільки логічним як застосування декартових координат при знаходженні об'єму прямого паралелепіпеда.

В циліндричних координатах маємо:

$$x^2+y^2=R^2,\quad z=H\quad(z\ge 0)$$

$$V_ц=\iiint\limits_D rdrd\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R rdr\int\limits_0^H dz=\pi R^2H.$$

Перевагою застосування циліндричних координат є те, що всі межі трьох повторних інтегралів є константами, що, безумовно, спрощує обчислення.

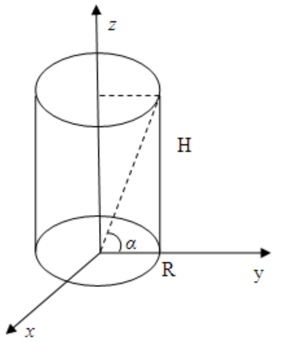

Рис. 3. Циліндр, R – радіус основи, H – висота

Порівняємо знаходження цієї ж відповіді в сферичних координатах. Маємо $V_ц = V_1 + V_2$. Значення об'єму V_2 вже знаходилось в сферичних координатах при обчисленні об'єму конуса (в даному випадку він вписаний в циліндр). Для знаходження об'єму V_1, враховуючи, що $\alpha = arctg\frac{H}{R}$, отримаємо:

$$x^2 + y^2 = R^2 \;\Rightarrow\; r^2\cos^2\varphi = R^2 \;\Rightarrow\; r = \frac{R}{\cos\varphi},\ (r \ge 0).$$

$$V_1 = \int_0^{arctg\frac{H}{R}} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\cos\varphi}} r^2\cos\varphi dr \int_0^{2\pi} d\psi = \psi\Big|_0^{2\pi} \int_0^{arctg\frac{H}{R}} \cos\varphi \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{R}{\cos\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{arctg\frac{H}{R}} \cos\varphi \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{R}{\cos\varphi}} d\varphi = \frac{2}{3}\pi \int_0^{arctg\frac{H}{R}} R^3\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi = \frac{2}{3}\pi R^3 tg\varphi\Big|_0^{arctg\frac{H}{R}} = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Оскільки $V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, то $V_ц = V_1 + V_2 = \pi R^2 H.$

І, нарешті, в даній роботі згадаємо поняття та застосування узагальнених циліндричних $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ і сферичних координат $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\cos\psi \\ y = b\rho\cos\varphi\sin\psi \\ z = c\rho\sin\varphi \end{cases}$, де $0 \le \rho \le 1$, значення визначника-якобіана таких перетворень відповідно дорівнює для циліндричних координат $ab\rho$, а для сферичних – $abc\rho^2\cos\varphi.$

Наприклад, об'єм еліптичного циліндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0,\ z = H$ в узагальнених циліндричних координатах знаходиться як

$$V = \iiint_D ab\rho d\rho d\varphi dz = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^H dz = \pi abH.$$

Наслідок 1. Якщо $a = b = R,$ маємо формулу обчислення об'єму кругового циліндра [7, 8].

Об'єм еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ знаходимо застосуванням узагальнених сферичних координат: $V = \iiint_D abc\rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi dz = abc\int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{4}{3}\pi abc.$

Наслідок 2. Якщо $a = b = c = R,$ маємо формулу обчислення об'єму кулі [7, 8].

Висновок

Переваги у виборі криволінійних координат відносяться в тому числі при обчисленні довільного потрійного інтеграла функції трьох змінних $\iiint_D f(x,\ y,\ z)dxdydz,$ якщо об'єм V обмежують поверхні другого порядку.

Порівняння методик обчислення потрійних інтегралів на прикладі знаходження об'ємів відомих геометричних фігур доводить значну ефективність і доцільність використання в одних випадках сферичних координат (обмеження області D поверхнею кулі, еліпсоїда), в інших випадках –

циліндричних координат, коли спостерігається відокремлення однієї змінної (конус, циліндр, тощо). В обох випадках обчислення потрійних інтегралів в декартових координатах не є раціональним.

Список літератури

1. Белянчиков Н.Н.,Смирнов А.И. Механизация животноводства и кормоприготовления [Текст] / Н.Н.Белянчиков,А.И.Смирнов,- М.; Агропромиздат,1990. -432 с.

2. Кулаковский И.В.,Кирпичников Р.С.,Резник Е.И. Машины и оборудование для приготовления кормов. Справочник [Текст] /И.В.Кулаковский, Р.С.Кирпичников,Е.И.Резник, -М.;Росагропромиздат,1987.-285 с.

3. Смирнов В.И. Курс высшей математики [Текст] /В.И.Смирнов, Т.2.:Изд-во «Наука».1974. – 479 с.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика [Текст] / Я.С. Бугров, С.М.Никольский. Учеб.пос. для вузов. Т.3. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.

5. Гельфанд І.М. Метод координат [Текст]/ І.М. Гельфанд, Є.Г. Глаголєва, А.А. Кирилов. Видання п'яте, стереотипне. Серія: Бібліотечка фізико-математичної школи. Математика. Вип.1. М.: Наука, 1973.

6. Бернант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов [Текст] /А.Ф. Бернант, И.Г. Аранович. – 9-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 800 с.

7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.:ОНИКС; М.:Мир и образование, 2005. – 416 с.:ил.

8. Ильин В.А. Математический анализ [Текст] /В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х.Сендов; под ред. А.Н. Тихонова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.:ТК Велби; М.: Проспект, 2004. – 368 с.

References

1. Belyanchikova N.N., Smirnov A.I. Mekhanizatsiya zhivotnovodstva i kormoprigotovleniya [Tekst] / N.N.Belyanchikov, A.I.Smirnov, - M .; Agropromizdat, 1990. -432 s.

2. Kulakovskiy I.V., Kirpichnikov R.S., Reznik Ye.I. Mashiny i oborudovaniye dlya prigotovleniya kormov. Spravochnik [Tekst] /I.V.Kulakovskiy, R.S.Kirpichnikov, Ye.I.Reznik, -M.; Rosagropromizdat, 1987.-285 s.

3. Smirnov V.I. Kurs vysshey matematiki [Tekst] /V.I.Smirnov, T.2.: Izd-vo «Nauka» .1974. - 479 s.

4. Bugrov YA.S., Nikol'skiy S.M. Vysshaya matematika [Tekst] / YA.S. Bugrov, S.M.Nikol'skiy. Ucheb.pos. dlya vuzov. T.3. - M .: Drofa, 2004. - 512 s.

5. Gel'fand I.M. Metod koordinat [Tekst] / I.N. Gel'fand, Ye. Glagoleva, A.A. Kirillov. Izdaniye pyatoye, stereotipnoye. Seriya: Bibliotechka fiziko-matematicheskoy shkoly. Matematika. Vyp.1. M .: Nauka, 1973.

6. Bernant A.F. Kratkiy kurs matematicheskogo analiza dlya vtuzov [Tekst] /A.F. Bernant, I.G. Aranovich. - devyatyy izd. - M .: Fizmatlit, 2003. - 800 s.

7. Danko P.Ye. Vysshaya matematika v uprazhneniyakh i zadachakh [Tekst] /P.Ye. Danko, A. Popov, T.YA. Kozhevnikova. - shestoy izd. - M.: ONIKS; M.: Mir i obrazovaniye, 2005. - 416 s.: Il.

8. Il'in V.A. Matematicheskiy analiz [Tekst] V.A.. Il'in, V.A. Sadovnichiy, Bl.KH.Sendov; pod red. A.N. Tikhonova. - vtoroy izd., Pererab. i dop. - M.: TK Velbi; M .: Prospekt, 2004. - 368 s.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО ОРГАНА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

Аннотация: *в работе приведены и исследованы вычисления объемов исполнительных органов в виде геометрических фигур как конус, шар и цилиндр с использованием криволинейных координат, в том числе цилиндрических и сферических. Сравнительная методика вычислений конкретной математической характеристики, а именно объема, подтверждает эффективность применения цилиндрических координат в случае отделения одной из независимых переменных, и сферических координат, если все переменные, описывающие поверхность, равноправны.*

Ключевые слова: *декартовы координаты, криволинейные (цилиндрические и сферические) координаты, вычисление объемов геометрических фигур в криволинейных координатах, исполнительный орган машины, смешивания.*

DEFINING CHARACTERISTICS SURROUND EXECUTIVE BODY TECHNOLOGICAL EQUIPMENT BY USING CURVILINEAR COORDINATES

Summari: *we investigated and brought calculating the volume of the executive bodies in the form of geometric shapes as a cone, sphere and cylinder using curvilinear coordinates, including cylindrical and spherical. Comparative calculation methods specific mathematical characteristics, such as volume, confirming the efficacy of cylindrical coordinates in case of separation of one of the independent variables and spherical coordinates, if all the variables that describe the surface equal.*

Keywords: *cartesian coordinates, curved (cylindrical and spherical) coordinates, calculating the volume of geometric figures in curvilinear coordinates, the executive body of the machine, mixing.*