

10. Kovalenko, V. I., Marynin, V. G. (1998). Obladnannja dlja doslidzhennja erozii' pokryttiv pry mikro udarnomu dijanni. Voprosy atomnoj nauky y tehnyky, 5, 83–89.

11. Marinin, V. G., Kovalenko, V. I. (2013). Cavitation resistance of vacuum-arc coverings deposited on substrate of different orientation. Technology audit and production reserves, 4/2 (12), 15–18. Available at: <http://journals.uran.ua/tarp/article/view/16243/13672>

12. Pogrebnjak, A. D., Shpak, A. P., Azarenkov, N. A., Beresnev, V. M. (2009). Struktura i svojstva tverdyh i sverhtverdyh nanokompozitnyh pokrytij. Uspehi fizicheskikh nauk, 179 (1), 35–64. doi: 10.3367/ufnr.0179.200901b.0035

13. Musiel, J., Vlček, J., Ježek, V., Benda, M., Kolega, M., Boomsma, R. (1995). Production of Ti films with controlled texture. Surface and Coatings Technology, 76-77, 274–279. doi: 10.1016/0257-8972(95)02582-0

Дата надходження рукопису 18.04.2016

Андреев Анатолий Афанасьевич, доктор технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник отдела, Отдел интенсивных вакуумно-плазменных технологий, Институт физики твердого тела, материаловедения и технологий, Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», ул. Академическая, 1, г. Харьков, Украина, 61108
E-mail: aandreev@kipt.kharkov.ua

Коваленко Владимир Иванович, научный сотрудник отдела, Отдел интенсивных вакуумно-плазменных технологий, Институт физики твердого тела, материаловедения и технологий, Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», ул. Академическая, 1, г. Харьков, Украина, 61108
E-mail: kartmazov@kipt.kharkov.ua

Маринин Владимир Григорьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Отдел интенсивных вакуумно-плазменных технологий, Институт физики твердого тела, материаловедения и технологий, Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», ул. Академическая, 1, г. Харьков, Украина, 61108
E-mail: marinin@kipt.kharkov.ua

Мартыненко Людмила Ивановна, заместитель начальника отдела, Отдел интенсивных вакуумно-плазменных технологий, Институт физики твердого тела, материаловедения и технологий, Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», ул. Академическая, 1, г. Харьков, Украина, 61108

Столбовой Вячеслав Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела, Отдел интенсивных вакуумно-плазменных технологий, Институт физики твердого тела, материаловедения и технологий, Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», ул. Академическая, 1, г. Харьков, Украина, 61108

УДК 519.64.539.3

DOI: 10.15587/2313-8416.2016.69828

МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРИМЕНЕНИИ К ДИФРАКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН

© А. М. Назаренко, В. О. Мищенко

Энергетический метод использует теорему взаимности работ и преобразование возникающих гиперсингулярных интегралов для получения системы уравнений, состоящей из сингулярных интегральных уравнений первого и второго рода. Алгоритмы численного решения получаются методом дискретных особенностей. Точность вычислений контролируется за счёт алгоритмической диверсности. Показано приложение к численному моделированию дифракции стационарных плоских волн на конечных и периодических системах неоднородностей разных типов

Ключевые слова: дифракция упругих волн, неоднородности, метод энергетического моделирования, плоская деформация, напряжения

The energy method uses reciprocity works theorem and transformation of occurring hypersingular integrals for a system of equations consisting of singular integral equations of the first and second kind. Algorithms for the numerical solution are obtained by the method of discrete singularities. Precision of calculations is controlled due to algorithmic diversity. Application to the numerical modeling of diffraction of stationary plane waves on finite and periodic systems of different inhomogeneities is shown

Keywords: diffraction of elastic waves, inhomogeneities, energy modeling method, plane strain, stresses

1. Введение

В практике проектирования конструкций, работающих в условиях динамического, как правило, гармонически изменяющегося нагружения, необходимо учитывать наличие в материале различных концентраторов напряжений (трещин, включений, отверстий). Часто при этом физические методы исследования готовых конструкций или проведение экспериментального исследования образцов невозможны или непозволительно дороги. В последнее время всё более востребованным становится численное (компьютерное) моделирование, которое тем привлекательнее для инженеров и конструкторов, чем больше альтернативных вариантов постановки задачи может решаться используемым методом и чем проще перенастраивать программную систему для проведения вычислительных экспериментов.

Поэтому актуально создание и компьютерная реализация таких методов математического моделирования процессов дифракции упругих волн на неоднородностях в твёрдом теле, которые универсально применимы к разным типам волновых процессов и разным типам неоднородностей.

2. Анализ публикаций и постановка проблемы

Хорошо известны следующие методы математического моделирования дифракции упругих волн на различного типа неоднородностях: метод разделения переменных [1], методы конечных разностей [2], методы конечных элементов [3], асимптотические методы [4]. Возможности их применения в некоторых важных для практики случаях имеют ограничения. Основные результаты в последние годы получены на основе СИУ [5]. При этом после сведения задачи к СИУ, её дискретную модель можно получить методом механических квадратур или методами дискретных особенностей (МДО) [6–8]. Замечательно, что компьютерное моделирование дифракционных процессов на основе МДО может быть ускорено на порядок даже на персональных компьютерах за счёт исследования их архитектурных особенностей [9].

Существующие методы обычно используют те или иные интегральные представления функций, выбранные для решения конкретной дифракционной задачи. В случае плоской деформации распространёнными методами исследования дифрагированного волнового поля являются метод разрывных решений [10] и метод специальных интегральных представлений волновых потенциалов [11, 12]. Однако в этих методах способы построения интегральных представлений разрешающих функций, характеризующих возмущенное волновое поле, зависят от типа неоднородностей. Возникают также специфические трудности, если одновременно учитываются неоднородности разных типов.

Вследствие указанных обстоятельств ряд задач дифракции плоских волн в упругом теле с неоднородными включениями разных видов в 2D постановке, в частности, периодические задачи, оставались вовсе или недостаточно изученными другими учё-

ными с точки зрения распределения напряжений на границах неоднородностей. Благодаря единому энергетическому методу моделирования мы имеем возможность выполнять исследование, не выделяя отдельные типы неоднородностей и волн вплоть до момента записи конкретной системы граничных сингулярных интегральных уравнений. Потом, при записи таких уравнений данный метод позволяет прозрачно учесть специфику краевых условий на различных неоднородностях. Т. е., исследование систем неоднородностей разного типа в задачах дифракции плоских волн на цилиндрических неоднородностях не только актуально, но найденным нами методом выполнимо.

3. Исходная краевая задача и задачи исследования

С целью моделирования дифракционного процесса рассмотрим в неограниченной среде систему бесконечных вдоль оси X_3 цилиндрических включений с ограниченными замкнутыми или разомкнутыми об-

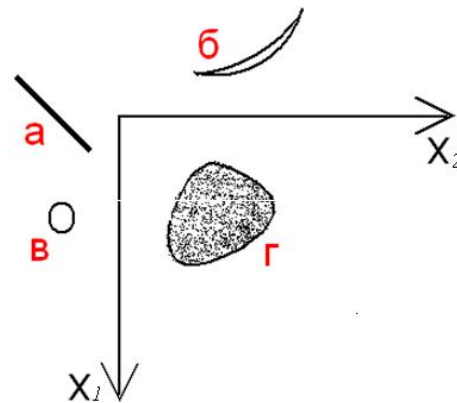


Рис. 1. Система неоднородностей в неограниченной упругой среде: а – жесткое включение; б – трещина; в – полость; г – упругое включение

Пусть из бесконечности на такую систему набегает монохроматическая гармоническая волна (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$) расширения-сжатия (P – случай):

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1^{(0)} x_2}, \gamma_1^{(0)} = \omega/c_1^{(0)}, \tau_1 = const \quad (1)$$

или сдвига (SV - случай):

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2^{(0)} x_2}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2^{(0)} = \omega/c_2^{(0)}, \tau_2 = const, \quad (2)$$

где $c_1^{(0)}$ и $c_2^{(0)}$ – скорости P - и SV - волн в матрице.

При взаимодействии проходящей волны с цилиндрами возникают отраженные и проходящие внутрь цилиндров (если они являются упругими включениями) волны двух типов: продольные и поперечные, причем другие типы волн не образуются. Пусть $U_1^{(k)}$ и $U_2^{(k)}$ – амплитуды перемещений отра-

женного ($k=1$) и проникающего внутрь упругих включений ($k=2$) полей соответственно. Тогда общее поле перемещений $U = (U_1, U_2)'$ равно

$$(U_1^{(1)} + U_1^{(0)}, U_2^{(1)} + U_2^{(0)})'$$

в матрице и $(U_1^{(2)}, U_2^{(2)})'$ внутри упругих включений.

Компоненты вектора U удовлетворяют уравнениям движения [19]:

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U + \rho \omega^2 U + f = A[U] + \mathbf{f} = 0, \quad (3)$$

где λ и μ – постоянные Ламе; ρ – плотность среды; ω – частота колебаний; $f = (f_1, f_2)'$ – объемная сила.

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений с помощью формул

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial z} + \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial \bar{z}} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -4\mu \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial z},$$

$$z = x_1 + ix_2,$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = -4\mu \frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial \bar{z}},$$

$$\bar{z} = x_1 - ix_2.$$

Пусть L – некоторая кривая на плоскости X_1X_2 . Обозначим через S_1 и S_2 амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений S на L . Тогда в произвольной точке кривой $\zeta_0 \in L$ эти напряжения выражаются через компоненты тензора напряжений:

$$2i(S_1 + iS_2) = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) e^{i\phi_0} + (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12}) e^{-i\phi_0}, \quad (5)$$

$$-2i(S_1 - iS_2) = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) e^{-i\phi_0} + (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) e^{i\phi_0}.$$

Здесь ϕ_0 – угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 \in L$ с осью X_1 .

На границе замкнутых неоднородностей представляют интерес также распределения амплитуд напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{n_0} &= S_1 \sin \phi_0 - S_2 \cos \phi_0, \quad \sigma_{s_0} = \sigma_{11} + \sigma_{22} - \sigma_{n_0}, \\ \sigma_{n_0 s_0} &= S_1 \cos \phi_0 + S_2 \sin \phi_0 \end{aligned} \quad (6)$$

связанных с координатами s_0 и n_0 на L .

Сформулируем теперь граничные условия на контурах неоднородностей. Пусть $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ – точка кривой L , в которой мы будем удовлетворять граничные условия.

1. На границе раздела двух сред (матрица – упругое включение) моделируем условия контакта типа склейки – непрерывность при переходе через границу L области включения вектора перемещений $U = (U_1, U_2)'$ и вектора напряжений $S = (S_1, S_2)'$:

$$(U_m^{(1)} + U_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = (U_m^{(2)})_{z \rightarrow \zeta_0},$$

$$(S_m^{(1)} + S_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = (S_m^{(2)})_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad m = 1, 2. \quad (7)$$

Соотношения (7) следует понимать как равенства граничных значений соответствующих величин при стремлении к точке $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ точки наблюдения $z = x_1 + ix_2$, которая при этом всё время должна оставаться вне (область D_1) или внутри (область D_2) границы L .

2. На границе L неподвижного включения перемещения обращаются в ноль:

$$(U_m^{(1)} + U_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = 0, \quad z \in D_1, \quad m = 1, 2. \quad (8)$$

3. На контуре L жесткого подвижного включения граничные условия вытекают из уравнений движения абсолютно жесткого тела:

$$(U_1^{(1)} + U_1^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = B_1 - \omega_e \eta_0,$$

$$(U_2^{(1)} + U_2^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = B_2 + \omega_e \xi_0. \quad (9)$$

Здесь предполагается, что включение с границей L перемещается и поворачивается вместе с матрицей; B_1 и B_2 – амплитуды поступательного движения, ω_e – амплитуда жесткого поворота этого включения.

В случае (9) на основании второго закона Ньютона для поступательного движения включения имеем:

$$\int_L S_m ds_0 = -qB_m, \quad q = \omega^2 \rho_e S_e, \quad m = 1, 2. \quad (10)$$

Уравнение, описывающее вращательное движение жесткого включения, имеет вид:

$$\int_L (S_1(\eta_0 - x_{20}) - S_2(\xi_0 - x_{10})) ds_0 = -\omega^2 J_e \omega_e, \quad (11)$$

где ρ_e – плотность, S_e – площадь, J_e – момент инерции включения D_2 относительно произвольной точки $A(x_{10}, x_{20})$.

Дополнительные соотношения (10), (11) необходимо использовать для определения неизвестных постоянных B_1 , B_2 и ω_e в (9).

4. На границе L полости обращаются в нуль компоненты вектора напряжений:

$$(S_m^{(1)} + S_m^{(0)})_{z \rightarrow z_0} = 0, \quad z \in D_1, \quad z_0 \in L, \quad m = 1, 2. \quad (12)$$

5. В случае криволинейного жесткого включения граничные условия на L имеют вид (9), а неизвестные постоянные, характеризующие поступательные и вращательные движения данного включения определяются из условия равенства нулю результирующих сил и момента сил, действующих на L . Берега каждой криволинейной трещины-разреза предполагаются свободными от сил (12), а необходимые дополнительные условия для однозначной разрешимости СИУ первого рода будут вытекать из условия равенства нулю скачков перемещений в вершинах этой трещины.

Однозначная разрешимость краевых задач для уравнений (3) для отраженного и проникающего полей при любом наборе конечной системы неоднородностей обеспечивается условиями подобия отраженного поля расходящейся цилиндрической волне (условие на бесконечности типа Зоммерфельда) и локальной принадлежности Соболевскому классу W_2^2 .

3. Методы исследования

Энергетический метод моделирования, который не сразу достиг методической зрелости, фактически сложился в период с 1990 по 2015 г. в ряде работ, начиная с [13], и к настоящему времени уже позволил построить вычислительные методы для широких классов задач (например, [13–19]). Отличительной чертой этого метода является построение интегральных представлений перемещений дифрагированного волнового поля с помощью теоремы взаимности работ [20] для двух различных состояний механической системы с тем, чтобы выразить указанные перемещения в интегральной форме через кинематические и силовые величины. Таким способом удаётся получить интегральные представления перемещений, обладающие желательными свойствами.

Теорема взаимности работ для систем уравнений (3) представляет собой аналог формулы Грина в теории уравнения Пуассона-Лапласа. Она применяется нами для получения сингулярной системы граничных интегральных уравнений по следующей схеме. Введём над вектор-функциями перемещений дифференциальную операцию

$$A[U] = (\Lambda_1[U_1], \Lambda_2[U_2])'$$

Тогда для замкнутого контура $L = \partial D$, лежащего в области выполнения (3) для пары перемещений U, V , соответствующих полям объёмных сил f, g , по обобщенной теореме Стокса имеем

$$\begin{aligned} \langle g, U \rangle &= - \int_D (\Lambda_1 [V_1] \cdot U_1 + \Lambda_2 [V_2] \cdot U_2) dv = \\ &= - \int_D (V_1 \cdot \Lambda_1 [U_1] + U_2 \cdot \Lambda_2 [U_2]) dv + \\ &+ \mathfrak{Z}_L(V, U) = \langle V, f \rangle + \mathfrak{Z}_L(V, U), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathfrak{Z}_L(V, U)$ – билинейная форма, представляющая собой интеграл по контуру от произведений компонент перемещений на их частные производные.

Подынтегральное выражение можно привести к виду произведений компонента перемещений на компоненты вектора напряжений S (5). Выбор в качестве V фундаментального (параметризованного координатами особенности) решения, «подправленного» для выполнения граничных условий на границах неоднородностей (специальная функция Грина конкретной задачи), превращает (13) в интегральное представление для U . Его следует дважды применить, выбирая контуры для границ областей так, как показано для примера на рис. 2 (ABCDEFHIA и AIHGFEDCBA). Точнее, вначале необходимо отступить от берегов разрезов в глубь областей на ε .

Ясно, что для одной из областей (в которую особенность не попала) интеграл по замкнутому контуру обнулится, но вычитание полученных выражений приведёт к новому интегральному представлению, в котором после предельного перехода $R \rightarrow \infty$ можно избавиться от интегралов по окружности радиуса R . Однако затруднение, которого старались избежать многие исследователи данной предметной области, состоит в том, что интегралы, содержащие производные функции Грина, не имеют конечных пределов при натягивании контуров на границы неоднородностей. Однако, следуя известному приёму Адамара, можно добавлять и вычитать выражения, которые при предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$ дадут т. н. конечные части интегралов, а тогда окажется, что все «мешающие» члены представления уходят. Более того, удаётся обосновать возможность «перебросить» производные с функции Грина на перемещение, с результатом, как при использовании обобщенной теоремы Стокса.

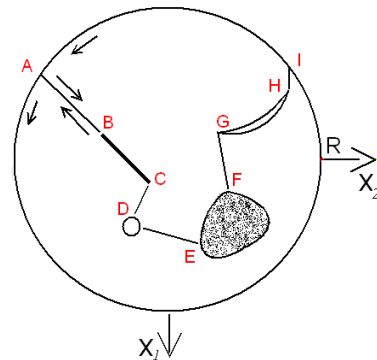


Рис. 2. Два замкнутых контура с общими участками и дугowymi участками радиуса R , имея в виду устремить потом $R \rightarrow \infty$

В результате для неоднородностей рассматриваемых типов дифрагированное поле перемещений представимо в виде (предполагая суммирование по повторяющемуся индексу):

$$\begin{aligned} U_m^k(p) &= \int_{L^{(1)}} f_n^{(k)}(s) G_{mn}^{(k)}(P, Q) ds + \\ &+ \delta_{1k} \left(\int_{L^{(3)}} f_n(s) G_{mn}^{(1)}(P, Q) ds - \int_{L^{(4)}} g_n(s) S_{mn}^{(1)}(P, Q) ds \right), \end{aligned}$$

$$f_n(s)=[S_n], g_n(s)=[U_n], k, m=1, 2. \quad (14)$$

Здесь $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, $L^{(3)}$ и $L^{(4)}$ – совокупности границ упругих включений, полостей, жестких включений и криволинейных трещин соответственно; δ_{lk} – символ Кронекера; перемещения вычисляются в точке области $P(x_1, x_2)$, а интегрирование проводится по точкам $Q(\xi, \eta)$; $[U_n]$ – скачки амплитуд, перемещений на трещине совокупности $L^{(4)}$, $[S_n]$ – скачки амплитуд напряжений на криволинейном жестком включении совокупности $L^{(3)}$ ($n=1,2$); $G_{mm}^{(k)}$ – амплитуда перемещения вдоль оси X_m при действии гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке Q и направленной вдоль оси X_n (n -е состояние); $S_{mm}^{(1)}$ – компоненты вектора напряжений S , соответствующие перемещениям $G_{mm}^{(1)}$.

Удовлетворение граничных условий по перемещениям на соответствующей совокупности контуров приводит к интегральным уравнениям с логарифмическими особенностями. С целью получения СИУ 1-го рода указанные уравнения дифференцировались по дуговой координате. Необходимые дополнительные условия для однозначной разрешимости СИУ 1-го рода вытекают из эквивалентности последних и соответствующих интегральных уравнений с логарифмическими особенностями в случае упругих включений; из (10), (11) в случае замкнутых жестких включений и из равенства нулю главного вектора сил и момента сил, действующих на криволинейном жестком включении совокупности $L^{(3)}$. Удовлетворение граничных условий по напряжениям приводит к СИУ 2-го рода в случае упругих включений и полостей и к СИУ 1-го рода в случае криволинейной трещины совокупности $L^{(4)}$.

В качестве примера рассмотрим $2d$ -периодическую решетку, состоящую из однородных полостей или жестких включений (их границы входят в совокупность $L^{(2)}$ или $L^{(3)}$). В этом случае в интегральном представлении (14) $G_{mm}^{(1)}$ – элементы периодической матрицы Грина. Далее верхний индекс опускаем и запишем выражения для следующих комбинаций элементов матрицы Грина (суммирование по $n=1,2$):

$$G_{11} + G_{22} = h \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l^2 + \lambda_{nl}^2}{\lambda_{nl}} e^{i\lambda_{nl}|x_2-\eta|} \frac{\cos \alpha_l (x_1 - \xi)}{1 + \delta_{l0}},$$

$$G_{11} - G_{22} \pm 2iG_{12} =$$

$$= h \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha_l^2 - \lambda_{nl}^2}{\lambda_{nl}} e^{i\lambda_{nl}|x_2-\eta|} \times \frac{\cos \alpha_l (x_1 - \xi)}{1 + \delta_{l0}} \right)$$

$$\pm 2 \operatorname{sign}(x_2 - \eta) \times \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_l e^{i\lambda_{nl}|x_2-\eta|} \sin \alpha_l (x_1 - \xi),$$

$$\alpha_l = \frac{\pi l}{d}, \quad \lambda_{kl} = \sqrt{\gamma_k^2 - \alpha_l^2} \Leftrightarrow \gamma_k > \alpha_l,$$

$$\lambda_{kl} = i\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma_k^2} \Leftrightarrow \gamma_k < \alpha_l, k=1, 2. \quad (15)$$

При указанном в (15) выборе знаков для λ_{kl} поле, порождаемое периодической системой источников, носит характер расходящихся волн, что соответствует условиям излучения на бесконечности.

Присутствующий в (15) ряд, соответствующий $G_{11} + G_{22}$, в точке приложения сосредоточенного источника ($P=Q$) расходится (общий член ряда ведет себя как $1/l$). Для выделения логарифмической особенности и ускорения сходимости функциональных рядов-остатков выделим в комбинациях (15) статические члены, соответствующие значению $\omega=0$. Для них получены следующие выражения:

$$G_{11}^0 + G_{22}^0 = h_0 \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\chi}{\alpha_l} e^{-\alpha_l|x_2-\eta|} \cos \alpha_l (x_1 - \xi) - \chi |x_2 - \eta| \right),$$

$$G_{11}^0 - G_{22}^0 \pm 2iG_{12}^0 = -$$

$$-2h_0 |x_2 - \eta| \times \left(\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\alpha_l|x_2-\eta|} \cos \alpha_l (x_1 - \xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \mp i \operatorname{sign}(x_2 - \eta) \times \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\alpha_l|x_2-\eta|} \sin \alpha_l (x_1 - \xi) \right), \quad (16)$$

Здесь h , h_0 , χ – константы, зависящие от упругих постоянных среды.

Фигурирующие в (16) функциональные ряды можно просуммировать в явном виде. Находим

$$G_{11}^0 + G_{22}^0 = -\frac{2h_0\chi d}{\pi} \operatorname{Re} \left(\ln 2 \sin \frac{\pi(z-\zeta)}{2d} \right),$$

$$G_{11}^0 - G_{22}^0 + 2iG_{12}^0 = h_0 i (x_2 - \eta) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{z} - \bar{\zeta})}{2d},$$

$$G_{11}^0 - G_{22}^0 - 2iG_{12}^0 =$$

$$= -h_0 i (x_2 - \eta) \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \zeta)}{2d}. \quad (17)$$

Анализ полученных равенств показывает, что в точке $P=Q$ амплитуды G_{11}^0 , G_{22}^0 и их сумма $G_{11}^0 + G_{22}^0$ имеют логарифмическую особенность. Компоненты G_{12}^0 , G_{21}^0 и комбинации $G_{11}^0 - G_{22}^0 \pm 2iG_{12}^0$ являются непрерывными функциями.

Представляя в формулах (15)

$$G_{mm} = G_{mm}^0 + (G_{mm} - G_{mm}^0),$$

выделим там статические члены (16), которые суммируются в явном виде согласно (17), что приводит к следующим равенствам (суммирование по $n=1, 2$):

$$G_{11} + G_{22} = \frac{c(\lambda + \mu)}{2d} \left(\frac{\chi d}{\pi} \operatorname{Re} \left(\ln 2 \sin \frac{\pi(z-\zeta)}{2d} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_n e^{i\gamma_n|x_2-\eta|}}{2i(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} - \frac{\chi}{2} |x_2 - \eta| + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \frac{e^{i\lambda_{nl}|x_2-\eta|}}{i \lambda_{nl}} + \frac{\chi}{\alpha_l} e^{-\alpha_l|x_2-\eta|} \right) \times \cos \alpha_l (x_1 - \xi) \right),$$

$$\begin{aligned}
 G_{11} - G_{22} \pm 2iG_{12} = & \\
 = \frac{c(\lambda + \mu)}{2d} & \left\{ \frac{x_2 - \eta}{2i} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{z} - \bar{\zeta})}{2d} \right\} + \\
 + \frac{(-1)^n \gamma_n e^{i\gamma_n |x_2 - \eta|}}{2i(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} - \frac{|x_2 - \eta|}{2} & + \\
 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{((-1)^n \lambda_{nl}^2 - \alpha_l^2 e^{i\lambda_{nl} |x_2 - \eta|}}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} - \frac{1}{i \lambda_{nl}} & - \\
 - |x_2 - \eta| e^{-\alpha_l |x_2 - \eta|} \cos \alpha_l (x_1 - \xi) \pm & \\
 \pm \frac{\operatorname{sign}(x_2 - \eta)}{i} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\alpha_l}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \times & \\
 \times e^{i\lambda_{nl} |x_2 - \eta|} - |x_2 - \eta| e^{-\alpha_l |x_2 - \eta|} \sin \alpha_l (x_1 - \xi). & \quad (18)
 \end{aligned}$$

Если в точке $P=Q$ ряд, фигурирующий в выражении для $G_{11} + G_{22}$ в (15), расходился (общий член ряда ведет себя как $1/l$), то соответствующий этой сумме функциональный ряд в (18) сходится равномерно и абсолютно: при $P \neq Q$ в силу присутствия затухающих экспонент, а при $P=Q$ общий член ряда ведет себя как $1/l^3$. Таким образом, сумма $G_{11} + G_{22}$ в точке приложения сосредоточенного источника имеет логарифмическую особенность, соответствующую статическому случаю. Комбинации $G_{11} - G_{22} \pm 2iG_{12}$ в точке $P=Q$ являются непрерывными функциями.

Теперь удобно вместо представлений (14), которые мы рассматриваем в случае совокупности $L^{(2)}$ или $L^{(3)}$, перейти к интегральным представлениям для комбинаций $U_1^{(1)} \pm iU_2^{(1)}$. Для них находим:

$$\begin{aligned}
 U_1^{(1)} + iU_2^{(1)} = & \\
 = \frac{1}{2} \times \int_L \left(p_1(s)(G_{11}^{(1)} + G_{22}^{(1)}) + p_2(s)(G_{11}^{(1)} - G_{22}^{(1)} + 2iG_{12}^{(1)}) \right) ds, & \\
 U_1^{(1)} - iU_2^{(1)} = \frac{1}{2} \times & \\
 \times \int_L \left(p_1(s)(G_{11}^{(1)} - G_{22}^{(1)} - 2iG_{12}^{(1)}) + p_2(s)(G_{11}^{(1)} + G_{22}^{(1)}) \right) ds, & \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$p_1(s) = f_1(s) + i f_2(s), p_2(s) = f_1(s) - i f_2(s).$$

Здесь L – замкнутый контур центральной полости или жесткого включения соответствующей периодической решетки.

Подстановка интегральных представлений (19) в соответствующие граничные условия сводит рассматриваемые краевые задачи к системе двух СИУ 2-го рода в случае полостей и к системе двух СИУ 1-го рода в случае жестких включений. Необходимые дополнительные условия для СИУ 1-го рода вытекают из условий (10), (11).

Численная реализация построенных алгоритмов осуществлялась методом дискретных особенно-

стей (МДО) и механических квадратур [19] ради алгоритмической диверсности. На проведенных тестах оба продемонстрировали равноценную сходимость в зависимости от количества узлов колокации N на контурах (обычно точность вычислений 10^{-3} достигалась при $N=55$), причем оба требуют практически одинаковых вычислительных ресурсов (память, быстродействие). Однако для МДО имеется возможность использования программного компонента, обеспечивающего ускоренное выполнение на современном персональном компьютере [9]. Поэтому в качестве основного метода рекомендуем МДО, а при необходимости контролировать точность даже ценой многократного замедления работы, подключать метод механических квадратур.

Пусть неограниченная упругая среда, содержит бесконечную $2d$ -периодическую систему цилиндров эллиптического сечения. Параметрическое уравнение эллипса, находящегося в основном периоде, задавалось в виде:

$$\xi = a \sin \beta, \quad \eta = -b \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (20)$$

На границе центрального жесткого эллиптического включения и центральной эллиптической полости проводились вычисления максимальных безразмерных напряжений σ_n, σ_{ns} (рис. 3) и σ_s (рис. 4) соответственно в зависимости от $2d/\lambda_1$, которые получаются делением соответствующих амплитуд контурных напряжений на максимальное напряжение σ в падающей волне. Очевидно, $\sigma = \tau_1 \gamma_1^{(1)} (\lambda_1 + 2\mu_1)$ в случае набегания на цилиндры продольной волны (1) и $\sigma = \tau_2 \gamma_2^{(1)} \mu_1$, если из бесконечности излучается поперечная волна (2). Длина падающей волны $\lambda_1 = 2\pi/\gamma_1^{(1)}$ в P -случае и $\lambda_2 = 2\pi/\gamma_2^{(1)}$ в SV -случае. Выбирались следующие входные параметры:

$$a/d = 0,5; \quad b/a = 0,5; \quad \rho_e/\rho_l = 2,0.$$

Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям коэффициента Пуассона среды $\nu_1 = 0,1; 0,25$ и $0,4$ соответственно.

Вычисления показывают, что при дифракции плоской гармонической волны на периодической системе жестких цилиндрических включений и полостей наблюдается резкое увеличение максимальных контурных напряжений возле точек скольжения, что соответствуют значениям $2d/\lambda_1 = k$ и $2d/\lambda_2 = k$ ($k=1, 2, \dots$). В низкочастотной области с увеличением коэффициента Пуассона ν_1 наблюдается уменьшение максимальных напряжений. Кроме того, в области длинных волн с увеличением отношения периода решетки к длине набегающей волны значения максимальных контурных напряжений увеличиваются в случае периодической решетки, составленной из эллиптических жестких включений, и уменьшаются в случае периодической решетки, составленной из эллиптических полостей.

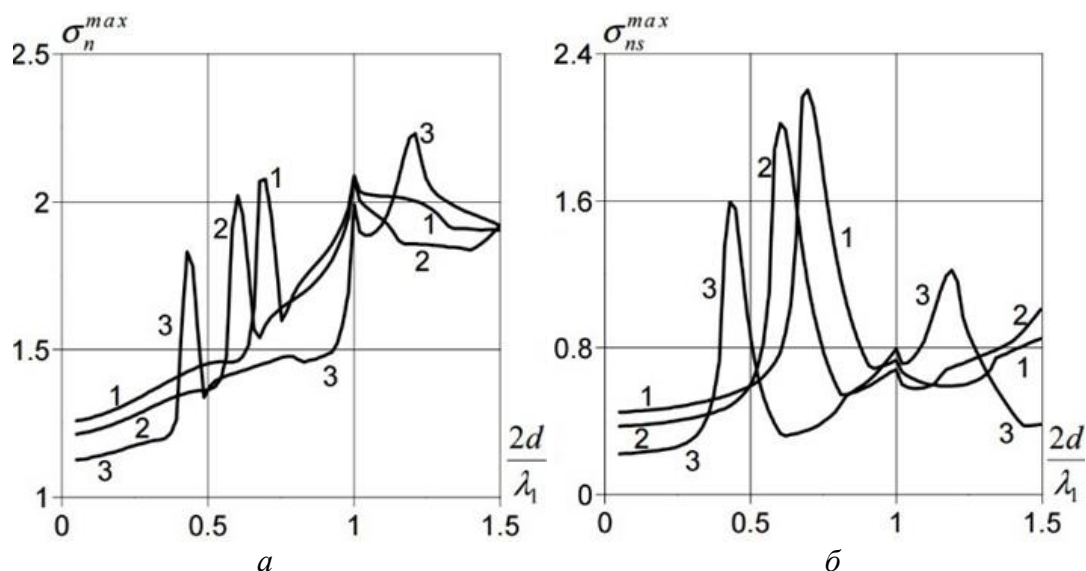


Рис. 3. Зависимость от максимальных напряжений на контуре эллиптического жесткого включения в случае Р-волны: а – для; б – для

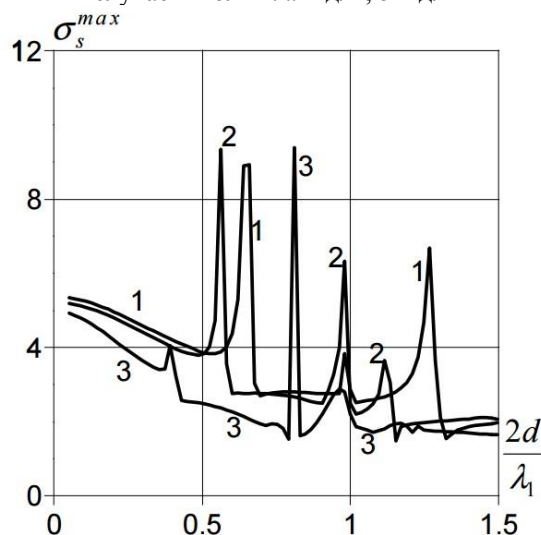


Рис. 4. Зависимость от максимальных напряжений на контуре эллиптической полости (в случае Р-волны)

5. Результаты исследований

Схема энергетического метода реализована и доведена до дискретных и компьютерных моделей дифракционных процессов на примере новых задач с периодическими системами неоднородностей. Показано, что в частном случае периодичной системы жестких арматурных прутьев решение базируется на системе двух граничных СИУ 1-го рода, тогда как линейно периодическая система параллельных полых каналов приводит к решению системы СИУ второго рода. Численное моделирование на основе МДО с диверсным контролем точности методом механических квадратур позволило выявить практически важные закономерности в распределении напряжений и наличие их скачков в зависимости от типа неоднородности, волнового диапазона и отношения периода решетки к длине набегающей волны. Показано, что максимальным напряжением на границах включений можно управлять выбором коэффициента Пуассона.

6. Выводы и перспективы дальнейших исследований

Для ряда задач дифракции стационарных плоских волн в упругом теле с неоднородными включениями разных видов (в 2D постановке) на основе энергетического метода моделирования разработаны методы вычисления напряжений, возникающих на границах включений в процессе их взаимодействия с волной. В совокупности с результатами работ этого направления прежних лет, полученные результаты позволяют говорить о создании единой методики решения 2D задач дифракции упругих волн, приводящей к системам граничных уравнений, включающих СИУ 1-го рода. В рассмотренной постановке исследуемые задачи впервые получили решение единообразным методом, что облегчило также программную реализацию и проведение численных экспериментов.

В качестве примера приложения результатов в работе исследовано влияние линейно-периодических

неоднородностей (жесткой арматуры или пустых каналов) на величину максимальных напряжений на их границах.

Литература

1. Гузь, А. Н. Дифракция упругих волн [Текст] / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко. – К.: Наук. думка, 1978. – 307 с.
2. Гладкий, А. В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов [Текст] / А. В. Гладкий, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 2001. – 453 с.
3. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
4. Подильчук, Ю. Н. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеивания волн [Текст] / Ю. Н. Подильчук, Ю. К. Рубцов // Прикл. механика. – 1996. – Т. 32, № 12. – С. 3–27.
5. Nazarchuk, Z. T. Singular integral equations in diffraction theory [Text] / Z. T. Nazarchuk // National Academy of Sciences of Ukraine, Karpenko Physico-Mechanical Institute. – 1994. – 210 p.
6. Belotserkovskii, S. M. Method of Discrete Vortices [Text] / S. M. Belotserkovskii, I. K. Lifanov // Boca Raton, CRC Press. – 1993. – 452 p.
7. Gandel, Yu. V. Boundary-value problems for the Helmholtz equation and their discrete mathematical models [Text] / Yu. V. Gandel // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 171, Issue 1. – P. 74–88. doi: 10.1007/s10958-010-0127-3
8. Гандель, Ю. В. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей [Текст] / Ю. В. Гандель, В. Д. Душкин. – Х.: АБВ МВСУ, 2012. – 544 с.
9. Mishchenko, V. O. Accelerating the computation of the discrete currents method by modification takes into account the architectural features of a modern PCs [Text] / V. O. Mishchenko, B. V. Patochkin // Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна. – 2015. – № 1056. – С. 129–139.
10. Попов, В. Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов [Текст] / В. Г. Попов // Мех. твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 118–129.
11. Фильштинский, Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях и включениях в изотропной среде [Текст] / Л. А. Фильштинский // Мех. твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119–127.
12. Shibahara, M. Application of the integral equation method to the elastodynamic boundary-value problems [Text] / M. Shibahara, Y. Taniuchi // Bull JSME. – 1983. – Vol. 26, Issue 222. – P. 2054–2059. doi: 10.1299/jsme1958.26.2054
13. Nazarenko, A. M. Diffraction of shear waves on cylindrical inclusions and cavities in an elastic half space [Text] / A. M. Nazarenko // Strength of Materials. – 1990. – Vol. 22, Issue 11. – P. 1669–1674. doi: 10.1007/bf00767156
14. Nazarenko, A. M. Dynamical problems of longitudinal shear of half space with nonhomogeneities [Text] / A. M. Nazarenko // Journal of Mathematical Science. – 1994. – Vol. 70, Issue 5. – P. 1985–1990. doi: 10.1007/bf02110825
15. Nazarenko, A. M. A problem of dynamic bending of a sheet with a curvilinear crack [Text] / A. M. Nazarenko, V. I. Ostrik // Soviet Material Science. – 1991. – Vol. 25, Issue 5. – P. 499–502. doi: 10.1007/bf00731941
16. Nazarenko, A. M. Plane problem of diffraction of elastic harmonic waves on periodic curvilinear inserts [Text] / A. M. Nazarenko, O. M. Lozhkin // Materials Science. – 2007. – Vol. 43, Issue 2. – P. 249–255. doi: 10.1007/s11003-007-0028-x
17. Назаренко, А. М. Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной изотропной среде [Текст] / А. М. Назаренко,

Б. Е. Панченко // Проблемы программирования. – Киев, 2010. – № 2-3. – С. 604–610.

18. Назаренко, А. М. Моделирование взаимодействия гармонических Р- и SV- волн с периодической системой криволинейных разрезов [Текст] / А. М. Назаренко // Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна. – 2013. – № 1063. – С. 125–135.
19. Назаренко, А. М. Вычислительные методы в задачах дифракции упругих волн на системах неоднородностей на базе сингулярных интегральных уравнений [Текст] / А. М. Назаренко. – Сумы: СумДУ, 2015. – 220 с.
20. Новацкий, В. Теория упругости [Текст] / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

References

1. Guz, A. N., Kubenko, V. D., Cherevko, M. A. (1978). Diffraction of elastic waves. Kyiv: Nauk. dumka, 307.
2. Gladkij, A. V., Sergienko I. V., Skopetsky V. V. (2001). Numerical and analytical methods of research of wave processes. Kyiv: Nauk. dumka, 453.
3. Zenkevich, O., Morgan, K. (1986). Finite Elements and Approximation. Moscow: Mir, 318.
4. Podilchuk, Yu. N., Rubtsov, Yu. K. (1996). The use of radiological methods in problems of propagation and scattering of waves. Prikl. Mekhanika, 32 (12), 3–27.
5. Nazarchuk, Z. T. (1994). Singular integral equations in diffraction theory. National Academy of Sciences of Ukraine, KarpenkoPhysico-Mechanical Institute, 210.
6. Belotserkovskii, S. M., Lifanov, I. K. (1993). Method of Discrete Vortices. Boca Raton, CRC Press, 452.
7. Gandel, Yu. V. (2010). Boundary-value problems for the Helmholtz equation and their discrete mathematical models. Journal of Mathematical Sciences, 171 (1), 74–88. doi: 10.1007/s10958-010-0127-3
8. Gandel, Yu. V., Dushkin, V. D. (2012). Singular integral equations and numerical methods of discrete singularities. Kharkiv: ABB MVSU, 544.
9. Mishchenko, V. O., Patochkin, B. V. (2015). Accelerating the computation of the discrete currents method by modification takes into account the architectural features of a modern PCs. Visnyk KhNU imeni V. N. Karazina, 1056, 129–139.
10. Popov, V. G. (1999). Interaction of plane elastic waves with longitudinal defects. Mekh. tvyordogo tela, 4, 118–129.
11. Filshtinsky, L. A. (1991). The diffraction of elastic waves by cracks, holes and inclusions in isotropic medium. Mekh. tvyordogotela, 4, 119–127.
12. Shibahara, M., Taniguchi, Y. (1983). Application of the Integral Equation Method to the Elastodynamic Boundary-value Problems. Bulletin of JSME, 26 (222), 2054–2059. doi: 10.1299/jsme1958.26.2054
13. Nazarenko, A. M. (1990). Diffraction of shear waves on cylindrical inclusions and cavities in an elastic half space. Strength of Materials, 22 (11), 1669–1674. doi: 10.1007/bf00767156
14. Nazarenko, A. M. (1994). Dynamical problems on longitudinal shear of a half-space with nonhomogeneities. Journal of Mathematical Sciences, 70 (5), 1985–1990. doi: 10.1007/bf02110825
15. Nazarenko, A. M., Ostrik, V. I. (1990). A problem of dynamic bending of a sheet with a curvilinear crack. Soviet Materials Science, 25 (5), 499–502. doi: 10.1007/bf00731941
16. Nazarenko, O. M., Lozhkin, O. M. (2007). Plane problem of diffraction of elastic harmonic waves on periodic curvilinear inserts. Materials Science, 43 (2), 249–255. doi: 10.1007/s11003-007-0028-x
17. Nazarenko, A. M., Panchenko, B. E. (2010). The scheme of parallel computations in problems of diffraction of shear waves in the hole system in an infinite isotropic medium. Problems of programming. Kyiv, 2-3, 604–610.

18. Nazarenko, A. M. (2013). Modeling the interaction of harmonic P- and SV-waves with a periodic system of curvilinear sections based on the method of singular integral equations. *Visnyk KhNU imeni V. N. Karazina*, 1063, 125–135.

19. Nazarenko, A. M. (2015). Computational methods in problems of diffraction of elastic waves by inhomogeneities systems based on singular integral equations. Sumy: SumDU, 220.

20. Nowacki, W. (1975). *Theory of Elasticity*. Moscow: Mir, 872.

Дата надходження рукопису 12.04.2016

Мищенко Виктор Олегович, доктор технических наук, профессор, заместитель заведующего кафедры, Кафедра моделирования систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, Украина, 61022
E-mail: mischenko@univer.kharkov.ua

Назаренко Александр Максимович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра моделирования сложных систем, Сумской государственной университет, ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, Украина, 40007
E-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru

УДК 622.765:542.61:546.571

DOI: 10.15587/2313-8416.2016.69476

ВИДАЛЕННЯ СІНТЕТИЧНИХ БАРВНИКІВ ЗІ СТИЧНИХ ВОД

© Т. І. Обушенко, Н. М. Толстопалова, І. М. Астрелін

Проаналізовано сучасний стан проблеми забруднення стічних вод барвниками, розглянуто існуючі методи видалення і деструкції барвників. В якості альтернативної запропонована технологія флотоекстракції. Досліджено закономірності видалення барвника бенгальського рожевого з модельних розчинів за допомогою метода флотоекстракції. На основі проведених експериментів встановлено вплив рН середовища, тривалості процесу, мольного співвідношення реагуючих речовин та визначено раціональні умови проведення флотоекстракції

Ключові слова: барвник, флотоекстракція, поверхнево-активні речовини, стічні води, бенгальський рожевий, гексадецилтриметиламонію бромід

Current state of wastewater pollution caused by dyestuff was analyzed. Traditional techniques for dyes elimination and destruction were covered. Solvent sublation technology was proposed as an alternative method. The main characteristics of removal of rose bengal dye from wastewater by solvent sublation were investigated. The influence of pH, time, molar ratio of reactants was studied and the reasonable conditions of the process were determined

Keywords: dye, solvent sublation, surface-active substance, wastewater, rose bengal, hexadecyltrimethylammonium bromide

1. Вступ

У зв'язку з обмеженою кількістю запасів прісної води на Землі (запас доступної прісної води на планеті становить всього 5–6 тис. м³ на душу населення) проблема охорони гідросфери невпинно загострюється, хоча для її вирішення людство прикладає чималих зусиль. Ріст міст, бурхливий розвиток промисловості, інтенсифікація сільського господарства, значне розширення площі земель, що зростаються, покращення культурно-побутових умов і ряд інших факторів – всі ці чинники ще більше ускладнюють проблеми забезпечення прісною водою, незважаючи на значний вклад у захист гідросфери, за рахунок розроблення та впровадження сучасних механічних, хімічних та біологічних технологій очищення стоків. Негативний внесок створю-

ють органічні сполуки, які особливо небезпечні як забруднювачі навколишнього середовища унаслідок комплексного впливу і непрогнозованості наслідків. Шкідлива дія органічних речовин, що потрапляють у водойми, посилюється за рахунок кумулятивного ефекту (прогресуюче збільшення вмісту шкідливих сполук у кожній наступній ланці трофічного ланцюга). Серед таких органічних забруднювачів чільне місце займають барвники, які широко застосовують у різних галузях промисловості та в побуті. Сучасні синтетичні барвники зі складною хімічною структурою не підлягають біохімічній деструкції у водних системах. Їх концентрація, наприклад, у стічних водах текстильних виробництв в залежності від типу барвника коливається в межах від 5 до 40 мг/дм³, що багаторазово перевищує гранично