24. Kruglyak, Yu. A., Strikha, M. V. (2014). Lessons of nanoelectronics: Hall effect and measurement of electrochemical potentials within "bottom - up" approach, Sensor Electronics Microsys. Tech., 11 (1), P. 5–27.

Рекомендовано до публікації д-р фіз.-мат. наук Глушков О. В.
Дата надходження рукопису 24.03.2015

Кругляк Юрий Алексеевич, доктор химических наук, профессор, кафедра информационных технологий, Одесский государственный экологический университет, ул. Львовская, 15, г. Одесса, Украина, 65016
E-mail: quantumnet@yandex.ua

УДК 535.3: 537.226.
DOI: 10.15587/2313-8416.2015.40776

ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ШАРА С ПОВЕРХНОСТНЫМ ЗАРЯДОМ

© Я. С. Криворучко, Л. Б. Лерман

В электростатическом приближении найдены выражения для поляризуемости диэлектрического шара со связанными поверхностными зарядами. Рассмотрены случаи равномерного и симметричного распределения зарядов на поверхности, а также система N точечных зарядов. Показано, что возмущенный потенциал в случае постоянного внешнего электростатического поля представляется в виде двух слагаемых. В случае системы точечных зарядов наблюдается мультипольная поляризуемость
Ключевые слова: *сферические наночастицы, задача электростатики, поляризуемость, поверхностный электрический заряд, возмущающий потенциал*

Expressions for polarizations of dielectric sphere with bound surface charges are founded in electrostatic approximation. Cases of uniform and symmetrical distributions of charges and systems of N point charges are considered. It is shown that perturbed potential in the case of a constant external electrostatic field is represented in form of two terms. In the case of a system of point charges is observed multipole polarizability
Keywords: *spherical nanoparticles, electrostatic problem, polarizability, surface electrical charge, perturbed potential*

1. Введение

При рассмотрении процессов взаимодействия электромагнитного излучения (ЭМИ) с веществом широко используется понятие поляризуемости [1, 2]. По определению поляризуемость – это физическое свойство веществ приобретать электрический или магнитный дипольный момент (поляризацию) во внешнем электромагнитном поле. Для ее нахождения необходимо решить некоторую задачу электростатики. Имея выражение для поляризуемости, нетрудно найти практически важные величины, такие как характеристики светорассеяния или эффективную диэлектрическую проницаемость (ДП) матричных дисперсных систем. Поэтому задача нахождения поляризуемости для частиц сложной формы или даже для сферических частиц с усложненной внутренне структурой по-прежнему остается актуальной.

В настоящей статье построено аналитическое решение задачи нахождения поляризуемости сферических наночастиц с произвольным законом распределения поверхностных зарядов. Рассмотрены равномерное и симметричное распределения зарядов по поверхности сферической частицы, а также случай произвольной системы N точечных поверхностных зарядов.

2. Постановка задачи

Известно, что при действии электростатического поля в диэлектрической частице возникает пропорциональный ему дипольный момент. Для потенциала поля диполя, центр которого расположен в начале координат, справедливо выражение

$$\Phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_m r^2}, \qquad (1)$$

где p − абсолютное значение дипольного момента; r − расстояние до точки наблюдения; θ − меридиональный угол в сферической системе координат; ε_m − диэлектрическая проницаемость среды.

Поляризуемость α по определению есть величина

$$\mathbf{p} = \varepsilon_m \alpha \mathbf{E}_0, \qquad (2)$$

где $\mathbf{E}_0$ − напряженность электрического поля; α − поляризуемость, которая в общем случае является тензором.

Для потенциала идеального диполя имеет место формула

$$\Phi = \frac{\mathbf{pr}}{4\pi\varepsilon_m r^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_m r^2}. \qquad (3)$$

Рассмотрим сплошную сферическую частицу, радиуса a, помещенную в электростатическое поле с потенциалом u_0 и напряженностью $\mathbf{E}_0$ (рис. 1). Частица вносит определенное возмущение во внешнее поле, вследствиее чего в окружающей среде возникает дополнительное поле с возмущающим потенциалом u_p. Задачу решаем в сферических координатах r,θ,φ (r – полярный радиус, θ – меридиональный, φ – полярный углы). Будем считать, что шар имеет поверхностный заряд с плотностью σ, распределение которого по поверхности считается известным, т. е. $\sigma=\sigma(\theta,\varphi)$.

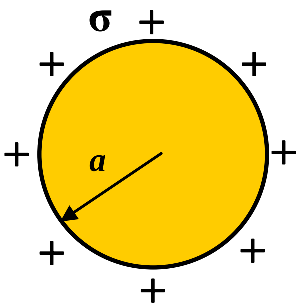

Рис. 1. Шар с поверхностным зарядом

Частица вносит определенное возмущение во внешнее поле, вследствиее чего в окружающей среде возникает дополнительное поле с возмущающим потенциалом u_p. Задача решается в сферических координатах r,θ,φ (r – полярный радиус, θ – меридиональный, φ – полярный углы). Будем считать, что шар несет поверхностный заряд с плотностью σ, распределение которого по поверхности считается известным, т. е. $\sigma=\sigma(\theta,\varphi)$.

В статье рассматривается случай, когда заряды, определяющие поверхностную плотность, зафиксированы на поверхности шара (связанные заряды). Дипольный момент шара радиуса a равен

$$\mathbf{p}=4\pi\varepsilon_m a^3\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_m}{\varepsilon_1+2\varepsilon_m}\mathbf{E}_0, \quad (4)$$

где ε_1 – ДП материала шара

Тогда из (2) находится поляризуемость сплошного шара

$$\alpha=4\pi a^3\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_m}{\varepsilon_1+2\varepsilon_m}. \quad (5)$$

Потенциалы внутри шара u_1, возмущающий потенциал u_p и потенциал произвольного внешнего поля u_0 на поверхности шара $r=a$ связаны условиями сопряжения

$$u_1=u_0+u_p,\ \varepsilon_0\varepsilon_m\left(\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{\partial u_p}{\partial r}\right)-\varepsilon_0\varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial r}=4\pi\sigma, \quad (6)$$

где ε_0 – абсолютная ДП вакуума;

В отличие от свободного от зарядов шара, второе уравнение (6) содержит еще одно слагаемое. К условиям (6) добавляются условия ограниченности потенциалов в начале координат и на бесконечности, т. е.

$$u_1<\infty \text{ при } r\to 0 \text{ и } u_p\to 0 \text{ при } r\to\infty. \quad (7)$$

Все потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа, записанного в сферической системе координат

$$\Delta_r u_j+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}u_j=0,\quad j=0,1,p,$$
$$\Delta_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}),$$
$$\Delta_{\theta,\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (8)$$

Задача состоит в нахождении потенциалов из уравнений (8) при удовлетворении граничным условиям (6), (7). Для нахождения поляризуемости необходимо только разложение возмущающего потенциала.

3. Анализ литературных данных

При рассмотрении частиц сложного строения и формы задача состоит в нахождении явного выражения для возмущающего потенциала, который создает отдельная частица в конкретных случаях, а для его вычисления необходимо решить достаточно сложную задачу электростатики. Такие исследования выполнялись многими авторами. Центральное место в литературе занимают сплошные сферические частицы [2, 3], частицы в оболочке [2, 5], частицы, образованные конфокальными сферами, частицы с диэлектрически-анизотропными характеристиками и непрерывно изменяющейся ДП [5–9]. Для сферических частиц наиболее удобным методом решения соответствующих краевых задач является метод разделения переменных с применением разложений по присоединенным функциям Лежандра.

Несколько меньше исследованы эллипсоидальные частицы [10], частицы с полупроводниковой оболочкой, с поверхностными неоднородностями и зарядами [11]. Рассеяние света на частицах произвольной формы рассмотрено в [12].

Приведенный краткий обзор состояния вопроса показывает, что частицы с произвольным распределением поверхностного заряда изучены недостаточно и нуждаются в дополнительных исследованиях.

4. Общая схема решения задачи для сферических частиц с произвольными распределениями зарядов и внешнего поля

Потенциалы и функцию распределения поверхностного заряда представим в виде разложений по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta,\varphi)=$ $=P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$, $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра [12]:

$$u_1(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}^{(1)}\left(r/a\right)^l Y_{lm}(\theta,\varphi),$$
$$u_p(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}B_{lm}^{(n+1)}\left(a/r\right)^{l+1}Y_{lm}(\theta,\varphi). \quad (9)$$

При действии произвольного внешнего поля на поверхности шара, т. е. при $r = a$, его потенциал $u_0(r,\theta,\varphi)$ и частная производная $\partial u_0(r,\theta,\varphi)/\partial r$ будут задавать некоторые функции $F(\theta,\varphi) = u_0(a,\theta,\varphi)$, $G(\theta,\varphi) = \partial u_0(a,\theta,\varphi)/\partial r$, которые можно разложить в ряд по сферическим гармоникам

$$F(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l} f_{lm} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

$$G(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l} g_{lm} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (10)$$

Аналогично записывается и разложение поверхностного заряда

$$\sigma(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l} \sigma_{lm} P_l^{|m|}(\cos) e^{im\varphi}, \quad (11)$$

Коэффициенты f_{lm}, g_{lm}, σ_{lm} вычисляются по известным формулам [12]. Подстановка разложений (9), (10) в условия (5) приводит к независимым алгебраическим системам вида

$$A_{lm} = f_{lm} + B_{lm},$$
$$\varepsilon_1 l A_{lm} + \varepsilon_m (l+1) B_{lm} = \varepsilon_m a g_{lm} - 4\pi a \sigma_{lm}/\varepsilon_0. \quad (12)$$

Решение системы дает значения коэффициентов разложений возмущающего потенциала

$$B_{lm} = \frac{\varepsilon_m a g_{mn} - \varepsilon_1 l f_{lm}}{\varepsilon_m (l+1) + \varepsilon_1 l} - \frac{4\pi a \sigma_{lm}/\varepsilon_0}{\varepsilon_m (l+1) + \varepsilon_1 l}, \quad (13)$$

Коэффициенты (13) и определяют выражения для мультипольной поляризуемости заряженных частиц.

5. Результаты исследований для постоянного внешнего поля

Рассмотрим подробнее постоянное внешнее поле, которое считаем действующим вдоль оси z, и практически важный случай равномерного распределения поверхностного заряда $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Тогда в разложениях (8) остается только один член с индексами $l = 0, m = 0$, для которого $P_0^0 = 1$.

Потенциал внешнего поля равен $u_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$. Следовательно, в разложениях σ и u_0 будем иметь

$$\sigma = \sigma Y_{00}, l = 0, m = 0, \; u_0 = -E_0 r Y_{10}, l = 1, m = 0. \quad (14)$$

Система (12) будет состоять из четырех уравнений

$$A_{00} = B_{00}, \; \varepsilon_1 A_{00} - \varepsilon_m B_{00} = -4\pi\sigma_{00}/\varepsilon_0,$$
$$A_{10} = -E_0 a + B_{10}, \; \varepsilon_1 A_{10} = -\varepsilon_m E_0 a - 2\varepsilon_m B_{10}. \quad (15)$$

Ее решение дает значения двух отличных от нуля коэффициентов разложения возмущающего потенциала, которое имеет вид

$$u_p = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)} \cdot \frac{a}{r} + E_0 a \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{2\varepsilon_m + \varepsilon_1} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos\theta. \quad (16)$$

В выражении (16) первое слагаемое связано с поверхностным зарядом, не зависит от внешнего поля и убывает на бесконечности пропорционально $1/r$, как и потенциал точечного заряда. Это так называемый поляризационный нуль-момент. Второе слагаемое есть не что иное, как поляризуемость диэлектрического шара в однородном поле.

Во втором случае будем считать, что поверхностный заряд распределен по поверхности шара в соответствии с законом $\sigma = \sigma_1 \cos\theta$. Тогда в постоянном поле для определения коэффициентов потенциалов

$$u_1 = A_{10} r\cos\theta, \; u_p = (B_{10}/r^2)\cos\theta \quad (17)$$

будем иметь систему двух уравнений

$$A_{10} a - B_{10}/a^2 = -E_0 a,$$
$$\varepsilon_1 A_{10} + 2(\varepsilon_m/a^3) B_{10} = -\varepsilon_m E_0 - 4\pi\sigma_1/\varepsilon_0. \quad (18)$$

По сравнению с аналогичной системой для сферы без заряда в правой части второго уравнения присутствует слагаемое $-4\pi\sigma_{10}$. Из системы (18) находится коэффициент B_{10}, и выражение для возмущающего потенциала принимает вид

$$u_p = -E_0 a^3 \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_1 + 4\pi\sigma_1/\varepsilon_0}{2\varepsilon_m + \varepsilon_1} \cdot \frac{1}{r^2} \cos\theta. \quad (19)$$

Следовательно, поляризуемость заряженной сферы при выбранном распределении поверхностного заряда будет определяться формулой

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m - 4\pi\sigma_1/\varepsilon_0}{2\varepsilon_m + \varepsilon_1}. \quad (20)$$

Относительный вклад в общую поляризуемость шара, который дает присутствие заряда, составляет

$$\frac{\alpha_\sigma}{\alpha} = -4\pi \frac{\sigma_1/\varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_m - 4\pi\sigma_1/\varepsilon_0} = \frac{1}{1 - \varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)/(4\pi\sigma_1)} \quad (21)$$

и, следовательно, определяется отношением $(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)/(4\pi\sigma_0)$. Если $(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)/(4\pi\sigma_0) \to 1$ этот вклад неограниченно возрастает.

Определенный интерес вызывает случай шара, на поверхности которого зафиксировано N точечных зарядов q_j, $j = 1, 2, ..., N$. Тогда распределение поверхностного заряда можно записать с помощью двумерных δ - функций, определенных на поверхности шара ($0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$)

$$\sigma(\theta,\varphi) = \sum_{j=1}^{N} q_j \delta(\theta - \theta_j, \varphi - \varphi_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} q_j \delta(\theta - \theta_j) \cdot \delta(\varphi - \varphi_j). \quad (22)$$

Выражение для коэффициентов разложения поверхностного заряда с учетом свойств δ - функции имеет вид

$$\sigma_{lm} = \sum_{j=1}^{N} q_j \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} e^{im\varphi_j} P_l^{(m)}(\cos\theta_j)\sin\theta_j . \quad (23)$$

Для поля с постоянной электрической напряженностью разложения потенциала и его производной на поверхности шара содержат по одному отличного от нуля члену ряда с индексами $l=1, m=0$ и коэффициентами $f_{10} = -E_0 a$, $g_{10} = -E_0$. Поэтому из первого уравнения системы (12) следует, что $A_{10} = f_{10} + B_{10}$ и $A_{lm} = B_{lm}$ в остальных случаях. Тогда из второго уравнения системы находим

$$B_{10} = \frac{\varepsilon_m a g_{10} - \varepsilon_1 f_{10}}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_m} - \frac{4\pi a \sigma_{10} / \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_m},$$

$$B_{lm} = -\frac{4\pi a \sigma_{lm} / \varepsilon_0}{\varepsilon_m (l+1) + \varepsilon_1 l}, \; l \neq 1, \; m \neq 0 . \quad (24)$$

Следовательно, в постоянном поле, действующем вдоль оси z, в соответствии с представлением (9), если выделить слагаемые, не содержащие коэффициентов разложений зарядов, возмущающий потенциал можно представить в виде

$$u_p(r,\theta,\varphi) = \frac{\varepsilon_m a g_{10} - \varepsilon_1 f_{10}}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_m} (a/r)^2 \cos\theta +$$
$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi a \sigma_{lm} / \varepsilon_0}{\varepsilon_m (l+1) + \varepsilon_1 l} (a/r)^{l+1} Y_{lm}(\theta,\varphi) . \quad (25)$$

Первое слагаемое определяет поляризуемость незаряженной сферы, а второе (ряд) учитывает число и размещение зарядов на поверхности частицы. Учитывая выражения для коэффициентов f_{10}, g_{10} и B_{lm}, получим

$$u_p(r,\theta,\varphi) = E_0 a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_m} \frac{1}{r^2} \cos\theta -$$
$$-4\pi \sum_{j=1}^{N} q_j \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2l+1}{\varepsilon_m (l+1) + \varepsilon_1} e^{im\varphi_j} P_l^{(m)}(\cos\theta_j)\sin\theta_j \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right\} . \quad (26)$$

Таким образом, поляризуемость будет определяться всей системой точечных зарядов и вкладом каждого из них в общую величину.

6. Выводы

Полученные в статье аналитические решения для некоторых функций распределения зарядов по поверхности сферических частиц дают возможность определить их поляризуемость и прогнозировать свойства гетерогенных материалов и матрично-дисперсных систем, в частности, биологических объектов.

В последнем случае предполагается, что живая клетка организма – это некоторая малая сферическая частица, которой приписываются определенные свойства. Клетка действительно несет на себе заряды, и от их распределения при воздействии даже слабых электромагнитных полей зависит ее жизнедеятельность. Задача теоретиков показать путь медикам и биологам для дальнейших исследований в этом направлении. Здесь на первое место выдвигается онкология, так как, возможно, именно изменение поверхностного заряда клетки и приводит к возникновению онкологических клеток.

Литература

1. Прохоров, А. М. Большая физическая энциклопедия. В 5-ти т. [Текст] / А. М. Прохоров. – М.: «Советская энциклопедия», 1988. – 691 с.

2. Bohren, C. F. Absorption and Scattering of Light by Small Particles [Text] / C. F. Bohren, D. R. Huffman. – Chichester, UK: Wiley Science Paperback Series, 1998. – 530 p.

3. Венгер, Е. Ф. Оптика малих частинок і дисперсних середовищ [Текст] / Е. Ф. Венгер, А. В. Гончаренко, М. Л. Дмитрук. – Київ: Наук. думка, 1999. – 348 с.

4. Лерман, Л. Б. Особливості взаємодії електромагнітного випромінювання з малими частинками та їх ансамблями: теоретичні аспекти [Текст] / Л. Б. Лерман, О. Ю. Грищук, Н. Г. Шкода, С. В. Шостак // Успехи физики металлов. – 2012 – Т. 13, № 1. – С. 71–100.

5. Grechko, L. G. Surface plasmons in assemblies of small particles [Text] / L. G. Grechko, E. Yu. Grischuk, L. B. Lerman et. al. // SpringerLink. – Book Chapter, 2009. – P. 1–33. – Available at: htpp:/www.springerlink/ j61265 t8020j7148

6. Гречко, Л. Г. Розсіювання електромагнітного випромінювання на багатошаровій кулі [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Н. Г. Шкода // Вісн. Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. – 2004. – № 3. – С. 376–385.

7. Гречко, Л. Г. Поляризовність структурно-неоднорідних кульових частинок [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Д. Л. Водоп′янов, С. В. Шостак // Вісн. Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. наук. – 2007. – Вип. 1. – С. 226–233.

8. Гречко, Л. Г. Поверхневі моди в багатошарових частинках еліпсоїдальної форми [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Л. М. Білокриницька та ін. // Вісн. Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. – 2006. – № 4. – С. 416–425.

9. Гончарук, Ю. С. Максвелл-Вагнеровська поляризація матричних дисперсних систем з кульовими напівпровідниковими включеннями в електричному полі [Текст] / Ю. С. Гончарук, Л. Г. Гречко, О. Ю. Грищук та ін. // Вісн. Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. – 2006. – № 2. – С. 376−384.

10. Гречко, Л. Г. Багатошаровий еліпсоїд в електростатичному полі [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Н. Г. Шкода // Вісн. Київського у-ту. Сер. фіз.-мат. – 2004. – № 1. – С. 386−394.

11. Mischenko, M. I. Light Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements and Application [Text] / M. I. Mischenko, J. W. Hovenier, L. D. Travis. – New York: Academic Press, 2000 – 567 p.

12. Корн, Г. Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. − М.: Наука, 1973. − 831 с.

References

1. Prochorov, A. M. (1988). Big phisical encyclopedia. In 5-th V. Moscow: «Soviet encyclopedia», 691.

2. Bohren, C. F., Huffman, D. R. (1988). Absorption and Scattering of Light by Small Particles. Chichester, UK: Wiley Science Paperback Series, 530.

3. Venger, E. F., Goncharenko, A. V., Dmitruk, M. L. (1999). Optics of Small Particles anddispersion medium. Kyiv: Naukova dumka, 348.

4. Lerman, L. B., Grischuk, O. Yu., Shkoda, N. G. (2012). Feature of electromagnetic radiation interacion with small particles and their ensembles: theotetical aspects. Physics of Metal Successes, 13 (1), 71–100.

5. Grechko, L. G., Grischuk, E. Yu., Lerman, L. B. et. al. (2009). Surface plasmons in assemblies of small particles. SpringerLink,Book Chapter, 1–33. Available at: htpp:/www.springerlink/j61265t8020j7148

6. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Shkoda, N. G. (2004). Scattering of electromagnetic waves on multilayered sphere. Bulletin of University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, 3, 376–385.

7. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Vodopyanov, D. L. et. al. (2007). Polarizability of structurally-heterogeneous spherical particles. Bulletin of University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, 1, 226–233.

8. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Bilokrinizka, L. M. (2006). Surfaces modes in ellipsoidal multi-layered small particles. Bulletin of University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, 4, 416–425.

9. Goncharuk, Yu. S., Grechko, L. G., Grischuk, O. Yu. et. al. (2006). Maxwell-Vagner polarization of matrix-disperse systems with spherical semi-conductor particles in electric field. Bulletin of University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, 2, 376–384.

10. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Shkoda, N. G. (2004). Multi-layered ellipsoid in electric field. Bulletin of University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, 1, 386–394.

11. Mischenko, M. I., Hovenier, J. W., Light, L. D. (2000) Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements and Application. Travis. New York: Academic Press, 567.

12. Korn, A., Korn, M. (1973). Mathematical handbook. Moscow: Nauka, 831.

Рекомендовано до публікації д-р фіз.-мат наук В. М. Розенбаум
Дата надходження рукопису 15.03.2015

Криворучко Яніна Сергіївна, завідувач кафедри, кандидат фізико-математичних наук, кафедра природничо-математичних дисциплін, Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України «Немішаївський агротехнічний коледж», вул. Технікумівська, 4, Бородянський р-н, обл. Київська, Україна, 07854
E-mail: krayana@ukr.net

Лерман Леонід Борисович, кандидат техн. наук, старший науковий співробітник, відділ «Теорія наноструктурних систем», Інститут хімії поверхні ім. О. О. Чуйка НАН України, вул. Генерала Наумова, 17, м. Київ, Україна, 02124