



УДК 664.83.002.5

**ВЫВОД ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЫВНОЙ СКОРОСТИ  
ПОТОКАВОДЫ В МОЕЧНЫХ МАШИНАХ ДЛЯ КОРНЕПЛОДОВ**

*Гладушняк Александр Карпович д.т.н., профессор  
Всеволодов Александр Николаевич к.т.н., доцент  
Одесская Национальная академия пищевых технологий  
Gladushnyak O.  
Vsevolodov O.  
Odessa national academy of edible technologies*

**Аннотация:** в статье изложено предположение о том, что размывная скорость потока жидкости зависит от усилия отрыва почвенного загрязнения от поверхности растительного сырья и плотности загрязнения. Рассмотрен вопрос о выводе зависимости для определения размывающей скорости потока жидкости, которая омывает растительное сырье в моечных машинах. В результате математических преобразований получено выражение, представляющее собой правило выбора размывной скорости потока жидкости. Используя полученное выражение можно выйти, во-первых на рекомендации для гидродинамического режима в моечной машине, во-вторых, полученное выражение свидетельствует о необходимости определения адгезионно-когезионных характеристик грунтовых загрязнений.

**Ключевые слова:** текучесть, плотность, усилие отрыва, адгезия, когезия, предел, размывная скорость, гидродинамический режим.

Теория Мора [1,2,3] утверждает, что линия предела текучести (ЛПТ) грунта (почвы) определяет напряжённое состояние, при котором начинается разрушение его структуры. Предположим, что размывная скорость потока зависит от усилия отрыва загрязнения от поверхности растительного сырья и плотности загрязнений. Определим эту зависимость. Формула ЛПТ в общем виде выглядит следующим образом:

$$\tau = f(\sigma), \quad (1)$$

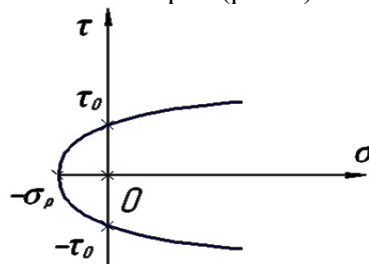
где  $\sigma$  – нормальное напряжение;

$\tau$  – касательное напряжение.

Запишем обратную функцию:

$$\sigma = \varphi(\tau). \quad (2)$$

и заметим, что функция (2) имеет ось симметрии (рис. 1):



**Рис. 1. Линия предела текучести**

$\sigma_p$  – напряжение разрыва;  $\tau_0$  – начальное сопротивление сдвигу.

Из симметрии функции следует её чётность, то есть:

$$\varphi(-\tau) = \varphi(\tau). \quad (3)$$

Разложим функцию (2) в ряд Маклорена:

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \tau^n, \quad (4)$$

где  $a_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$ .



Так как  $\varphi(\tau)$  является чётной функцией, то ряд (4) имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \tau^n = a_0 + a_2 \cdot \tau^2 + a_4 \cdot \tau^4 + \dots + a_{2k} \cdot \tau^{2k} + \dots \quad (5)$$

Поэтому при квадратичной аппроксимации (4) получим:

$$\varphi(\tau) = a_0 + a_2 \cdot \tau^2. \quad (5)$$

Постоянные  $a_0$  и  $a_2$  найдём из системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(0) = -\sigma_p \\ \varphi(\tau_0) = 0 \end{cases}, \begin{cases} a_0 = -\sigma_p \\ a_0 + a_2 \cdot \tau_0^2 = 0 \end{cases}; \quad (6)$$

где  $a_2 = -\frac{a_0}{\tau_0^2} = \frac{\sigma_p}{\tau_0^2}$ .

Итак: квадратичная аппроксимация функции  $\varphi(\tau)$  имеет вид:

$$\varphi(\tau) = -\sigma_p + \frac{\sigma_p}{\tau_0^2} \cdot \tau^2; \quad (7)$$

или с учётом (2.33):

$$\sigma = -\sigma_p + \frac{\sigma_p}{\tau_0^2} \cdot \tau^2; \quad (8)$$

откуда находим:

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\sigma_p}}. \quad (9)$$

Зависимость (9) не противоречит формуле рекомендованной Зенковым [1].

$$\tau = \eta \sqrt{(\sigma + H)\lambda}. \quad (10)$$

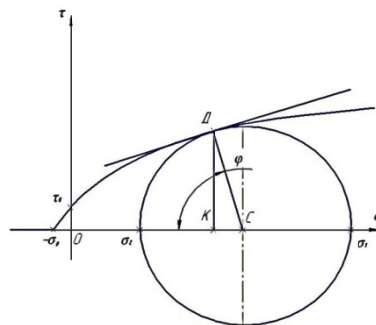
Действительно, формула (2.40) и (2.41) совпадают при:

$$n = 2; H = \sigma_p; \lambda = \frac{\tau_0^2}{\sigma_p}.$$

Очевидно, что значения  $\sigma_p$  и  $\tau_0$  зависят от влажности грунта  $W$ . Окончательно запишем ЛПТ в виде:

$$\tau(W) = \tau_0(W) \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\sigma_p(W)}}. \quad (11)$$

Формула (11) позволяет выбирать оптимальный динамический напор в моечной машине (рис. 2):



**Рис. 2. Выбор динамического напора:  $\sigma_1$  – динамический напор;  $\sigma_2$  – статическое давление**

Вычислим динамический напор ( $\sigma_0 = \sigma_1$ ), зная статическое давление ( $\sigma_{cm} = \sigma_2$ ) и напряжение сдвига  $\tau$ , получаемое из формулы (11), то есть:

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\sigma_p}}. \quad (12)$$

Сначала находим угол сдвига  $\varphi$  (рис. 2):



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\frac{\tau_0}{2\sigma_p}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma}{\sigma_p}}}. \quad (13)$$

Так как:

$$\sin \varphi = \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2}; \quad (14)$$

то:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2}. \quad (15)$$

Откуда, учитывая (13), получим:

$$\frac{\frac{\tau_0}{2\sigma_p}}{\sqrt{\tau_0^2 + 4\sigma_p^2 \left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_p}\right)}} = \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2}. \quad (16)$$

Это уравнение содержит два неизвестных:  $\sigma_1$  и  $\tau$ .

Второе уравнение относительно этих неизвестных получим из треугольника ДКС в круге Мора на рис. 2:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau}{0,5(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma}. \quad (17)$$

Что равносильно:

$$\frac{\frac{\tau_0}{2\sigma_p}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma}{\sigma_p}}} = \frac{\tau}{0,5(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma}. \quad (18)$$

Система уравнений (13) и (18) определяет неизвестные  $\tau$  и  $\sigma_1$ . Таким образом, динамический напор является функцией трёх известных параметров:  $\sigma_2$ ;  $\sigma_p$ ;  $\tau_0$  и одного неизвестного параметра  $\sigma$ . Значение  $\sigma$  в уравнении (18) находим из уравнения, которое выводится из круга Мора (рис. 2):

$$2\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_p} \sqrt{\frac{\tau_0^2 + 4\sigma_p^2 \left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_p}\right)}{1 + \frac{\sigma}{\sigma_p}}}. \quad (19)$$

Система уравнений (13) и (18) даёт значения  $\sigma$ ;  $\sigma_1$  и  $\tau$  в зависимости от трёх известных величин  $\sigma_2$ ;  $\sigma_p$  и  $\tau_0$ . Этим завершается решение задачи определения динамического напора.

Нормальные и касательные напряжения на поверхности раздела загрязнения и сырья.

Рассмотрим координаты:

$x$  – вдоль поверхности загрязнений то есть в направлении течения омывающей жидкости,

$y$  – по нормали к этой поверхности,

обозначим:

$P$  – давление на внешней границе загрязнений,

$v$  – скорость жидкости на этой границе,

$\tau$  – касательные напряжения на внутренней границе поверхности загрязнений.

Наиболее трудной для смывания является такая толщина слоя загрязнений, которая соизмерима с толщиной пограничного слоя омывающей жидкости.

В этом случае давление сквозь слой загрязнений передаётся без изменений, то есть:

$$\frac{dP}{dy} = 0, \quad (20)$$

а скорость на внешней границе связана с этим давлением уравнением:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} = -v \frac{dv}{dx}. \quad (21)$$

Для участка пятна загрязнений, достаточно малого относительно поверхности, например, плода можно применить свойства ламинарного пограничного слоя на пластине. Тогда напряжение на поверхности пограничного слоя, вызываемое силами трения, равно:



$$\tau = 0,664 \frac{\rho \cdot v_0^2}{\sqrt{Re}}, \tag{22}$$

где,  $v_0$  – скорость набегающего потока

В равенстве (21) и (22) приняты обозначения:

$\rho$  – плотность жидкости;

$l$  – размер пятна загрязнений в направлении омывающего потока;

$\mu$  – динамическая вязкость жидкости.

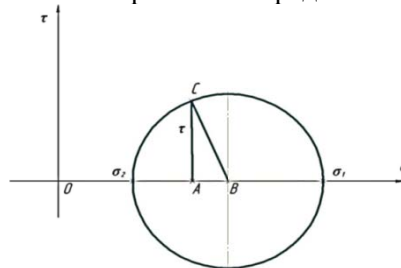
Сравнивая (21) и (22), получим:

$$0,664 \frac{\rho \cdot v_0^2}{\sqrt{Re}} = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\sigma_p}}. \tag{23}$$

Здесь следует заметить, что формулы (21) и (22) справедливы тогда, когда нормаль к поверхности участка загрязнения перпендикулярна к вектору скорости набегающего потока, а скорость  $v$  принимает значения в интервале:  $0 < v < v_0$ . Это значит, что:

- 1)  $v = v_0$  – если плод расположен у стенки, перпендикулярной скорости набегающего потока;
- 2)  $v = 0$  – если плод транспортируется набегающим потоком, а его скольжение относительно жидкости практически отсутствует.

В первом случае (рис. 3) касательное напряжение определяется равенством (22).



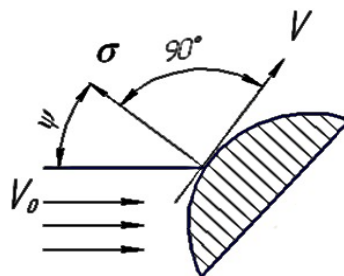
**Рис. 3. Круг Мора при:  $v = v_0$ ,  $\tau = AC$ ,  $\sigma = OA$**

Значения  $\tau$  и  $\sigma$  находим из системы (22)—(23), откуда получим нормальное давление на поверхности загрязнения:

$$\sigma = \sigma_p \left( 0,44 \frac{\rho^2 \cdot v_0^4}{\tau_0^2 \cdot Re} - 1 \right). \tag{24}$$

Итак, нормальные и касательные напряжения на поверхности загрязнений определяются формулами (22) и (24), если нормаль к поверхности загрязнений перпендикулярна скорости жидкости.

В общем случае (рис. 4) скорость набегающего потока образует некоторый угол  $\psi$  с нормалью к поверхности загрязнений.



**Рис. 4. Скорость на внешней границе поверхности загрязнения**

Из формулы (23) видно, что нормальное напряжение равно:

$$\sigma = \frac{\rho \cdot v_0^2}{2} \cdot \cos \psi. \tag{25}$$

откуда получим зависимость касательного напряжения от скорости омывающей жидкости, то есть:



$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{\rho \cdot v_0^2}{2\sigma_p} \cos \psi}. \quad (26)$$

При турбулизації процесу мойки можна приймати рівномірне розподілення кута  $\psi$  в інтервалі:  $0 < \psi < \pi/2$  з щільністю ймовірності:  $f = 2/\pi$ . Щоб отримати розподілення касательного напруження, знайдемо обернену функцію для (26):

$$\psi(\tau) = \arccos \frac{2\sigma_p(\tau^2 - \tau_0^2)}{\rho \cdot v_0^2 \cdot \tau_0^2}. \quad (27)$$

Из двух последних равенств находим плотность вероятности касательного напруження;

$$h(\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{d\tau} \cdot \arccos \frac{2\sigma_p(\tau - \tau_0^2)}{\rho \cdot v_0^2 \cdot \tau_0^2}. \quad (28)$$

Формула (28) несе основную информацию об эффективности процесса мойки.

Розподілення касательных напружений загрязнения

Формула (28) зв'язує розподілення трьох випадкових величин: кута атаки набегающего потока  $\psi$ , косинуса  $x = \cos \psi$  и касательного напруження:

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{\rho \cdot v^2}{2\sigma_p} \cdot \cos \psi}. \quad (29)$$

Угол  $\psi$  рівномірно розподілений в інтервалі  $[0; \pi/2]$  и его щільність ймовірності постійна, то єсть:

$$f_1(\psi) = \frac{2}{\pi}. \quad (30)$$

Щільність ймовірності косинуса в інтервалі  $[0; 1]$  получим из (30), то єсть:

$$f_2(x) = f_1(\arccos x) \left| \frac{d(\arccos x)}{dx} \right|; \quad (31)$$

$$f_2(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right| = \frac{2}{\pi \sqrt{1-x^2}}. \quad (32)$$

Случайное значение касательного напруження зв'язано со случайным значением косинуса равенством:

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + bx}; \quad (33)$$

$$b = \frac{\rho \cdot v^2}{2\sigma_p}; \quad x = \cos \psi. \quad (34)$$

Откуда следует:

$$x(\tau) = a(\tau^2 - \tau_0^2); \quad (35)$$

$$a = \frac{2\sigma_p}{\rho \cdot v^2 \cdot \tau_0^2}. \quad (36)$$

Поэтому щільність ймовірності касательного напруження приймає вигляд:

$$f(\tau) = f_2[x(\tau)] \left| \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right| = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - a^2(\tau^2 - \tau_0^2)^2}} \cdot 2a \cdot \tau. \quad (37)$$

Или:

$$f(\tau) = \frac{4 \cdot a \cdot \tau}{\pi \sqrt{1 - a^2(\tau^2 - \tau_0^2)^2}}. \quad (38)$$

Вычислим наиболее вероятное значение касательного напруження. Для этого надо найти корень уравнения:

$$f^1(\tau) = 0. \quad (39)$$

После дифференцирования получим:



$$\frac{4a}{\pi} \cdot \frac{2[1 - a^2(\tau^2 - \tau_0^2)^2] + 4a^2 \cdot \tau^2(\tau^2 - \tau_0^2)}{1 - a^2(\tau^2 - \tau_0^2)^2} = 0; \quad (40)$$

$$1 - a^2(\tau^2 - \tau_0^2)^2 + 2a^2 \cdot \tau^2(\tau^2 - \tau_0^2) = 0; \quad (41)$$

$$1 + a^2(\tau^2 - \tau_0^2)(\tau^2 + \tau_0^2) = 0; \quad (42)$$

$$1 + a^2(\tau^4 - \tau_0^4) = 0; \quad (43)$$

$$\tau_{\text{mod}} = \sqrt[4]{\tau_0^4 - \frac{1}{a^2}}. \quad (44)$$

После подстановки в это равенство значения «а» получим:

$$\tau_{\text{mod}} = \tau_0 \sqrt{1 - \frac{\rho^2 \cdot v^4}{4 \cdot \sigma_p^2}}. \quad (45)$$

Так как  $\tau_{\text{mod}} > 0$ , то из (45) следует:

$$1 - \frac{\rho^2 \cdot v^4}{4\sigma_p^2} > 0; \quad (46)$$

откуда находим:

$$\sigma_p > \frac{\rho \cdot v^2}{2}. \quad (47)$$

Это неравенство показывает, что все полученные аналитические выводы справедливы, когда сопротивление разрыва слоя загрязнений больше динамического напора омывающей жидкости.

Вычислим среднее значение касательного напряжения по формуле математического ожидания:

$$\bar{\tau} = \int_0^{\tau_{\text{max}}} \tau f(\tau) d\tau; \quad (48)$$

$$\tau_{\text{max}} = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{\rho \cdot v^2}{2\sigma_p}}; \quad (49)$$

Имеем:

$$\int_0^{\tau_{\text{max}}} \tau f(\tau) d\tau = \int_0^{\tau_{\text{max}}} \frac{4a \cdot \tau^2 d\tau}{\pi \sqrt{1 - a^2(\tau^2 - \tau_0^2)^2}}. \quad (50)$$

Применим формулу Симпсона для трёх интерполяционных узлов:

$$\int_0^{\tau_{\text{max}}} F(\tau) d\tau = \frac{\tau_{\text{max}}}{6} (F_0 + 4F_1 + F_2), \quad (51)$$

где

$$F_0 = 0;$$

$$F_1 = \frac{4a \cdot (0,5\tau_{\text{max}})^2}{\pi \sqrt{1 - a^2[(0,5\tau_{\text{max}})^2 - \tau_0^2]^2}}. \quad (52)$$

$$F_2 = \frac{4a \cdot \tau_{\text{max}}^2}{\pi \sqrt{1 - a^2(\tau_{\text{max}}^2 - \tau_0^2)^2}}. \quad (53)$$

После подстановок всех слагаемых в формулу Симпсона, получим среднее касательное напряжение:

$$\bar{\tau} = B \cdot \tau_0, \quad (54)$$

где,



$$B = \frac{2(b+1)\sqrt{b+1}}{3\pi\sqrt{b}} \left( \sqrt{\frac{b}{b-1}} + \sqrt{\frac{2b}{3-b+4b^2}} \right); \quad (55)$$

$$b = \frac{\rho \cdot v^2}{2\sigma_p}. \quad (56)$$

Коэффициент «В» принимает действительные значения при  $b > 1$ . Поэтому:

$$\frac{\rho_e \cdot v^2}{2\sigma_p} > 1. \quad (57)$$

откуда следует правило выбора скорости омывающего потока:

$$v > \sqrt{\frac{2\sigma_p}{\rho_e}}. \quad (58)$$

Заметим, что скорость омывающего потока тесно коррелирует с рассмотренной ранее размывающей скоростью. В первом приближении эти скорости можно принять равными. Так можно выйти, во-первых на рекомендации для гидродинамического режима в моечной машине, во вторых, полученное выражение свидетельствует о необходимости определения адгезионно-когезионных характеристик почвенных загрязнений. Учитывая пористость чернозёма от 30 до 50 %, зависимость (58) принимает вид:

$$v > (0,3...0,5) \sqrt{\frac{2\sigma_p}{\rho_e}}. \quad (59)$$

Последнее выражение представляет собой правило выбора размывной скорости потока.

#### Список литературы

1. Зенков, Р. Д. *Механика насыпных грузов [Текст] / Р.Д. Зенков.* – М.: Недра, 1964. – 311 с.
2. Корн, Г. *Справочник по математике для научных работников / Г. Корн, Т. Корн.* – М.: Наука, 1973. – 720с.
3. Яворский, Б. М. *Справочник по физике для инженеров и студентов ВУЗов [Текст] / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф.* – М.: Наука, 1974. – 940 с.

#### References

1. Zenkov, G. D. *Mekhanika nasyprnykh gruzov [Tekst] / R.D. Zenkov.* - M.: Nedra, 1964. - 311 s.
2. Korn G. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov / G. Korn, T. Korn.* - M.: Nauka, 1973. - 720s.
3. Yavorskiy, B. M. *Spravochnik po fizike dlya inzhenerov i studentov VUZov [Tekst] / B. M. Yavorskiy, A. A. Detlaf.* - M.: Nauka, 1974. - 940 s.

### ВИВЕДЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ РАЗМИВНОЇ ШВИДКОСТІ ПОТОКУ ВОДИ У МИЙНИХ МАШИНАХ ДЛЯ КОРЕНЕПЛОДІВ

**Анотація:** в статті викладено припущення, що розмивна швидкість потоку рідини залежить від зусилля відриву ґрунтового забруднення від поверхні рослинної сировини і щільності забруднень. Розглянуто питання щодо виведення залежності для визначення розмивної швидкості потоку рідини, який омиває рослинну сировину у мийних машинах. В результаті математичних перетворень отримано вираз, який являє собою правило вибору розмивної швидкості потоку рідини. Використовуючи отриманий вираз можна вийти, по-перше на рекомендації для гідродинамічного режиму в мийній машині, по-друге, отриманий вираз свідчить про необхідність визначення адгезійно-когезійних характеристик ґрунтових забруднень.

**Ключові слова:** плинність, щільність, зусилля відриву, адгезія, когезія, межа, розмивна швидкість, гідродинамічний режим.

### FINDING OUT AN ALGORITHM OF DEPENDENCE AFFECTING THE WASH-OUT WATER FLOW SPEED IN JET WASHERS FOR ROOT CROPS

**Summary:** this article assumes that the washing-away rate of liquid flow depends on the effort of a soil pollution separation from the surface of vegetable raw materials and on the pollution density and attempts to find out a dependence ratio to define the washing-away flow rate of liquid to wash vegetable raw materials in washing machines. As a result of mathematical manipulations an algorithm to choose a feasible washing-away rate of liquid flow is observed. Such algorithm, first, enables us to work out the recommendations for a washing machine hydrodynamic mode, secondly, proves the necessity to start with the definition of adhesion and cohesive characteristics of ground pollution.

**Keywords:** fluidity, density, effort of a separation, adhesion, cohesion, limit, washing-away rate, hydrodynamic mode.