

## КОНСТРУЮВАННЯ ПЛОСКОЇ ІЗОТРОПНОЇ КРИВОЇ НА ОСНОВІ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ЗА ГОДОГРАФОМ ПІФАГОРА

*Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»*

*У роботі пропонується побудувати плоску ізотропну криву за годографом Піфагора (РН). Знайдені залежності для кривої Без'є 3-го порядку за годографом Піфагора та побудована ізотропна крива. Для розрахунків використовується крива, яка задана у комплексному просторі.*

**Постановка проблеми.** При моделюванні побудови кривих дуже часто виникає проблема обчислення або завдання кривої з конкретною довжиною дуги. В цьому випадку можна використовувати криві, що задані натуральними рівняннями. Але не всі криві можна задати таким чином та це не завжди зручно. При роботі з поліноміальними кривими доводиться застосовувати апроксимаційні методи для розрахунку довжини кривої, тому доцільно дослідити криві, які дозволяють це зробити без додаткових обчислень.

**Аналіз останніх досліджень.** Професором Фароуки та його співавторами [1, 2, 3] досліджується застосування кривих за годографом Піфагора (РН) у геометричному дизайні, графіці, плануванні та керуванні рухом. Розглядається теорія, алгоритми та використання плоских та просторових РН кривих. В статті [4] наводиться метод побудови раціональної кривої за годографом Піфагора. Раціональна просторова РН крива ідентифікується як ребро звороту стичної площини. Авторами роботи [5] пропонується розглянути кватерніонне подання РН кривих, яке робить зручним формулювання основних алгоритмів перетворення систем координат, алгоритмів мінімізації кадрів при обертанні. У роботах [6-7] проводиться дослідження побудови мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є.

**Формулювання цілей статті (постановка завдання).** Метою даної роботи є розробка способу конструювання плоскої ізотропної кривої Без'є за годографом Піфагора.

**Основна частина.** Існує деякий клас кривих, який називається кривими за годографом Піфагора [1]. З математичної точки зору плоска крива  $\mathbf{r}(t) = [x(t) \quad y(t)]$  буде кривою за годографом Піфагора (РН) тоді і тільки тоді, коли годограф (похідні) від  $\mathbf{r}(t)$  пов'язані наступним співвідношенням:

$$|\mathbf{r}'(t)|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2, \quad (1)$$

для деякого багаточлена  $\sigma(t)$ .

Для виразу (1) були знайдені умови, за якими поліноміальна крива може бути РН кривою:

$$\begin{aligned}x'(t) &= w(t)(u(t)^2 - v(t)^2), \\y'(t) &= 2w(t)u(t)v(t),\end{aligned}\tag{2}$$

де  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$  - поліноми.

Основна відмінність будь-якої РН кривої від «звичайних» поліноміальних кривих в тому, що вираз для довжини кривої є поліномом та загальна довжина може бути обчислена без чисельних методів.

Якщо підставити значення (2) у (1) будемо мати:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = (u(t)^2 + v(t)^2)^2.\tag{3}$$

Скористаємось виразом (2) за умови  $w(t) = 1$  та знайдемо залежності для плоскої кубічної кривої Без'є такі, щоб вона стала РН кривою.

Кубічну криву Без'є 3-го порядку будемо задавати у вигляді:

$$r(t) = r_0(1-t)^3 + 3r_1t(1-t)^2 + 3r_2(1-t)t^2 + r_3t^3.$$

Для кубічної кривої будемо шукати  $u(t)$  та  $v(t)$  у вигляді лінійних поліномів:

$$\begin{aligned}u(t) &= u_a(1-t) + u_bt, \\v(t) &= v_c(1-t) + v_dt,\end{aligned}\tag{4}$$

де  $u_a$ ,  $u_b$ ,  $v_c$ ,  $v_d$  - комплексні числа.

Візьмемо похідну від кривої Без'є та підставимо у рівняння (2). В результаті будемо мати:

$$\begin{aligned}u(t)^2 - v(t)^2 &= 3(x_1 - x_0)(1-t)^2 + 6(x_2 - x_1)t(1-t) + 3(x_3 - x_2)t^2, \\2u(t)v(t) &= 3(y_1 - y_0)(1-t)^2 + 6(y_2 - y_1)t(1-t) + 3(y_3 - y_2)t^2.\end{aligned}\tag{5}$$

Тобто можна записати:

$$\begin{aligned}(u_a(1-t) + u_bt)^2 &= 3x_1(1-t)^2 + 6x_2t(1-t) + 3x_3t^2, \\(v_c(1-t) + v_dt)^2 &= 3x_0(1-t)^2 + 6x_1t(1-t) + 3x_2t^2.\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}2(u_a(1-t) + u_bt)(v_c(1-t) + v_dt) &= 3(y_1 - y_0)(1-t)^2 + 6(y_2 - y_1)t(1-t) + \\+ 3(y_3 - y_2)t^2.\end{aligned}\tag{7}$$

Аналізуючи вирази (6) видно, що значення  $u_b$  та  $v_d$  залежать від значень  $u_a$  та  $v_c$ :

$$u_b = \frac{u_a^3}{v_c^2}, \quad v_d = \frac{u_a^2}{v_c}.\tag{8}$$

На основі (6) та (8) знайдемо залежності для абсцис:

$$x_0 = \frac{v_c^2}{3}, \quad x_1 = \frac{u_a^2}{3}, \quad x_2 = \frac{u_a^4}{3v_c^2}, \quad x_3 = \frac{u_a^6}{3v_c^4}.\tag{9}$$

Тепер знайдемо залежності для ординат. Для цього підставимо вирази (8) та (9) у (7). Будемо мати:

$$y_1 = \frac{2}{3}u_a v_c + y_0, \quad y_2 = \frac{2u_a^3}{3v_c} + y_1, \quad y_3 = \frac{2u_a^5}{3v_c^3} + y_2. \quad (10)$$

*Приклад 1.* Побудуємо криву Без'є 3-го порядку за годографом Піфагора. Задамо:  $u_a = 2 + 3i$ ,  $v_c = -2 - i$ ,  $y_0 = 3 + i$ . Одержимо:

- на основі виразів (8)

$$\text{значення } u_b = -4.08 + 8.44i,$$

$$v_d = -0.4 - 5.8i;$$

- на основі рівнянь (9)

$$\text{значення } x_0 = 1 + 1.33i,$$

$$x_1 = -1.667 + 4i,$$

$$x_2 = -11.16 + 1.547i,$$

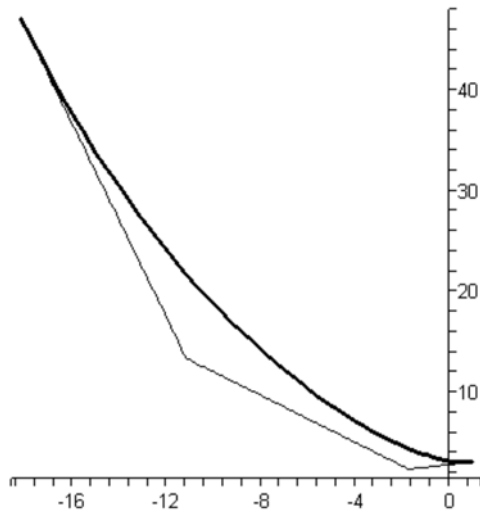
$$x_3 = -18.196 - 22.957i;$$

- на основі (10) значення

$$y_1 = 2.333 - 4.333i,$$

$$y_2 = 13.4 - 12.867i,$$

$$y_3 = 47.123 + 0.659i.$$



**Рис. 1** Дійсна кубічна крива Без'є, яка побудована за годографом Піфагора

При виділенні дійсної або уявної частини одержимо криву Без'є 3-го порядку (дійсна частина кривої Без'є відображена

на рис.1.)

Тепер побудуємо ізотропну Без'є 3-го порядку за годографом Піфагора. Для цього скористаємось виразом (3):

$$L = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(u(t)^2 + v(t)^2)^2} dt = \int_0^1 (u(t)^2 + v(t)^2) dt. \quad (11)$$

Як видно з умови (11) дане подання кривої дозволяє позбутися кореня, тобто одержати точне значення інтегралу. Для кривої Без'є 3-го порядку будемо мати:

$$\int_0^1 3(x_1 + x_0)(1-t)^2 + 6(x_2 + x_1)t(1-t) + 3(x_3 + x_2)t^2 dt = \quad (12)$$

$$= x_0 + 2x_1 + 2x_2 + x_3.$$

Тепер підставимо в одержаний вираз (12) значення абсцис (9) та привіняємо до нуля:

$$\frac{v_c^2}{3} + \frac{2u_a^2}{3} + \frac{2u_a^4}{3v_c^2} + \frac{u_a^6}{3v_c^4} = 0. \quad (13)$$

Розв'яжемо рівняння (13), приймаючи  $u_a$  за відоме значення, а  $v_c$  за невідоме. Одержимо розв'язки:

$$v_c^2 = -u_a^2 \text{ або } v_c^2 = u_a^2 \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (14)$$

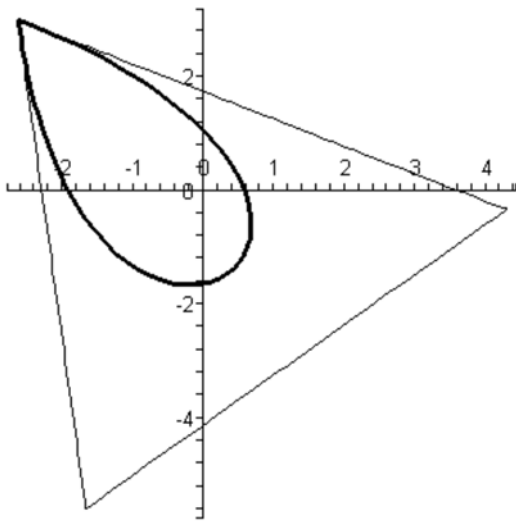
*Приклад 2.* Побудуємо ізотропну криву Без'є 3-го порядку за годографом Піфагора. Задамо:  $u_a = 2 + 3i$ ,  $y_0 = 3 + i$ .

Якщо  $v_c^2 = -u_a^2$  будемо мати ізотропну пряму. Візьмемо в якості приклада

одне значення  $v_c = u_a \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}}$ . Для заданих вхідних даних

$v_c = -1.598 + 3.232i$ . Тепер будемо визначати значення за попереднім прикладом. Будемо мати:

- на основі виразів (8) значення  $u_b = 1.598 - 3.232i$ ,  
 $v_d = 3.598 - 0.232i$ ;
- на основі (9) значення  $x_0 = -2.63 - 3.443i$ ,  $x_1 = -1.667 + 4i$ ,  
 $x_2 = 4.297 - 0.557i$ ,  $x_3 = -2.63 - 3.443i$ ;
- на основі (10) значення  $y_1 = -5.595 + 2.113i$ ,  $y_2 = -0.333 + 9i$ ,  
 $y_3 = 3 + i$ .



**Рис. 2.** Дійсна частина кубічної ізотропної кривої Без'є, яка побудована за годографом Піфагора

Проаналізуємо довжини сторін багатокутника:

$$R_{0,1} = 4.298 - 0.557i,$$

$$R_{1,2} = 2.63 + 3.443i,$$

$$R_{2,3} = 1.667 - 4i, \quad R_{3,0} = 0.$$

Як бачимо довжини дотичних не дорівнюють 0. Розрахуємо тепер довжину кривої у комплексному просторі:

$$L = \int_0^1 (-12.892 + 1.669i)(1-t)^2 + (15.784 + 20.66i)(1-t)t + (5 - 12i)t^2 dt = 0.$$

Дійсна частина кубічної ізотропної кривої Без'є відображена на рис.2.

**Висновки.** Дослідження показали, що крива Без'є, яка побудована за годографом Піфагора, дозволяє одержати значення довжини кривої без застосування апроксимаційних методів. Плоску ізотропну криву можна

побудувати на основі ненульових значень сторін характеристичного багатокутника для кривої Без'є. Подальші дослідження пов'язані з визначенням просторової ізотропної кривої та моделюванням поверхонь.

### Література

1. Farouki R. T., Sakkalis T. Pythagorean hodographs / R. T. Farouki, T. Sakkalis // IBM Journal of Research and Development.- V.34, 1990.- P. 736–752.
2. Farouki R. T. Pythagorean–hodograph curves / R. T. Farouki // Handbook of Computer Aided Geometric Design .- North Holland, 2002.- P. 405–427.
3. Farouki R. T. Pythagorean–Hodograph Curves: algebra and geometry inseparable / R. T. Farouki // Geometry and Computing.- Springer, Berlin, 2008. - Vol.1. - 728 p.
4. Farouki R.T., Sir Zd. Rational Pythagorean–hodograph space curves / R. T. Farouki, Zd. Sir // Computer Aided Geometric Design , 2011.- V.28, Issue 2. - P.75-88.
5. Farouki Rida T., Chang Yong Han Algorithms spatial for Pythagorean–hodograph curves/ R. T. Farouki, Chang Yong Han //Geometric Properties for Incomplete Data.- Springer, 2006.- P.43-58.
6. Аушева Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без'є / Н.М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”.-Вип.88.-К.:КНУБА, 2011р.- С.57-61.
7. Аушева Н.М. Моделювання мінімальних поверхонь Без'є / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.50.- Мелітополь: ТДАТУ, 2011. - С.105-109.

### CONSTRUCTING OF ISOTROPIC PLANE CURVE BASED ON THE EQUATION OF PYTHAGOREAN-HODOGRAPH CURVE

*N. Ausheva*

The paper proposed to apply Pythagorean-hodograph (PH) curve for the construction of a plane isotropic curve. Dependencies for the 3<sup>rd</sup> order Bezier curve based on Pythagorean-hodograph curve were found and isotropic curve was build. The curve in the complex space was used for calculation.