

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 539.194: 544.273

DOI: 10.15587/2313-8416.2018.134334

ОСОБЕННОСТИ ПРЕЦЕССИИ ДВУХЧАСТОТНОГО МАЯТНИКА

© Н. Т. Малафаев

Проведен анализ прецессии вращательных колебаний молекул воды с помощью модели двухчастотного маятника во всей области его колебаний. Обнаружено, что прецессия двухчастотного маятника в поле неоднородных сил взаимодействий является анизотропной. Наибольшая анизотропия наблюдается в критической точке изменения типа колебаний с двухчастотного на одночастотный. Рассмотрено проявление особенностей прецессии (изменения фазы) в области двухчастотных колебаний, наблюдаемые для случаев малых начальных скоростей колебаний маятника

Ключевые слова: молекула воды, прецессия, двухчастотный маятник, анизотропия, тип колебания, неоднородное поле сил

1. Введение

Свойства воды вызывают большой интерес и широко обсуждаются в литературе [1, 2]. Вопросы влияния колебательных спектров атомов и молекул на свойства веществ подробно рассматриваются в рамках теории эффекта Яна – Теллера [3]. В работе [4] данная теория применена автором к колебательным спектрам молекул в жидкой воде, сравнительно со льдом. Показано, что ее физико-химические особенности обусловлены появлением в ней новых коллективизированных вращательных колебаний (либрационных колебаний, ограниченных вращений [1]), приводящих в воде к изгибам водородных связей (*H*-связей) и значительному изменению всех ее свойств.

Особенностью вращательных колебаний молекул воды является их многочастотность. Моделирование вращательных колебаний молекул воды проводилось с помощью модели двухчастотного сферического маятника [5], однако еще многие вопросы физики колебаний молекул воды требуют своего анализа. В частности, не ясно, какие особенности имеет прецессия молекулы в пространстве, исходя из модели двухчастотного маятника.

2. Литературный обзор

В работе [6] были рассмотрены двумерные колебания маятника и его прецессия. Показано, что прецессия (дополнительный поворот по углу) большой оси эллиптической орбиты колебаний маятника направлена в направлении вращения маятника. Согласно формулы Пьюзо угол прецессии (поворота) большой оси эллиптической орбиты маятника пропорционален площади описываемого им эллипса, и он постоянен во времени и изотропен в

пространстве для свободных незатухающих колебаний маятника.

В работе [7] подробно рассмотрен двухчастотный маятник. Основное внимание уделено его отличию от обычного одночастотного, наличию биения его частот, проведено сравнение особенностей его колебаний с оптическими эффектами. Рассмотрено для сферического маятника выражение для его прецессии. В работе обсуждается резонанс колебаний маятника от внешних источников, однако не рассматривается случай возможного перехода между собственными частотами маятника на общую частоту.

Работы по двухчастотным маятникам редки. В [8] рассмотрены вопросы устойчивости колебаний двухчастотного маятника с двумя разными типами колебаний – трансляционным и вращательным. Однако это совсем другой тип маятника, сравнительно с нашей моделью.

В работе [9] рассмотрена многочастотность колебаний как следствие наличия нескольких локальных минимумов для потенциала взаимодействия, а не одного, как у нас. При компьютерном моделировании колебаний молекул воды [10] применяются одночастичные потенциалы взаимодействия, которые при всех улучшениях [11] дают обычно один минимум потенциала. Для назревшего получения нескольких минимумов потенциала [3, 9] необходимо учитывать направленность межмолекулярных взаимодействий и взаимодействия молекул во второй координационной сфере.

При компьютерном моделировании колебаний ансамблей молекул воды методом молекулярной динамики [10, 12] рассчитываются термодинамические характеристики колебаний молекул. При

этом задается большой шаг во времени сравнительно с периодом колебаний, что не позволяет рассмотреть особенности вращательного движения молекул, а также требует постоянной коррекции температуры системы. В потенциалах взаимодействия молекул с соседями часто не учитывается наличие моментов инерции молекул, которые ведут к их вращательным колебаниям. Учет теплового движения всех молекул сопровождается его сильной хаотизацией и разрывами связей, что также затрудняет рассмотрение особенностей вращательного движения молекул.

В работе [5] для моделирования свободных вращательных колебаний одной молекулы воды была применена модель двухчастотного сферического маятника, поскольку было показано [4], что малые вращательные колебания молекул воды являются двухчастотными. Наличие двух вращательных частот маятника задавалось параметром $k = I_x / I_y$, характеризующим отношение моментов инерции маятника (и молекулы) по осям модели, где $k > 1$ и ось x – низкочастотная. Вследствие различия моментов инерции для маятника по осям возвращающие силы для него становятся нецентрными.

Двухчастотный сферический маятник при малых отклонениях имеет два начальных периода T_{x_0} и T_{y_0} независимых колебаний (НК) [5]. При этом маятник совершает вращения за период биений в двух направлениях вокруг его оси [7]. С ростом амплитуды колебаний его период увеличивается, что создает возможность колебаний по двум осям на одной общей частоте. В результате маятник начинает совершать сложные эллипсоподобные колебания (ЭПК) – с однонаправленным вращением вокруг своей вертикальной оси. Для возможности появления ЭПК необходимо, чтобы амплитуда колебаний по оси Y была больше, чем по оси X , чтобы периоды смогли стать равными ($T_x = T_y$). Это сопровождается появлением вращений маятника в одном направлении внутри эллиптической области колебаний, а не в круге, как для сферического одночастотного маятника. Оси огибающей эллиптической области колебаний двухчастотного маятника совпадают с осями связей – координатами X и Y .

Особенно быстро частота понижается в неоднородных полях сил (НПС), моделирующих направленные силы межмолекулярного взаимодействия [5]. Это создает условия к появлению ЭПК при малых амплитудах колебаний и согласуется с зависимостями либрационных частот воды от температуры [1]. ЭПК соответствуют вращениям молекул воды и, в частности, их ядер атомов водорода вокруг осей H – связей с соседними молекулами.

Если для математического сферического маятника прецессия исследована [6, 7], включая анализ в НПС [13], то ее особенности для двухчастотного сферического маятника пока никто не рассматривал. Возможно, что с ее помощью можно объяснить особенности траекторий ЭПК данного сферического маятника.

3. Цель и задачи исследования

Цель работы - физико-математический анализ колебаний двухчастотного маятника, как модели вращательных колебаний молекулы воды и опреде-

ление для него параметров прецессии и их особенностей.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Создание методики анализа и модификация программ расчета.
2. Анализ траекторий колебаний, определение особенностей и анализ параметров прецессии двухчастотного маятника для области ЭПК и сравнение их со сферическим (одночастотным) маятником.
3. Рассмотрение особенностей периодичности колебаний двухчастотного маятника для всего диапазона его возможных скоростей.
4. Анализ особенностей и параметров прецессии (фазы) двухчастотного маятника для области НК и связи их с областью ЭПК.

4. Модель колебаний двухчастотного маятника в НПС

Модель свободных колебаний двухчастотного сферического маятника в НПС рассмотрена в [5]. Она представляет две массы, закрепленные на двух невесомых стержнях длиной l под углом Θ_0 , что дает разные моменты инерции маятника по его осям. Ось X маятника (перпендикуляр к плоскости маятника) соответствует оси x молекулы воды [4], а ось Y маятника – оси z молекулы (биссектриса угла Θ_0 молекулы) – для отношения моментов инерции $k=1,5$. В модели принято, что главные моменты инерции маятника от его смещений не зависят. Смещения маятника от равновесия (от вертикальной оси Z) рассматриваются через угол отклонения маятника θ , либо через относительные смещения от начала XU – координат по оси X_i : $\delta_i = x_i / l$ ($l=1$ м, $i=X, Y$), где смещения по осям x_i и δ_i численно равны. При моделировании колебаний задавались начальное относительное смещение маятника δ_{x_0} по оси X и его начальная скорость v_{y_0} по оси Y . Угол максимального отклонения маятника θ ограничивался при моделировании нижней полусферой – углом 90° , тогда как для молекулы воды при углах более 30° вероятен разрыв ее H – связи [12]. В НПС разрыв связи для свободных колебаний возникает при углах больших 40° .

Локальное моделирование вращательных колебаний молекулы воды было проведено в пакете *MatLab* с помощью модели двухчастотного сферического маятника в НПС вида $G = g \cdot \cos^n \theta$ ($g=10$ м/с², $n=8$).

Это осредненное поле сил остается неизменным для всего процесса моделирования колебаний, в котором маятник совершает свободные колебания, то есть, для молекулы воды мы пренебрегаем тепловым движением ее соседних молекул. Наличие НПС приводит к синхронизации частот колебаний в "критической" точке уже при малых отклонениях маятника δ . Это приводит к изменению типа колебаний с ростом начальной скорости маятника [5, 13]. При ЭПК колебания происходят в области колебаний, ограниченной двумя огибающими эллипсами – внутренним и внешним, одним из радиусов которого по оси X является величина начального смещения маятника δ_{x_0} . При "эллиптической" начальной скорости траектория представляет чистый эллипс (огибающие эллипсы

совпадают), при "максимальной" скорости – угол отклонения маятника θ достигает края нижней полушеры ($\theta \leq 90^\circ$). Определение параметров маятника проводилось для отношения моментов инерции, характерного для молекул воды $k=1,5$ [1, 5].

Колебания (НК и ЭПК) двухчастотного маятника происходят в широкой области эллиптического пространства [5] и сложны для рассмотрения. Потому при анализе колебаний были нормирована область колебаний и рассмотрены ее особые точки и их значения. При большом числе периодов колебаний и времени моделирования (≈ 200 с) можно получить большое число значений величин и достаточно надежно усреднить полученные результаты. Шаг моделирования составлял 0,0001 с, поскольку при этом нелинейностями в расчетах за данное время моделирования можно пренебречь.

5. Результаты исследования и их обсуждение

Для определения углов и периодов прецессии по траекториям ЭПК двухчастотного маятника была проведена нормировка эллиптических областей колебаний в координатах XY по обеим осям ($x_n=x/x_{max}$, $y_n=y/y_{max}$) для получения круговой внешней границы области колебаний. Для расчетов величин углов прецессии ϕ_p и их периодов T_p взяты точки максимального отклонения траекторий по радиусу. Расчеты проводились от одного максимума к другому, то есть для полупериода прецессии. Это позволило упростить расчеты, а также получить вдвое больше точек на графиках, что существенно вследствие быстрых изменений этих параметров, особенно вблизи максимальных начальных скоростей маятника v_{yo} . При сравнении периода T_p с полным периодом маятника T его величина удваивалась.

Для расчета угла прецессии за полпериода из угла между максимумами вычитался угол 180° . Надо отметить, что при углах прецессии больших $1...3^\circ$ говорить об "эллипсах" с точки зрения геометрии неверно. Однако рассчитать площадь S_p n -го эллипса $S_{pn0}=\pi a_n b_{ncp}$ [6] не вызывает проблем, где $a_n=r_{min,n}$, $b_n=r_{max,n}$, $b_{ncp}=(b_n+b_{n+1})/2$. Для больших углов прецессии ϕ_p в данную площадь добавлялся угловой коэффициент, пропорциональный величине угла прецессии и увеличивающий площадь "полуэллипса": $S_{pn}=S_{pn0}(1+\phi_p/180)$.

Уточнение площади эллипса интегрированием: $S_{pi}=\int r^2 d\phi$ дает близкие значения с величиной S_{pn} для смещений $\delta < 0,5$, характерных для колебаний молекул воды, и качественно не меняет результаты. Различия их связаны с НПС, длительным нахождением маятника при больших смещениях.

Данная методика была применена для расчета прецессии маятника в области ЭПК (одночастотных), а также в области двухчастотных НК для их сравнения и анализа. Нормировка по оси Y в области НК проводилась для радиуса по формуле: $y_n = y/(y_{max} \cdot \sin\phi_m)$, где угол ϕ_m взят для точки y_{max} .

5.1. Прецессия в области ЭПК

Обычно, в отсутствие кратности средних периодов колебаний и средних периодов прецессии $k_p=T_p/T$, траектории в области ЭПК равномерно за-

полняют эллиптическую область колебаний [5, 13]. Для случаев кратности средних периодов наблюдается многократное наложение траекторий двухчастотного маятника в XY – координатах самих на себя, и они упрощаются.

На рис. 1, а показаны траектории для отношения периодов $k_p=16/15$, которое позволяет увидеть много лепестков эллипсов. Видим анизотропию прецессии: малые углы прецессии ϕ_p "эллипсов" траекторий вблизи оси Y и большие углы ϕ_p вблизи оси X. Вследствие близости скорости к критической внутренней эллипс области колебаний узкий, а отношение периодов колебаний k_p близко к единице. Для больших k_p , скоростей v_{yo} и малого числа лепестков анизотропия прецессии может быть малозаметной (рис. 1, б).

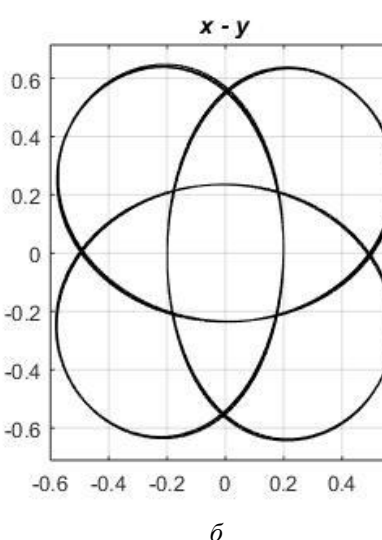
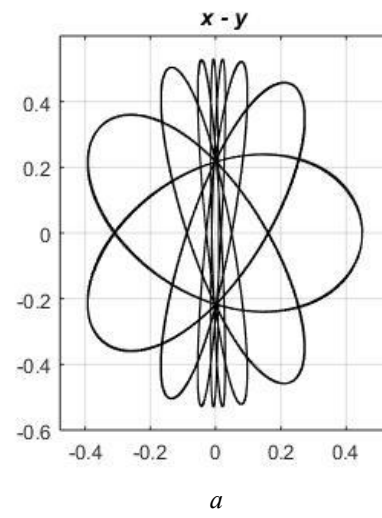


Рис. 1. Траектории маятника для отношения периодов колебаний в области ЭПК: а- $k_p=16/15$ ($\delta_{x0}=0,45$; $v_{yo}=0,6$ м/с); б- $k_p=3/2$ ($\delta_{x0}=0,2$; $v_{yo}=1,531$ м/с)

При больших отклонениях по оси Y ускорения маятника вдоль оси X ослаблены, что ведет к малой скорости v_x и узким эллипсам вдоль оси Y и малой прецессии, особенно вблизи критической точки ($v_{x,кр} \approx 0$) [14]. Вследствие эллиптичности области колебаний скорости v_y на границе области колебаний вблизи оси X всегда больше чем скорость v_x вблизи оси Y

и уменьшаются с ростом смещения δ_{x0} или скорости v_{y0} [14], что сопровождается уменьшением относительных изменений (анизотропии) угла прецессии.

На рис. 2 представлены зависимости средних периодов колебаний T , периодов прецессии T_p , отношения этих периодов k_p и средние отклонения для периодов прецессии ΔT_p от величины начальной скорости маятника v_{y0} (от критической до максимальной). Видим сравнительно линейный рост отношения периодов колебаний маятника k_p со скоростью и быстрый рост всех параметров вблизи максимальной скорости маятника, обусловленные НПС.

На рис. 3 представлены для тех же скоростей зависимости средних углов прецессии ϕ_p за полпериода прецессии и средние отклонения для них $\Delta\phi_p$ (в градусах). Видим, что средние отклонения для углов прецессии относительно большие, чем для периодов прецессии ΔT_p (рис. 2), что говорит об большом влиянии скорости на величину угла прецессии. Видим наличие максимумов для этих отклонений для эллиптической траектории ($v_{y0,el.}=1,082$ м/с). Вблизи максимальной скорости маятника средний угол прецессии ϕ_p за полпериода колебаний быстро растет и превышает 100° . На рис. 1,а средний угол прецессии ϕ_p за полпериода составляет 24° , на рис. 1,б – 90° .

Если для одночастотного маятника угол прецессии ϕ_p постоянен при заданных величинах начальных скорости маятника v_{y0} и смещении δ_{x0} , то для двухчастотного маятника прецессия для заданных величин v_{y0} и δ_{x0} меняется со временем (рис. 1). Назовем эти характеристики локальными, в отличие от их средних, при данных величинах v_{y0} и δ_{x0} . Средние величины для прецессии (рис. 2, 3) не дают информации о локальных характеристиках. Поэтому интересно их рассмотреть во времени и в пространстве для соответствующих v_{y0} и δ_{x0} .

Согласно фазовых диаграмм маятника $v_x - X$, являющихся эллипсами или спиралями [14], скорость v_x на оси Y пропорциональна максимальной координате X для этого эллипса. Это ведет к росту величины его угловой скорости по ϕ , а также угла прецессии ϕ_p с ростом величины максимального смещения по X для последующих эллипсов (рис. 1, а). При росте скорости v_{y0} выше критической диапазоны изменения максимальных координат X эллипсов и скоростей v_x уменьшаются, а соответственно, и анизотропия прецессии.

На рис. 4 представлены зависимости для углов прецессии ϕ_p за полпериода для начального смещения маятника $\delta_{x0}=0,3$ и ряда начальных скоростей v_{y0} от времени. Видим, что вблизи критической точки (рис. 4, кривая 1, $v_{y0}=0,741$ м/с) угол прецессии большую часть времени мал и периодически возрастает, а затем снова убывает. С ростом скорости v_{y0} углы прецессии ϕ_p возрастают, а периодичность и анизотропия углов прецессии уменьшаются.

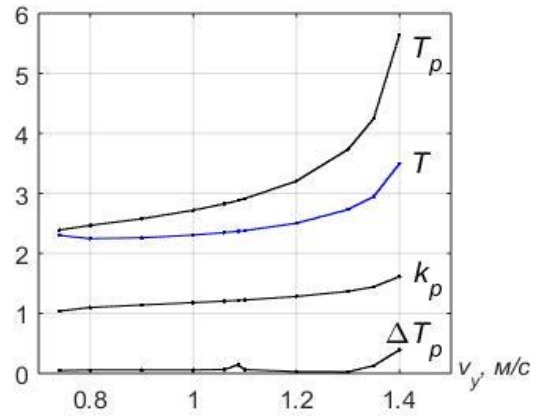


Рис. 2. Зависимости для периодов прецессии T_p и колебаний T , их отношения k_p и отклонения периода ΔT_p от начальной скорости маятника v_{y0} при $\delta_{x0}=0,3$

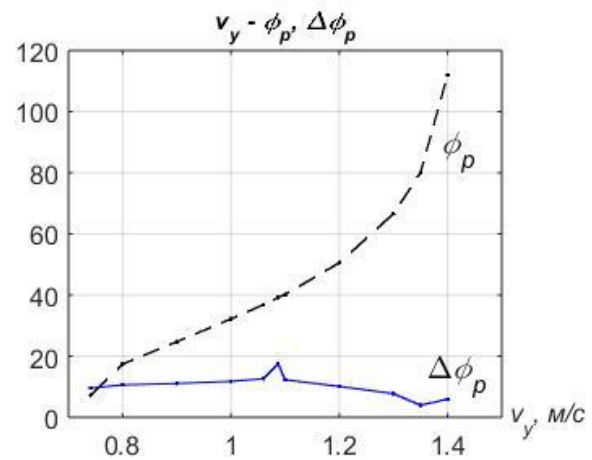


Рис. 3. Зависимости для средних углов прецессии ϕ_{pm} и их отклонений $\Delta\phi_p$ от начальной скорости маятника v_{y0} при начальном смещении $\delta_{x0}=0,3$

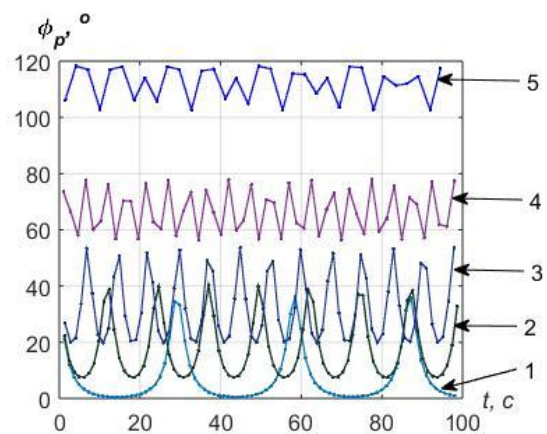


Рис. 4. Зависимости углов прецессии ϕ_p от времени для начальных скоростей $v_{y0}=0,741; 0,8; 1; 1,3$ и $1,4$ м/с (кривые 1–5, соответственно) при $\delta_{x0}=0,3$

Расчеты показывают, что максимумы на зависимостях для углов прецессии периодически повторяются после каждой суммы для углов прецессии $\Sigma\phi_p$ в среднем равной 180° . Поскольку углы прецессии вблизи критической точки изменения типа колебаний минимальны, периоды повторения для углов прецессии и их анизотропия будут максимальны (рис. 4, кривая 1). При больших начальных скоростях и смещениях анизотропия скоростей по осям уменьшается [14], а потому анизотропия углов прецессии ϕ_p по осям минимальна (рис. 4, кривые 4–5).

Интересно рассмотреть, как изменилась связь между углами прецессии и площадями эллипсов для двухчастотного сферического маятника. На рис. 5 для ЭПК представлены локальные зависимости для углов прецессии ϕ_{pn} от площади данного полуэллипса S_{pn} для начального смещения маятника $\delta_{xo}=0,3$ и ряда начальных скоростей v_{yo} . Треугольниками на рисунках показаны величины средних значений для углов прецессии и площадей эллипсов, через которые проведена штриховая линия. Средние значения определены с учетом плотности точек, за время моделирования 200 с. Для средних значений углов прецессии и площадей эллипсов получаем их пропорциональность для малых площадей $S_p < 0,2 \text{ м}^2$, что согласуется с поведением прецессии обычного маятника [5, 10], однако локальные зависимости существенно отличны. Учет углового коэффициента для S_{pn} , значительного для больших углов прецессии, существенно линеаризирует данную зависимость.

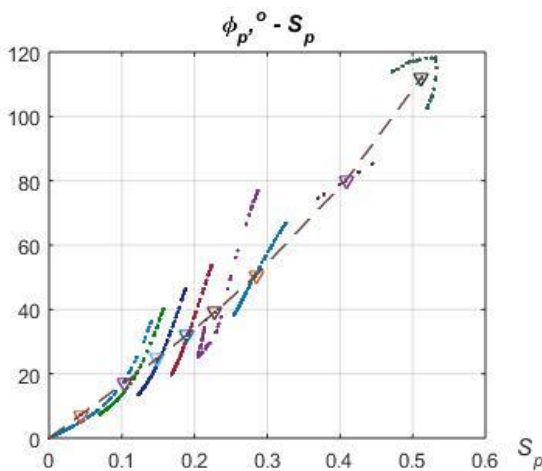


Рис. 5. Зависимости углов прецессии ϕ_p при ЭПК от площади полуэллипсов S_p при $\delta_{xo}=0,3$ для $v_{yo}=0,741$; $0,8$; ... $1,3$; $1,4 \text{ м/с}$ и их средних значений (\blacktriangledown)

Для каждой отдельной точки моделирования (v_{yo} , δ_{xo}) двухчастотного маятника за время моделирования (рис. 5) имеем целый набор локальных значений углов прецессии ϕ_{pn} и площадей их эллипсов S_{pn} , изменяющихся нелинейно в широких интервалах значений. Видим, что вблизи критической скорости, когда наблюдается узкий внутренний эллипс вдоль оси Y , значения S_p изменяются от нуля и до максимума, когда эллипсы разворачиваются от оси Y к оси X и становятся широкими. С ростом скоростей v_{yo} значения величин координат

внутреннего или внешнего эллипсов для расчета S_p возрастают.

Видим, что вначале с ростом скорости угол наклона локальных кривых и диапазон углов ϕ_p растет и имеет максимум для эллиптической орбиты, далее угол наклона уменьшается, а вблизи максимальной скорости v_{yo} локальная зависимость между ϕ_p и S_p сопровождается перегибом. Уменьшение наклона ϕ_p от S_p видимо связано с переносом ограничения области колебаний для эллиптической орбиты по δ_{xo} – со внешнего эллипса на внутренний [14].

Набор локальных значений величин ϕ_p и S_p за время моделирования для каждой точки ЭПК двухчастотного маятника изменяется сложно и в большом интервале значений, в отличие от пары значений, как для одночастотного маятника. Большой диапазон изменений угла прецессии вблизи эллиптической орбиты маятника согласуется с отклонениями угла $\Delta\phi_p$ (рис. 3) и показывает особенности локальных изменений этих параметров в пространстве $\phi_p - S_p$. Изменения площадей S_p при этом связано с тем, что точки для расчета больших осей полуэллипса определены в нормализованных координатах, а координаты для расчетов его площади S_p – в реальных.

5. 2. Сдвиг фазы в области НК

Интересно рассмотреть, применив данную методику расчета параметров, имеются ли в области НК особенности, аналогичные прецессии, особенности перехода между типами колебаний, тем более, что их механизмы качественно близки. В [13] показано, что прецессия возникает вследствие различия периодов колебаний маятника по большой и малой осям эллипсоида. В результате за время разности периодов колебаний точка максимума отклонения маятника поворачивается на дополнительный угол – угол прецессии. Если для маятника различие периодов колебаний обусловлено разной амплитудой колебаний по осям эллипса, то для маятника в двухчастотной области НК это задано начальными условиями, а потому эффект от сдвига фазы для этих колебаний может быть большим. Обозначения для рассчитанных в области НК угла ϕ_p и площади S_p не изменяются.

Колебания в области НК отличаются от колебаний в области ЭПК не только двухчастотностью, но и формой области колебаний. При малых скоростях и отклонениях маятника ($\delta < 0,1$) колебания по осям проходят в прямоугольной области колебаний. С ростом скорости "прямоугольник" искажается, превращается в "бабочку", с округлением боковых сторон и со сжатием по оси Y , которое увеличивается с ростом скорости v_{yo} (рис. 6, кривые 1, 2), смещений δ_{xo} , показателя НПС n . Далее с ростом скорости диагонали приближаются к оси Y , и в критической точке "диагонали" сольются с осью Y (рис. 6, кривая 3), а "прямоугольник" превратится в эллипс. В результате получим изменение типа колебаний – переход их в область ЭПК. Видим эффект сгущения траекторий по "диагоналям" и разрежение их вблизи оси X .

На рис. 7 показано зависимости углов фазы ϕ_p от времени для начальных скоростей v_{yo} при смещении $\delta_{xo}=0,3$. Видим, что при малых колебаниях (кри-

вая 1) зависимость фазы $\phi_p(t)$ в области НК близка к синусоидальной. То есть, рост фазы ϕ_p связан с различием фаз независимых частот и их биением, которое ведет к смещению максимумов амплитуды колебаний со временем. С ростом амплитуды колебаний зависимости для сил в НПС становятся нелинейными, частоты сближаются. Вблизи критической точки имеем острые по модулю, максимумы фазы ϕ_p (кривые 3 и 4) с периодом биения частот, аналогичные прецессии (рис. 4, кривая 1), но двухполярные по фазе. Острые максимумы фазы так же, как в области ЭПК, связаны с нелинейностями сил для больших амплитуд, большими скоростями v_y на оси X и соответствующими угловыми скоростями маятника для максимальных отклонений по оси X [14].

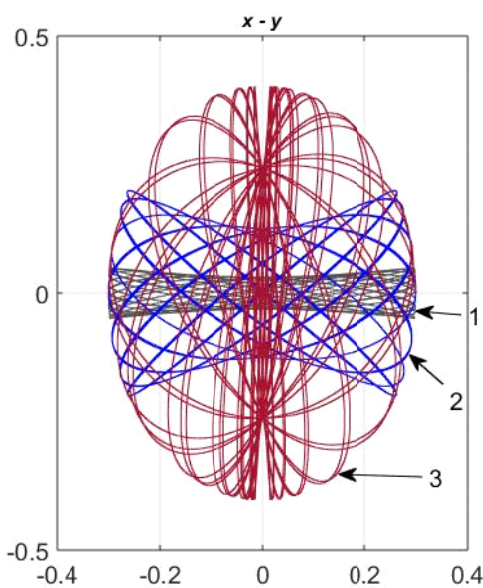


Рис. 6. Траектории маятника в области НК: $\delta_{x0}=0,3$; $v_{y0}=0,1$; $0,4$ и $0,74$ м/с (кривые 1, 2 и 3, соответственно). Время моделирования – по 50 с.

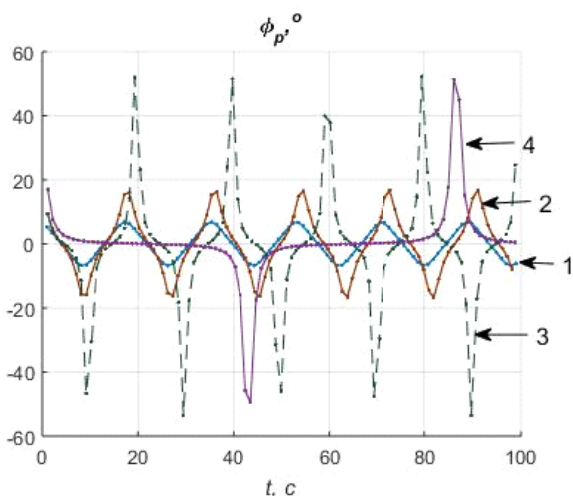


Рис. 7. Зависимости углов ϕ_p от времени для начальных скоростей $v_{y0}=0,1$; $0,2$; $0,04$ и $0,74$ м/с (кривые 1-4, соответственно) при $\delta_{x0}=0,3$

На рис. 8 точками показано зависимости фазы ϕ_p от площади эллипса S_p в области НК при $\delta_{x0}=0,3$ для ряда скоростей v_{y0} . В точках поворота направления вращения задано, что площадь эллипса меняет знак и кривые центрально симметричные. Вследствие этого средние значения их величин находятся в начале координат. Для малых начальных скоростей (кривые 1–2) зависимость параметров линейная, а с ростом скорости и смещений становится нелинейной. Угол наклона в начале координат связан с различием фаз для частот НК по осям, а нелинейность – с НПС. Видим, что положительная часть кривой 5 (рис. 8, $v_{y0}=0,74$ м/с) практически совпадает с кривой для критической скорости при ЭПК (рис. 5, $v_{y0}=0,741$ м/с).

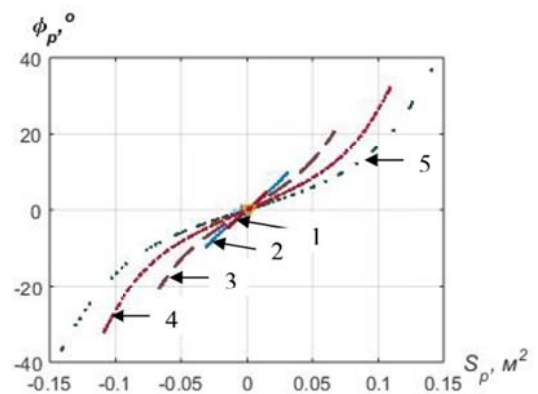


Рис. 8. Зависимости углов прецессии ϕ_p от площади эллипса S_p в области НК при $\delta_{x0}=0,3$ и $v_{y0}=0,1$; $0,2$; $0,4$; $0,6$ и $0,74$ м/с (кривые 1–5, соответственно)

На рис. 9 показано зависимости общей фазы ϕ ($\phi_i = \arctg(y_i/x_i)$) и фазы ϕ_p от времени в области НК. В двухчастотной области НК маятник с частотой биений меняет направление вращения [7], что ведет к росту или уменьшению фазы ϕ со временем. Видим, что для фазы $\phi \approx 0$ модуль фазы ϕ_p экстремальный, а в точках изменения направления вращения (экстремумы фазы ϕ) фаза ϕ_p меняет знак. Таким образом, знак фазы ϕ_p , в области НК как и для прецессии обычного маятника [6], связан с направлением вращения маятника – ростом или уменьшением общей фазы ϕ .

В точках поворота вращения маятник находится значительное время и потому угол ϕ почти не меняется. После этого маятник проходит наиболее близко к началу координат, а потому угол ϕ меняется наиболее быстро – видим почти вертикальные отрезки кривых $\phi(t)$, то есть, вблизи диагоналей прямоугольника фаза ϕ меняется ступенеподобно (рис. 9). Для максимальных отклонений вдоль оси X перпендикулярные к ней скорости велики и наблюдаются более близкие к линейным зависимости фазы от времени ($\phi \approx 0$).

На рисунке штриховой линией показана синусоида для осредненной частоты биений $\omega_b = \omega_y - \omega_x$ между частотами колебаний по осям ($20 \sin \phi_b$, где $\phi_b = \omega_b t$, $\omega = 1/T$). Узлы колебаний для углов ϕ и ϕ_b часто не совпадают, что обусловлено несовпадением

текущих периодов колебаний и биений. Вблизи критической точки частоты сближаются, а периоды биений возрастают.

Можно отметить, что в области НК максимумам угла ϕ соответствуют максимумы колебаний по осям X и Y в фазе, а минимумам – в противофазе, что соответствует сдвигу по фазе между фазами ϕ_i их частот НК на $\pm 180^\circ$, однако за полный цикл биения частот для ϕ (а также ϕ_p) получим суммарный угол 0° .

Представляет интерес рассмотреть, так ли меняется суммарная фаза $\Sigma\phi_p$, как и угол ϕ , за полпериода биения частот при одном направлении вращения маятника в зависимости от величины скорости v_{yo} . На рис. 10 показано зависимости для модуля суммы углов фазы $\Sigma\phi_p$ от скорости v_{yo} для разных начальных смещений маятника δ_{xo} . Видим рост суммы фаз с ростом скорости и выход их значений в области ЭПК на 180° для полуэллипсов при критической скорости ($v_{yo,кр}$ уменьшается с ростом начального смещения δ_{xo} [5]).

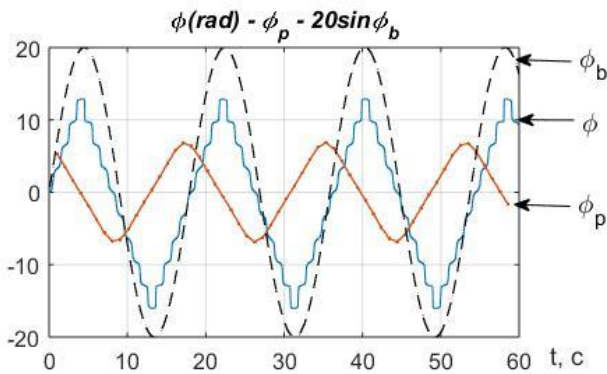


Рис. 9. Зависимости фазы ϕ (в радианах), углов прецессии ϕ_p и кривой биений $20 \sin \phi_b$ (кривая ϕ_b) от времени в области НК для $\delta_{xo}=0,3$ и $v_{yo}=0,1$ м/с

Данная сумма углов фазы соответствует углу, под которым видны боковые ("вертикальные", рис. 6) стороны прямоугольной области колебаний маятника в XU – координатах, вдоль которых перемещаются максимумы эллипсов. Быстрое увеличение угла вблизи критической точки (до 180°) связано со сближением диагоналей "прямоугольной" области колебаний к оси Y при превращении ее в эллипс (рис. 6). Выгибы кривых влево для малых смещений δ_{xo} связаны с ростом угла, под которым видны боковые стороны области колебаний для этих малых смещений. Суммарная фаза $\Sigma\phi_p$ будет занижаться вследствие наличия граничных полуэллипсов с двумя направлениями вращения и результирующей фазой для них $\phi_{пр} \approx 0$.

Качественным отличием изменения угла ϕ_p в областях НК и ЭПК является не только знакопеременность углов ϕ и ϕ_p для НК, но и различие величин для суммарного угла прецессии /фазы $\Sigma\phi_p$ за период биений. Также различны ориентация больших осей эллипсов с минимальной прецессией/ фазой ϕ_p : для ЭПК – по оси Y и для НК – по диагоналям "прямоугольника". При этом для НК большие оси полуэллипсов находятся на боковых сторонах "прямоуголь-

ника" и внутри угла $\Sigma\phi_p$. На его диагоналях происходит остановка вращения маятника по углу ϕ и изменение направления его вращения. По достижении критической скорости не происходит остановки вращения маятника на оси Y по углу ϕ , и он продолжает вращение в том же направлении с периодичностью для максимумов ϕ_p , равной в среднем 180° (рис. 4).

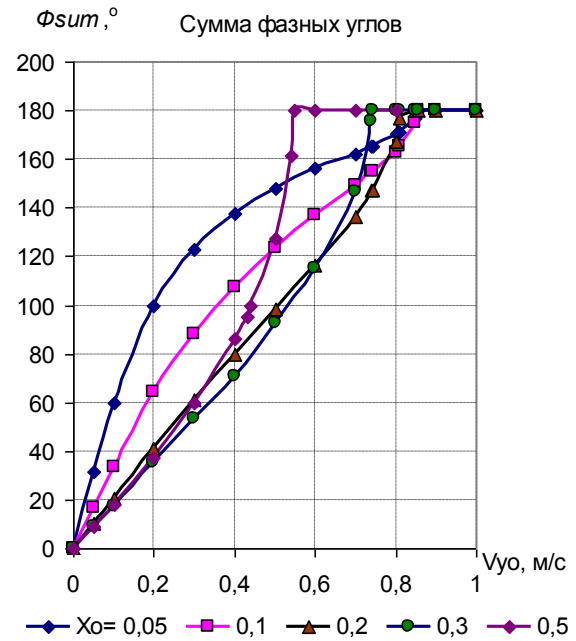


Рис. 10. Зависимости модуля суммы углов фазы $\Sigma\phi_p$ от начальной скорости v_{yo} для разных смещений δ_{xo} в областях НК и ЭПК

В области ЭПК наблюдаются эффекты, сходные с биениями, вызванные ростом суммарного угла прецессии $\Sigma\phi_p$ до 180° . Эллиптичность области колебаний вследствие различия моментов инерции по осям координат и их частот в НПС ведет в обоих случаях к анизотропии углов прецессии или фазы в области НК. Наибольшая анизотропия прецессии наблюдается вблизи критической точки вследствие близкой к нулю скорости вращения маятника около оси Y ($v_x \approx 0$ [14]) и соответствующей малой прецессией по углу. Далее с ростом начальной скорости растет скорость v_x пересечения оси Y и анизотропия прецессии уменьшается.

Таким образом, данная методика успешно работает во всей области колебаний двухчастотного маятника и эффекты, сходные с прецессией, для нее наблюдаются. Изменение направления вращения маятника и знака фазы ϕ_p в области НК связано с изменением фазы частоты биения его частот. При достижении критической точки фаза/ прецессия остается далее постоянной по знаку (рис. 4), поскольку направление вращения маятника не меняется.

Наличие прецессии существенно уширяет спектры частот колебаний маятника, а также результирующих спектров либрационных частот колебаний молекул воды для всего диапазона их начальных скоростей и смещений.

6. Выводы

1. Создана методика анализа прецессии колебаний двухчастотного маятника и проведена соответствующая модификация программ расчета.

2. Сложные эллипсоподобные колебания двухчастотного сферического маятника внутри эллиптической области колебаний обусловлены его анизотропной прецессией и характеризуются набором локальных значений величин параметров. Анизотропия угла прецессии максимальна вблизи критической точки изменения типа колебаний двухчастотного маятника, когда скорость пересечения оси Y близка к нулю и далее она уменьшается с ростом начальной скорости маятника и скорости пересечения им оси Y . Средние углы прецессии растут вместе с величиной начальной скорости маятника.

3. Зависимости для траекторий и углов прецессии периодически повторяются после полного оборота для угла прецессии – для суммы углов прецессии, равной 180° . Периоды повторения для углов

прецессии связаны с суммированием углов прецессии и максимальны вблизи критической точки изменения типа колебаний маятника.

4. В двухчастотной области колебаний наблюдается явление дополнительного роста фазы колебаний с периодом биения частот. При приближении к критической точке максимумы фазы нелинейно растут и сходны с прецессией, но они двухполярные, знак фазы зависит от направления вращения маятника. Суммарная фаза для одного направления вращения растет с ростом начальной скорости и в области ЭПК становится равной 180° и постоянного знака. Однако за период биения частот для обоих направлений вращения маятника сумма фаз равна нулю.

Благодарности

В заключение автор выражает благодарность профессору Погожих Н. И. за интерес и замечания по данной работе.

Литература

1. Эйзенберг Д., Кауцман В. Структура и свойства воды. Ленинград: Гидрометеониздат, 1975. 280 с.
2. Антонченко В. Я., Давыдов А. С., Ильин В. В. Основы физики воды. Київ: Наукова думка, 1991. 672 с.
3. Берсукер И. Б. Эффект Яна-Теллера и вибронные взаимодействия в современной химии. Москва: Наука, 1987. 344 с.
4. Малафаев Н. Т. О взаимодействиях и динамике молекул в чистой воде // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2011. Т. 4, № 8 (52). С. 48–58. URL: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/1465/1363>
5. Малафаев Н. Т., Погожих Н. И. Моделирование вращательных колебаний молекул воды // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 2, № 5 (74). С. 27–35. doi: <http://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.40569>
6. Крылов А. Н. Лекции по приближенным вычислениям. Москва: Гостехиздат, 1954. 400 с.
7. Зельдович Б. Я., Суало М. Дж. Двухчастотный маятник на вращающейся платформе: моделирование оптических явлений // Успехи физических наук. 2004. Т. 174, № 12. С. 1337–1354. doi: <http://doi.org/10.3367/ufnr.0174.200412e.1337>
8. Viet L. D., Nghi N. B. On a nonlinear single-mass two-frequency pendulum tuned mass damper to reduce horizontal vibration // Engineering Structures. 2014. Vol. 81. P. 175–180. doi: <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.09.038>
9. Нейштадт А. И. Захват в резонанс и рассеяние на резонансах в двухчастотных системах // Труды математического института. 2005. Т. 250. С. 198–218.
10. Маленков Г. Г. Структура и динамика жидкой воды // Журнал структурной химии. 2006. Т. 47. С. 5–35.
11. Miceli G., de Gironcoli S., Pasquarello A. Isobaric first-principles molecular dynamics of liquid water with nonlocal van der Waals interactions // The Journal of Chemical Physics. 2015. Vol. 142, Issue 3. P. 034501. doi: <http://doi.org/10.1063/1.4905333>
12. Malenkov G. G., Naberukhin Y. I., Voloshin V. P. Collective effects in molecular motions in liquids // Russian Journal of Physical Chemistry A. 2012. Vol. 86, Issue 9. P. 1378–1384. doi: <http://doi.org/10.1134/s003602441209004x>
13. Малафаев Н. Т. Вращательные колебания молекул как колебания сферического маятника в неоднородном поле сил // ScienceRise. 2016. Т. 2, № 2 (19). С. 62–69. doi: <http://doi.org/10.15587/2313-8416.2016.60587>
14. Малафаев Н. Т. Анализ фазовых диаграмм двухчастотного маятника как модели вращательных колебаний молекулы воды // ScienceRise. 2018. № 1 (42). С. 50–56. doi: <http://doi.org/10.15587/2313-8416.2018.121426>

*Рекомендовано до публікації д-р техн. наук Погожих М. І.
Дата надходження рукопису 15.05.2018*

Малафаєв Микола Тимофійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі, вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051
E-mail: mnt949@gmail.com