

УДК 51:65.012.34:631.1

**ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ У ТРАНСПОРТНІЙ ЛОГІСТИЦІ АПК**

**Дубчак Віктор Миколайович**, к.т.н., доцент  
**Новицька Людмила Іванівна**, к.п.н., доцент  
Вінницький національний аграрний університет

**V. Dubchak**, PhD, Associate Professor  
**L. Novitska**, PhD, Associate Professor  
Vinnytsia National Agrarian University

*У статті обґрунтовано роль транспорту у розвитку АПК та визначено можливість використання математичного апарату, зокрема диференціального й інтегрального числення, в процесі розв'язання актуальних задач транспортної логістики в аграрному виробництві. Математичний апарат дозволяє знаходити такі величини, як вантажна робота, середня дальність їздки. Обчислення цих величин дає змогу впливати на ефективність техніко-економічних показників вантажного транспортного процесу як основної ланки АПК, а крім того, впроваджувати різні заходи щодо покращення паливно-економічних та екологічних показників автотранспорту в експлуатаційних умовах. Це є сьогодні актуальним і перспективним при вирішенні нагальних проблем економії паливно-енергетичних ресурсів та екологічної безпеки України.*

*Ключові слова: аграрне виробництво, транспорт, вантажна робота, середня дальність їздки, математичний апарат, диференціальне та інтегральне числення.*

**Ф. 20. Рис. 3. Літ. 6.**

---

**1. Постановка проблеми**

---

Рациональна організація перевезень сільськогосподарських вантажів є однією з найважливіших складових частин розвитку економіки країни. У загальному комплексі сільськогосподарських робіт транспортні процеси займають до 35% всіх витрат праці на обробіток сільськогосподарських культур, а за витратами енергії – до 40%. Транспортні витрати складають близько 20-25% витрат, що визначають собівартість найважливіших видів сільськогосподарської продукції [1].

Обсяг вантажів у сільському господарстві сягає десятків мільйонів тонн. Це зерно, а також продукти його переробки, коренебульбоплоди, органічні та мінеральні добрива, різноманітні грубі корми, тварини, будівельні та паливо-мастильні матеріали тощо. Такі обсяги і різноманітність вантажів вимагають застосування відповідних транспортних засобів.

Підвищення продуктивності транспорту – важлива проблема аграрного виробництва, яка дозволяє вирішувати актуальні задачі як транспортної логістики – системи по організації доставки вантажу з мінімальними тимчасовими витратами й оптимізацією витрат на доставку, так і проблеми економії паливно-мастильних матеріалів та захисту довкілля від забруднення токсичними продуктами згоряння пального автотранспортних двигунів.

---

**2. Мета дослідження**

---

Пропонуємо розглянути транспортні задачі, які визначають ефективність вантажного транспортного процесу аграрного виробництва і розв'язуються за допомогою математичного апарату диференціального та інтегрального числення [2, 3].

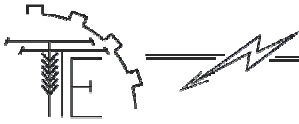
---

**3. Виклад основного матеріалу**

---

Припустимо, що потрібно перевезти вантажі масами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  на відстані  $r_1, r_2, \dots, r_n$  відповідно. Величину  $A = \sum_{k=1}^n m_k \cdot r_k$  називають вантажною роботою, а величину  $\rho = A / \sum_{k=1}^n m_k$  – середньою дальністю їздки [4].

Ці величини характеризують економічні та технічні показники вантажних транспортних засобів. Їх можна поширити і на той випадок, коли вантаж рівномірно розподіляється на деякій ділянці.



Таким чином, виникають поняття вантажної роботи і середньої дальності їздки під час вивезення добрив, при збиранні сіна чи врожаю зерна з деякого поля або інших сільськогосподарських транспортних процесів.

Задача 1. Нехай деяке поле має форму криволінійної трапеції, що обмежена лініями  $y=0, y=f(x), x=c, x=d (y \geq 0)$ . Припустимо, що урожай з поля вивозиться найкоротшим шляхом до дороги – осі абсцис. Виведемо формулу для обчислення вантажної роботи по вивезенню врожаю сільськогосподарської продукції з поля до дороги.

Використовуючи отриману формулу, знайдемо вантажну роботу по вивезенню врожаю з прямокутного поля шириною  $a$  і довжиною  $b$  найкоротшим шляхом до краю дороги [5].

Розв'язання: Припустимо, що урожайність зерна на всьому полі  $S$  однакова і дорівнює  $k$  ( $в кг / м^2$ ). Розіб'ємо поле на ділянки з площами  $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$ , з яких урожай вивозиться за один рейс. Тоді вантажна робота буде рівна:

$$A = k \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta S_i, \quad (1)$$

де  $y_i$  – довжина відповідної їздки (ордината деякої точки ділянки  $\Delta S_i$ ). Очевидно, що вантажна робота може бути обчислена наближено наступним чином:

$$A \approx k \iint_D y dx dy = k \int_c^d dx \int_0^{f(x)} y dy = \frac{k}{2} \int_c^d f^2(x) dx. \quad (2)$$

Знайдемо тепер вантажну роботу по вивезенню врожаю з прямокутного поля шириною  $a$  і довжиною  $b$  найкоротшим шляхом до краю дороги.

Оскільки з даної точки поля урожай вивозиться до найближчої сторони прямокутника, то поле ділиться (рис. 1) на чотири ділянки  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , з яких машини їдуть відповідно до сторін-доріг.

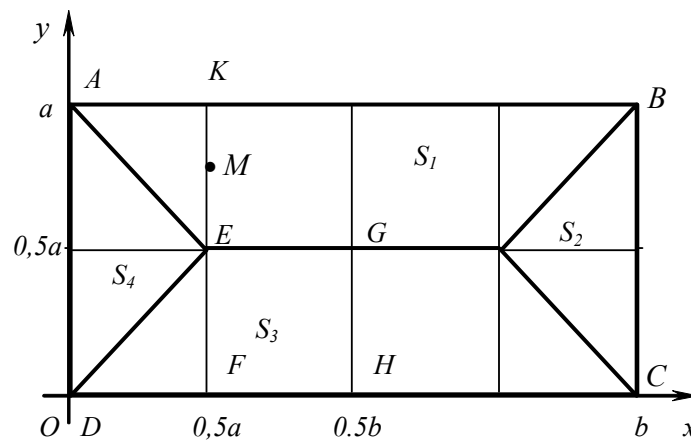


Рис. 1. Поле шириною  $a$  та довжиною  $b$

$AB, BC, CD, DA$ . Розіб'ємо поле на чотири прямокутники та вісім трикутників. Знайдемо роботу  $A_T$  по вивезенню врожаю з трикутника  $DEF$ . В цьому випадку вісь абсцис (дорога) повинна співпадати з прямою  $DC$ . За вісь ординат візьмемо пряму  $DA$ . Тоді сторона  $DE$  є графіком функції  $f(x) = x$ . Отже,

$$A_T = \frac{k}{2} \int_0^{a/2} x^2 dx = \frac{ka^3}{48}. \quad (3)$$

Оскільки робота визначається формою поля і положенням дороги, то вона буде такою ж і для кожного з інших трикутників відносно своєї дороги – катета.

Знайдемо роботу  $A_{II}$  для прямокутника  $EFHG$ :

$$A_{II} = \frac{k}{2} \int_{a/2}^{b/2} (a/2)^2 dx = \frac{ka^2}{2 \cdot 4} \left( \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right) = \frac{k(a^2b - a^3)}{16}. \quad (4)$$



Такою ж буде робота і для інших прямокутників відносно своїх доріг. Остаточна робота по вивезенню врожаю дорівнює:

$$A = 8A_T + 4A_{II} = \frac{k}{12}(3a^2b - a^3). \quad (5)$$

Поля сівозмінні доцільно проектувати у формі прямокутників, що забезпечує правильне і найбільш продуктивне виконання механізованих робіт. У відповідності з цим польові дороги також доцільно проектувати у вигляді сітки прямокутників, суміщаючи їх сторони зі сторонами полів сівозмін [5].

Розглянемо задачу, що виникає при визначенні раціонального співвідношення сторін прямокутників, які є основою сітки польових доріг.

Задача 2. Нехай прямокутне поле шириною  $a$  і довжиною  $b$  оточено польовою дорогою. Виведемо формулу для обчислення вантажної роботи по вивезенню врожаю з будь-якої точки поля по найкоротшому шляху до дороги, а потім по дорозі – до відповідної вершини прямокутника.

Розв'язання: Нехай урожай транспортується в точку  $O$ , а поле розбито на ділянки  $S_1, S_2, S_3, S_4$  (рис. 1). У вантажну машину завантажуються врожай з ділянки площею  $\Delta S$  в точці  $M(x, y)$ , яка належить ділянці  $S_1$ . З цим вантажем машина пройде шлях  $MKAO$  довжиною  $2a + x - y$ . Тому вантажна робота  $A_1$  по вивезенню врожаю з поля може бути знайдена наступним чином:

$$A_1 = k \iint_{S_1} (2a + x - y) dx dy = k \int_{\frac{a}{2}}^a dy \int_{a-y}^{y-a+b} (2a + x - y) dx = \frac{k}{4}a^2b + \frac{k}{8}ab^2 - \frac{k}{6}a^3. \quad (6)$$

Аналогічно знаходимо вантажну роботу  $A_2, A_3, A_4$  по вивезенню врожаю з ділянок  $S_2, S_3, S_4$  відповідно:

$$A_2 = k \iint_{S_2} (2b + y - x) dx dy = \frac{k}{8}a^2b + \frac{k}{12}ab^2; \quad (7)$$

$$A_3 = k \iint_{S_3} (x + y) dx dy = \frac{k}{8}ab^2 - \frac{k}{24}a^3; \quad (8)$$

$$A_4 = \frac{k}{12}a^3. \quad (9)$$

Додамо знайдені величини, остаточно маємо:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \\ &= \frac{k}{4}a^2b + \frac{k}{8}ab^2 - \frac{k}{8}a^3 + \frac{k}{8}a^2b + \frac{k}{12}a^3 + \frac{k}{8}ab^2 - \frac{k}{24}a^3 + \frac{k}{12}a^3 = \frac{k}{24}(9a^2b + 6ab^2 - a^3). \end{aligned} \quad (10)$$

Задача 3. Відомо, що вантажна робота по вивезенню врожаю з прямокутного поля шириною  $a$  і довжиною  $b$  обчислюється за формулою  $A = \frac{k}{24}(9a^2b + 6ab^2 - a^3)$  (задача 2). З усіх прямокутників даної площі  $S$  необхідно вибрати такий, для якого вантажна робота  $A$  буде найменшою.

Розв'язання: Нехай  $x$  – ширина поля, де  $0 < x \leq \sqrt{S}$ . Тоді його довжина  $\frac{S}{x}$ , а вантажна

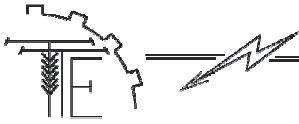
$$\text{робота } A = \frac{k}{24}(9a^2b + 6ab^2 - a^3) = \frac{k}{24}(6\frac{S^2}{x} + 9Sx - x^3). \quad (11)$$

Необхідно знайти найменше значення функції  $A(x)$  на проміжку  $(0; \sqrt{S}]$ . Знайдемо похідну функції

$$A(x) : A'(x) = \frac{-k(x^2 - S)(x^2 - 2S)}{8x^2} \quad (12)$$

Так як  $A'(x) < 0$  на інтервалі  $(0; \sqrt{S})$ , то функція  $A(x)$  на проміжку  $(0; \sqrt{S}]$  спадає. Тому вона досягає найменшого значення коли  $x = \sqrt{S}$ , тобто, коли прямокутник є квадратом.

Під час проектування доріг у сільській місцевості часто виникає необхідність з'єднати під'їзною дорогою той чи інший об'єкт з магістраллю. Різні економічні розрахунки в таких випадках



завичай показують, що під'їзну дорогу не варто проводити перпендикулярно до магістралі, а під деяким гострим кутом, який називається кутом примикання під'їзної дороги до магістралі [5].

Задача 4. Центральна садиба агрофірми  $C$  розташована в 50 км від районного центру  $A$  (рис. 2) і в 30 км від магістралі, яка проходить через районний центр.

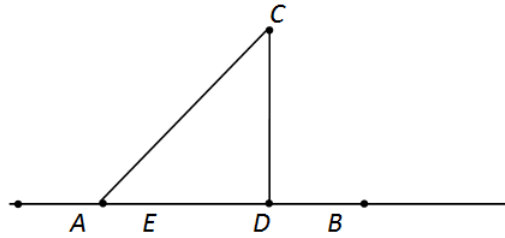


Рис. 2. Під'їзна дорога  $CEA$

Під яким кутом  $\angle DCE$  до автомагістралі варто провести під'їзну дорогу з  $C$ , щоб вартість перевезень вантажу з  $C$  до  $A$  та з  $A$  до  $C$  була найменшою, коли відомо, що перевезення по автомагістралі вдвічі дешевше, ніж по під'їзній дорозі?

Розв'язання. Нехай  $DE = x$ . Тоді  $CE = \sqrt{900 + x^2}$ ,  $AE = AD - x = 40 - x$ . Позначимо вартість перевезення 1 т вантажу на 1 км по магістралі через  $p$  та знайдемо вартість перевезення 1 т вантажу від  $A$  до  $C$  або в зворотньому напрямку. Маємо:

$$P(x) = p(40 - x) + 2p\sqrt{900 + x^2} \quad (0 \leq x \leq 40). \quad (13)$$

Необхідно знайти найменше значення функції  $P(x)$  на відрізку  $[0; 40]$ . Знайдемо похідну

$P'(x) = -p + \frac{2px}{\sqrt{900 + x^2}}$ . Очевидно, що на проміжку  $[0; 40]$  у функції  $P(x)$  одна критична

точка  $x_0 = 10\sqrt{3}$ , причому  $P(x_0) = (40 + 30\sqrt{3})p$ , в той час як  $P(0) = P(40) = 100p$ . Отже, в точці  $x_0$  функція набуває найменшого значення. Тепер знайдемо кут примикання:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \text{ тобто } \alpha = 60^\circ. \quad (14)$$

Розглянемо декілька задач на знаходження середньої дальності їздки при вивезенні врожаю сільськогосподарських культур або транспортуванні сіна.

Задача 5. Знайти середню дальність їздки під час транспортування сіна з поля  $S$ , яке має форму круга з радіусом  $r$ , до скирти, що знаходиться в центрі поля.

Розв'язання. Будемо вважати, що сіно розподілено рівномірно по всьому полю з густиною  $k$ .

Розіб'ємо поле на ділянки з площами  $\Delta S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), з яких сіно вивозиться за один рейс.

Тоді вантажна робота буде

$$A = k \sum_{i=1}^n r_i \cdot \Delta S_i, \quad (15)$$

де  $r_i$  – довжина відповідної їздки (відстань від центра поля до деякої точки відповідної ділянки). Очевидно, що вантажна робота може бути наближено обчислена таким чином:

$$A \approx k \iint_D r dS = k \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \pi k r^3. \quad (16)$$

Оскільки загальна маса сіна у даному випадку дорівнює  $m = k\pi r^2$ , то середня дальність їздки

$$\rho \approx \frac{A}{m} = \frac{2}{3} r. \quad (17)$$

Така формула і наводиться в літературі [6].

Задача 6. Знайти середню дальність їздки [6] при транспортуванні сіна з ділянки, що має форму квадрата зі стороною  $2a$ , до скирти, що знаходиться в центрі квадрата.

Розв'язання. Візьмемо систему координат так, як показано на рис. 3:

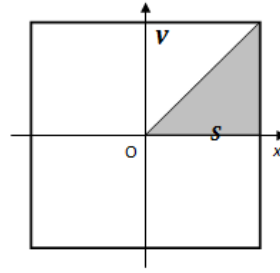


Рис. 3. Квадратна ділянка

та, міркуючи аналогічно задачі 5, обчислимо вантажну роботу. Маємо:

$$A = 8k \iint_D r dS = 8k \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^{\frac{a}{\cos\phi}} r^2 dr = \frac{8}{3} ka^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\phi}{\cos^3 \phi}. \quad (18)$$

Знаходимо за таблицею інтегралів:

$$\int \frac{d\phi}{\cos^3 \phi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right). \quad (19)$$

Тому вантажна робота дорівнює:

$$A = \frac{4}{3} ka^3 (\sqrt{2} + \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}) \approx 3,06ka^3. \quad (20)$$

Оскільки  $m = 4ka^2$ , то середня дальність їздки  $\rho \approx 0,8a$ .

#### 4. Висновки

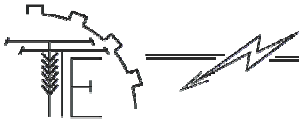
Математичний апарат диференціального та інтегрального числення дозволяє вирішувати актуальні задачі аграрного виробництва, зокрема знаходити такі величини, як вантажна робота, середня дальність їздки. Обчислення цих величин дає змогу впливати на ефективність техніко-економічних показників вантажного транспортного процесу як основної ланки АПК, а, крім того, впроваджувати різні заходи щодо покращення паливно-економічних та екологічних показників автотранспорту в експлуатаційних умовах. Це є сьогодні актуальним і перспективним при вирішенні нагальних проблем економії паливно-енергетичних ресурсів та екологічної безпеки України.

#### Список використаних джерел

1. Придюк В.М. Особливості організації перевезень сільсько-господарських вантажів автомобільним транспортом / В.М. Придюк // Сільськогосподарські машини: Зб. наук. ст. – Вип. 28. – Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2014. – С. 68-72.
2. Дубовик В.П. Вища математика [Текст]: навч. посіб. для студ. техн. і технолог. спец. вузів / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Вища шк., 1993. – 648 с.
3. Шкіль М.І. Вища математика [Текст]: підручник: у 3 кн. Кн. 2: Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник. – К.: Либідь, 1994. – 352 с.
4. Романенко И.А. Технико-экономические основы проектирования сетей автомобильных дорог: учебное пособие для вузов / И.А. Романенко. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1975. – 267 с.
5. Славуцкий А.К. Проектирование, строительство, содержание и ремонт сельскохозяйственных дорог: учебник / А.К. Славуцкий. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1972. – 519 с.
6. Иофинов С. А. Справочник по эксплуатации машинно-тракторного парка / С.А. Иофинов, Э.П. Бабенко, Ю.А. Зуев; под общ. ред. С.А. Иофинова. – М.: Агропромиздат, 1985. – 271 с.

#### References

- [1] Prydiuk V.M. Features of the organization of transportation of agricultural goods by road / V.M. Prydiuk // Agricultural machines: Scientific Journal - Whip 28. - Lutsk: RVB of Lutsk National Technical University, 2014 - P. 68-72.
- [2] Dubovik V.P. Higher Mathematics [Text]: Teach. manual for studio tech and technologist. special high schools / V.P. Dubovik, I.I. Eurek - K.: Higher School, 1993. - 648 p.
- [3] Shkil M.I. Higher mathematics [Text]: textbook: 3 books. Kn. 2: Differential and integral calculus of a single variable. Rows / M.I. Shkil, T.V. Chariot - K: Lybid, 1994. - 352 p.
- [4] Romanenko I.A. Technical and economic fundamentals of road network design: a textbook for universities / I.A. Romanenko. - 2 nd ed. - Moscow: Higher School, 1975. - 267 p.



- [5] Slavutskiy A.K. Designing, construction, maintenance and repairing of agricultural roads: a textbook / A.K. Slavutskiy. - 2 nd ed. - Moscow: Higher School, 1972. - 519 p.
- [6] Iofinov S.A. Handbook on the operation of the machine-tractor park / S.A. Iofinov, E.P. Babenko, Yu.A. Zuiev; under the Society. Ed. S.A. Iofinov. - Moscow: Agropromizdat, 1985. - 271 p.

#### ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА В ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКЕ АПК

*В статье обоснована роль транспорта в развитии АПК и показана возможность использования математического аппарата, в частности дифференциального и интегрального исчисления, в процессе решения актуальных задач транспортной логистики в аграрном производстве. Математический аппарат позволяет находить такие величины, как грузовая работа, средняя дальность езды. Вычисления этих величин дает возможность влиять на эффективность технико-экономических показателей грузового транспортного процесса как основного звена АПК, а, кроме того, внедрять различные мероприятия по улучшению топливно-экономических и экологических показателей автотранспорта в эксплуатационных условиях. Это сегодня актуально и перспективно при решении насущных проблем экономии топливно-энергетических ресурсов и экологической безопасности Украины.*

*Ключевые слова: аграрное производство, транспорт, грузовая работа, средняя дальность езды, математический аппарат, дифференциальное и интегральное исчисление.*

Ф. 20. Рис. 3. Лит. 6.

#### APPLICATION OF THE MATHEMATICAL APPARATUS IN TRANSPORT LOGISTICS OF THE AIC

*The article substantiates the role of transport in the development of agroindustrial complex and shows the possibility of using the mathematical apparatus, in particular the differential and integral calculus, in the process of solving the actual problems of transport logistics in agrarian production. The mathematical apparatus allows finding values such as cargo work, the average range of a ride. The calculation of these values enables to influence the efficiency of technical and economic indicators of the freight transport process as the main branch of the agroindustrial complex, and, moreover, to implement various measures to improve the fuel and economic and environmental performance of vehicles in operating conditions. Today it is relevant and perspective in solving urgent problems of saving fuel and energy resources and ecological safety of Ukraine.*

*Keywords: agrarian production, transport, cargo work, average range of a drive, mathematical apparatus, differential and integral calculus.*

F. 20. Fig. 3. Ref. 6.

#### ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Дубчак Віктор Миколайович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри «Математики, фізики та комп'ютерних технологій» Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: dubchak@vsau.vin.ua).

**Новицька Людмила Іванівна** – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри «Математики, фізики та комп'ютерних технологій» Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: li@vsau.vin.ua).

**Дубчак Виктор Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Математики, физики и компьютерных технологий» Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, 21008, Украина, e-mail: dubchak@vsau.vin.ua).

**Новицкая Людмила Ивановна** – кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Математики, физики и компьютерных технологий» Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, 21008, Украина, e-mail: li@vsau.vin.ua).

**Dubchak Viktor** – PhD, Associate Professor of the department Mathematics, physics and computer technologies of the Vinnytsia National Agrarian University (3, Sunny St., Vinnytsia, 21008, Ukraine, e-mail: dubchak@vsau.vin.ua).

**Novitskaya Lyudmila** – PhD, Associate Professor of the department Mathematics, physics and computer technologies of the Vinnytsia National Agrarian University (3, Sunny St., Vinnytsia, 21008, Ukraine, e-mail: li@vsau.vin.ua).