

УДК 528.1

DOI: 10.25140/2411-5363-2019-1(15)-258-266

Сергій Крячок

**ДОСЛІДЖЕННЯ КРИТЕРІВ ІЗ ВИЯВЛЕННЯ ЗАЛИШКОВИХ СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК У РЕЗУЛЬТАТАХ ПОДВІЙНИХ НЕРІВНОТОЧНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ**

**Актуальність теми дослідження.** Щоб отримати надійні результати геодезичних вимірювань, необхідно використовувати не тільки сучасні автоматизовані та високоточні геодезичні прилади, а й застосовувати методи математичного опрацювання, які гарантують у підсумку достовірність результатів вимірювань. Головними завданнями математичного опрацювання геодезичних вимірів є обчислення їх ймовірного значення, близького до істинного, а також визначення точності виміряних величин.

**Постановка проблеми.** Інколи в практиці геодезичних робіт величини вимірюються двічі. У такий спосіб утворюється ряд подвійних вимірів, за яким можна визначати їх різниці та виконати оцінку точності. Систематичні похибки, що містяться в подвійних вимірах, можуть частково компенсуватися в різницях, однак залишкові систематичні складові можуть бути суттєвими. Тому для виявлення залишкових систематичних похибок застосовують кілька критеріїв.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Були розглянуті останні публікації у відкритому доступі, які присвячені висвітленню критеріїв для виявлення залишкових систематичних похибок у різницях подвійних геодезичних нерівноточних вимірів.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Недослідженими є причини неузгодження критеріїв з виявлення значної систематичної похибки в результатах подвійних нерівноточних геодезичних вимірювань у тій же самій вибірці.

**Мета статті.** Головною метою цієї статті є встановлення причин, за якими критерії з виявлення значної систематичної похибки в результатах подвійних нерівноточних геодезичних вимірювань показують у конкретних випадках протилежні результати.

**Виклад основного матеріалу.** Проведені теоретичні дослідження та утворено новий критерій для виявлення значної систематичної похибки в різницях подвійних нерівноточних вимірів та його модифікація. Як вихідні дані для математичного моделювання була використана відома вибірка з 9 різниць подвійних нерівноточних вимірів. Обчислена систематична похибка як середня вагова та вилучена з різниць. Шляхом додавання сталої величини до кожної з виправлених різниць імітувалась поява залишкових систематичних похибок. Виконувались обчислення лівих та правих частин кожного з шести відомих критеріїв та нового критерію і його модифікації. У такий спосіб виконувалось математичне моделювання на персональному комп'ютері з використанням програмного засобу MS Excel.

**Висновки відповідно до статті.** За результатами математичного моделювання встановлено, що відомі критерії в тій же самій вибірці відмічають різні значення значної систематичної похибки. Деякі з них не виявляють навіть великої за значенням систематичної похибки у вибірці, оскільки залежать від співвідношення таких параметрів вибірки, як сума ваг та коефіцієнт Стюдента. За результатами теоретичних досліджень було отримано новий критерій для виявлення залишкових систематичних похибок у різницях подвійних нерівноточних геодезичних вимірів та його модифікація. Цей критерій, на відміну від розглянутих, є стабільним до виявлення значної систематичної складової одиниці ваги на рівні 0,2 від загальної СКП одиниці ваги не залежно від параметрів вибірки та закону розподілу різниць подвійних вимірів.

**Ключові слова:** теорія похибок геодезичних вимірів; середня квадратична похибка; систематична похибка; подвійні нерівноточні виміри; математичне моделювання.

Табл.: 3. Бібл.: 11.

**Актуальність теми дослідження.** Щоб отримати надійні результати вимірювань, необхідно використовувати не тільки сучасні автоматизовані, високоточні геодезичні прилади та новітні методики [1-3], а й застосовувати методи математичного опрацювання, які гарантують у підсумку достовірність результатів вимірювань. Адаже відомо, що в процесі вимірювань елементів геодезичних мереж виникають похибки, які спотворюють результати вимірювань. Тому головним завданням математичного опрацювання геодезичних вимірів є обчислення їх ймовірного значення, близького до істинного, а також визначення точності виміряних величин.

**Постановка проблеми.** Інколи в практиці геодезичних робіт величини вимірюються двічі. У такий спосіб утворюється ряд подвійних вимірів, за яким можна визначати їх різниці та виконати оцінку точності. Систематичні похибки, що містяться в подвійних геодезичних вимірах, можуть частково компенсуватися в різницях, однак залишкові систематичні складові можуть бути суттєвими [4]. Тому для виявлення залишкових систематичних похибок застосовують кілька критеріїв.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Треба зазначити, що розглядаються подвійні геодезичні виміри, нерівноточні між собою, а у кожній парі – рівноточні. У

роботах [4-5] наведено нерівність, яка повинна виконуватись за умови незначних залишкових систематичних похибок

$$\left| \sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i \right| \leq 0,25 \sum_{i=1}^n |p_{d_i} d_i|, \tag{1}$$

де  $d_i$  – різниці подвійних вимірів;  $p_{d_i}$  – ваги різниць;  $n$  – число різниць  $d_i$ .

Цей критерій передбачає, що значення  $d_i$  підкоряються нормальному закономі розподілу похибок вимірювань [5].

У роботі [6] наведено критерій незначних систематичних похибок

$$\left| \sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i \right| \leq 1,25 \cdot t_{\beta} \sum_{i=1}^n |p_{d_i} d_i| / \sqrt{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}, \tag{2}$$

де  $t_{\beta}$  – коефіцієнт Стьюдента, який встановлюється залежно від кількості надлишкових вимірювань та вибраної довірчої ймовірності.

Для  $n > 28$  та для довірчої ймовірності  $P = 0,95$  критерій (2) має вигляд [6]

$$\left| \sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i \right| \leq 2,5 \sum_{i=1}^n |p_{d_i} d_i| / \sqrt{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}. \tag{3}$$

Згідно з джерелами [5; 7; 8] відсутність значних залишкових систематичних похибок у різницях подвійних нерівноточних вимірів підтверджується критерієм

$$\left| \sum_{i=1}^n d_i \cdot \sqrt{p_{d_i}} \right| \leq 0,25 \sum_{i=1}^n |d_i \cdot \sqrt{p_{d_i}}|. \tag{4}$$

Цей критерій також передбачає, що значення  $d_i$  підкоряються нормальному закономі розподілу похибок вимірювань [5].

У роботі [6] запропоновано до використання критерій наявності незначних систематичних похибок у різницях  $d_i$  у вигляді

$$\left| \sum_{i=1}^n d_i \sqrt{p_{d_i}} \right| \leq 1,25 t_{\beta} \frac{\sum_{i=1}^n |d_i \sqrt{p_{d_i}}|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt{p_{d_i}}}}, \tag{5}$$

де  $t_{\beta}$  – коефіцієнт Стьюдента.

Умовою незначного впливу систематичної похибки  $\theta$  на середню квадратичну похибку одиниці ваги (СКП) -  $\mu$ , вважається виконання нерівності [5]

$$|\theta| \leq 0,2\mu, \tag{6}$$

де  $\mu$  – середня квадратична похибка (СКП) одиниці ваги [9], яка дорівнює

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i^2}{n}}, \tag{7}$$

а систематична похибка  $\theta$  визначається як середня вагова

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i}{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}. \quad (8)$$

Відомо, що різниці, звільнені від систематичної похибки, дорівнюють [4]

$$d'_i = d_i - \theta. \quad (9)$$

Тоді випадкова складова СКП одиниці ваги дорівнює згідно з [4; 5; 7; 8]

$$\mu' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i'^2}{n-1}}. \quad (10)$$

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Аналіз наведених публікацій показує наявність кількох критеріїв із визначення залишкової систематичної похибки в різницях подвійних нерівноточних вимірів. Згідно з дослідженнями, наведеними в статті [6], критерії за формулами (1)–(5) можуть давати в конкретному випадку протилежні результати. Робиться висновок, що критерій за формулою (4) є більш надійним («жорстким») [6; 10] та пропонується для практичного використання, а критерії за формулами (1)–(3) та (5) – для аналізу результатів подвійних рівноточних вимірів та їх дослідження.

Недослідженим є причини неузгодження критеріїв у виявленні значної систематичної похибки в результатах подвійних нерівноточних вимірювань у тій же самій вибірці.

**Мета статті.** Головною метою цієї статті є встановлення причин, за якими критерії у виявленні значної систематичної похибки в результатах подвійних нерівноточних вимірювань показують у конкретних випадках протилежні результати.

**Виклад основного матеріалу.** У роботі [6] стверджується, що для обчислення СКП одиниці ваги  $\mu'$  за різницями  $d'_i$  подвійних вимірів, звільнених від систематичної похибки  $\theta$ , у формулі (10) в знаменнику необхідно мати кількість вимірів  $n$ , а не  $n-1$ . Але не наведено обґрунтування вказаного твердження. Це можна довести таким чином. Якщо піднести праву та ліву частини (9) до квадрату

$$(d'_i)^2 = d_i^2 + \theta^2 - 2d_i\theta, \quad (11)$$

та помножити на ваги  $p_i$ , то сума членів лівої та правої частини набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^n p_{d_i} (d'_i)^2 = \sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i^2 + \theta^2 \sum_{i=1}^n p_{d_i} - 2\theta \sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i. \quad (12)$$

Якщо поділити ліву та праву частини формули (12) на  $\sum_{i=1}^n p_{d_i}$  та врахувати формулу (8), то

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i} (d'_i)^2}{\sum_{i=1}^n p_{d_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i^2}{\sum_{i=1}^n p_{d_i}} + \theta^2 - 2\theta^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i^2}{\sum_{i=1}^n p_{d_i}} - \theta^2. \quad (13)$$

Після множення лівої та правої частини формули (13) на  $\frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}{n}$  та взяття їх під знак квадратного кореня, можна отримати залежність

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i} (d'_i)^2}{n}} = \sqrt{\left( \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i^2}{n}} \right)^2 - \theta^2 \frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}{n}}, \quad (14)$$

а з урахуванням (7) та (10), причому в знаменнику (10) поставити  $n$ , то (14) набуде вигляду

$$\mu' = \sqrt{\mu^2 - \theta^2 \frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}{n}}. \quad (15)$$

Як видно з лівих частин формул (14) та (15), для визначення СКП одиниці ваги  $\mu'$  за різницями  $d'_i$  подвійних вимірів, звільнених від систематичної похибки  $\theta$ , надлишковими є всі  $n$  різниць  $d'_i$ . З іншого боку, різниці  $d'_i$ , звільнені від систематичної похибки, ще більше наближаються до істинних похибок, ніж різниці  $d_i$ , а тому всі вони повинні бути надлишковими.

Таким чином, у формулі (15) величина  $\mu$  є загальною СКП одиниці ваги,  $\mu'$  – випадковою складовою СКП одиниці ваги, а вираз  $\sqrt{\theta^2 \frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}{n}}$  – систематичною складовою СКП одиниці ваги (надалі – систематичною складовою).

Відомо, що систематична складова не повинна перевищувати  $1/5 = 0,2$  від загальної СКП  $\mu$ , що приймається як необхідна умова незначного впливу систематичної складової та приймається як стандарт в роботах [4; 5; 7; 8], то

$$\sqrt{\theta^2 \frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}{n}} \leq 0,2\mu. \quad (16)$$

Тому можна стверджувати про утворення ще одного критерію наявності незначної систематичної похибки  $\theta$  у різницях подвійних нерівноточних вимірів у вигляді

$$|\theta| \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}{n}} \leq 0,2\mu, \quad (17)$$

або у більш зручному для розрахунків вигляді з урахуванням (7) та (8)

$$\left| \sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i \right| \leq 0,2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n p_{d_i}}. \quad (18)$$

Зрозуміло, що в усіх наведених формулах радикали повинні мати лише додатні значення.

У випадку подвійних рівноточних вимірювань  $p_i = 1$  і вираз (17) трансформується у

$$\theta \leq 0,2\mu, \quad (19)$$

що і покладено в основу кількох критеріїв для рівноточних подвійних вимірів [4; 5; 8], де  $\mu$  розглядається як СКП однієї різниці.

Для досягнення поставленої мети було проведене математичне моделювання. За вихідну вибірку було взято ту, яка наведена в [4] на сторінці 183, утвореної в результаті вимірювання ліній теодолітного ходу в прямому та зворотному напрямках. У стовпчиках 2–4 табл. 1 наведено різниці  $d_i$ , значення ваг  $p_{d_i}$ , різниць та добутки  $p_{d_i}d_i$  з прикладу [4].

Таблиця 1

*Вихідна вибірка та результати математичного моделювання для  $\theta = +1,26$*

$N$	$p_d$	$d$ , см	$p_d d$ , см	$d'$ , см	$\sqrt{p_d}$	$d'+c=d'',$ см	$p_d d''$ , см	$ P_d d'' $ , см	$d''\sqrt{p_d}$ ,см	$ d''\sqrt{p_d} $ , см	$p_d (d'')^2$ , см
1	0,26	9	2,35	8,68	0,511	9,94	2,60	2,60	5,08	5,08	25,81
2	0,76	2	1,52	1,68	0,872	2,94	2,23	2,23	2,56	2,56	6,54
3	0,42	6	2,54	5,68	0,650	6,94	2,93	2,93	4,51	4,51	20,33
4	0,29	-7	-2,04	-7,32	0,540	-6,06	-1,77	1,77	-3,27	3,27	10,72
5	0,54	-4	-2,17	-4,32	0,737	-3,06	-1,66	1,66	-2,26	2,26	5,10
6	0,38	5	1,90	4,68	0,617	5,94	2,26	2,26	3,66	3,66	13,39
7	0,63	3	1,88	2,68	0,791	3,94	2,46	2,46	3,11	3,11	9,69
8	0,32	-7	-2,26	-7,32	0,568	-6,06	-1,96	1,96	-3,44	3,44	11,86
9	0,59	-4	-2,36	-4,32	0,767	-3,06	-1,80	1,80	-2,35	2,35	5,53
$\Sigma$	4,20		1,36		6,05		5,29	19,67	7,59	30,25	108,97

Визначено значення систематичної похибки за формулою (8), яке становило  $\theta = 0,32$  см. Надалі виконувалось математичне моделювання з використанням програмного засобу Excel [11]. До значень  $d'_i$ , звільнених від  $\theta$  ( $d'_i = d_i - \theta$ ) (стовпчик № 5), додавались додатні величини  $c$  з дискретністю 0,01 см (стовпчик № 7), імітуючи появу нової систематичної похибки  $\theta$  ( $c = \theta$ ). У стовпчиках 8–12 виконувались обчислення, необхідні для реалізації наведених вище критеріїв. У цих же стовпчиках табл. 1 наведено числові значення згідно з  $c = \theta = +1,26$  см.

У табл. 2 представлені результати математичного моделювання.

Таблиця 2

*Результати математичного моделювання*

№ формули	$c$ , см	Значення критерію		$\mu$ , см	$ \theta  \cdot \sqrt{\frac{\sum p_d}{n}} / \mu$
		ліва частина	права частина		
1	1,17	4,91	4,90	3,47	0,23
2	50	209,76	289,31	34,30	-
3	50	209,76	256,02	34,30	-
4	1,26	7,59	7,56	3,48	0,25
5	50	302,59	347,46	34,30	-
6	0,70	0,700	0,681	3,41	0,14
17	1,02	0,696	0,689	3,44	0,20
18	1,02	4,28	4,23	3,44	0,20

$\mu' = 3,38$  см,  $t_\beta = 2,26$  – для  $n = 9$  та довірчої ймовірності  $P = 0,95$

З їх результатів видно, що критерій за формулою (6) показав наявність найменшого значення систематичної похибки  $\theta = c = 0,70$  см серед інших критеріїв. Загальна СКП одиниці ваги становила  $\mu = 3,41$  см. Відношення систематичної складової до значення загальної СКП одиниці ваги дорівнює 0,14 (нижче стандарту 0,2). Значення  $\theta = 1,02$  см показав кри-

## TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

терій за формулою (17) та його модифікація з формулою (18), які можна вважати рівноцінними. Значення  $\mu = 3,44$  см – відношення систематичної складової до значення загальної СКП одиниці ваги становило 0,20 (стандартне значення).  $\theta = 1,17$  см як значну систематичну похибку зареєстрував критерій за формулою (1). Загальна СКП одиниці ваги  $\mu = 3,47$  см, відношення систематичної складової до значення загальної СКП одиниці ваги дорівнює 0,23 (вище стандарту 0,2). Останнім зреагував на наявність систематичної складової  $\theta = 1,26$  см критерій за формулою (4). Значення  $\mu = 3,48$  см, відношення систематичної складової до значення загальної СКП одиниці ваги дорівнює 0,25 (вище стандарту 0,2).

Критерії за формулами (2), (3) та (5) не показують наявності систематичної похибки взагалі. У табл. 2 для прикладу наведено  $\theta = 50$  см – надвелике значення систематичної похибки, а вказані критерії показують її відсутність.

Можна спрогнозувати можливість застосування критеріїв (2), (3), (5) для конкретної вибірки з таких міркувань. Нехай додатне значення  $c$  збільшується та збільшує величини  $d_i = d'_i + c$  доти, поки одне або кілька значень різниць  $d_i$  (раніше від'ємних) дорівнюватимуть нулю, а інші будуть додатними. Це означає стовідсоткову присутність у різницях  $d_i$  значної систематичної похибки. Тоді

$$\left| \sum_{i=1}^n p_{d_i} d_i \right| = \sum_{i=1}^n |p_{d_i} d_i|, \quad (20)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n d_i \cdot \sqrt{p_{d_i}} \right| = \sum_{i=1}^n |d_i \cdot \sqrt{p_{d_i}}|. \quad (21)$$

Підстановка виразів (20) та (21) у формули (2), (3), (5) та нескладні перетворення дозволяють визначити умови, за якими в конкретній вибірці критерії за формулами відповідно (2), (3), (5) можуть показати присутність значної систематичної похибки  $\theta$ , яка може бути більшою, ніж та, яка фактично міститься в різницях  $d_i$ :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n p_{d_i}} > 1,25 \cdot t_{\beta}; \quad (22)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n p_{d_i}} > 2,5; \quad (23)$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt{p_{d_i}}} > 1,25 \cdot t_{\beta}. \quad (24)$$

Невиконання відповідного критерію нерівності (22)–(24) свідчить про те, що критерій у цій вибірці не працює, і буде вказувати на незначну величину систематичної похибки  $\theta$ , навіть якщо вона завелика. Так, підстановка значень параметрів вибірки, представленої в табл. 1, у нерівність (22) дозволяє отримати  $2,05 < 2,82$ ; у нерівність (23) дає  $2,05 < 2,5$ ; у нерівність (24) – значення  $2,46 < 2,82$ . Оскільки нерівності (22)–(24) не виконуються, то критерії за формулами (2), (3), (5) є непридатними для вибірки, наведеної в табл. 1, про що свідчать і результати математичного моделювання, наведені у табл. 2. Якщо ж, наприклад, збільшити ваги  $p_{d_i}$  втричі, то згідно з (22)–(24):  $3,5 > 2,8$ ;  $3,5 > 2,5$ ;  $3,2 > 2,8$  відповідно. Дійсно, результати математичного моделювання для цього випадку, які наведені в табл. 3, вказують на виявлення критеріями (2), (3), (5) значної систематичної похибки (стовпчик № 2), введеної в різницях подвійних вимірювань.

Результати математичного моделювання для критеріїв (2), (3), (5)

№ формули	с, см	Значення критерію		μ, см	$ \theta  \cdot \sqrt{\frac{\sum p_d}{n}} / \mu$
		ліва частина	права частина		
2	4,12	51,85	51,80	7,61	0,757
3	3,59	45,18	45,05	7,22	0,696
5	5,24	54,87	54,86	8,51	0,861

$\mu' = 3,38$  см,  $t_{\beta} = 2,26$  - для  $n = 9$  та довірчої ймовірності  $P = 0,95$ ,  $\sum p_d = 12,59$

Однак ці критерії виявляють занадто значні систематичні похибки від 3,59 см до 5,24 см та відношення систематичної складової до загальної СКП одиниці ваги значно більші за стандарт 0,2, що неприпустимо. Таким чином, здатність критеріїв (2), (3), (5) виявити значну систематичну похибку залежить від співвідношень між параметрами розподілу, а саме: суми ваг та коефіцієнта Стьюдента.

Критерії за формулами (1) та (4) за умови (20) та (21) відповідно дозволяють отримати ту ж саму нерівність  $1 > 0,25$ , що і відповідає появі дуже значної систематичної складової без якихось вимог до співвідношення між параметрами розподілу. Проте критерії за формулами (1) та (4) отримані на підставі співвідношень між параметрами нормального розподілу. Це збільшує ризик їх використання, якщо закон розподілу різниць дещо відрізняється від нормального, що характерно для малих за об'ємом вибірок, та в разі, коли різниці підкоряються іншому законові розподілу.

Стосовно критерію за формулами (17) та похідного від нього за формулою (18). Для рівних правої та лівої частини формули (17) з формули (15) випливає

$$\mu' = \sqrt{\mu^2 - (0,2\mu)^2} = \mu\sqrt{0,96} = 0,98\mu. \quad (25)$$

Тобто виконання нерівності (17) дозволяє обмежити виявлення систематичної похибки  $\theta$  в різницях на рівні не більше 0,2 від загальної СКП одиниці ваги  $\mu$ . Це може спотворити її не більше ніж на  $(1 - 0,98) \cdot 100 \% = 2 \%$ , якщо вважати систематичну похибку  $\theta$  незначною та не вилучати її з різниць  $d_i$ . Обмежень на наявність якихось співвідношень між параметрами вибірки критерій немає. При теоретичному обґрунтуванні цього критерію не враховувались будь-які співвідношення, притаманні тому чи іншому законові розподілу. Тому цей критерій є стабільним до значення систематичної складової на рівні стандарту 0,2 від загальної СКП одиниці ваги  $\mu$  у будь-якому випадку.

Критерій за формулою (6) має свої особливості. Для рівних правої та лівої частин виразу (6) та з формули (15) випливає

$$\mu' = \sqrt{\mu^2 - (0,2\mu)^2 \frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}{n}} = \mu \sqrt{1 - 0,04 \frac{\sum_{i=1}^n p_{d_i}}{n}}. \quad (26)$$

Тоді у випадку, коли  $\sum_{i=1}^n p_{d_i} = n$ -критерій має ознаки критерію (17). Якщо  $\sum_{i=1}^n p_{d_i} < n$ , то число під квадратним коренем буде більше від 0,96 і критерій буде реагувати на меншу систематичну похибку  $\theta$ , ніж попередній критерій, вважаючи її значною. Якщо ж  $\sum_{i=1}^n p_{d_i} > n$ , то навпаки, критерій вкаже на наявність більшої систематичної похибки.

Таким чином, здатність цього критерію до виявлення значної систематичної похибки залежить від таких параметрів вибірки, як сума ваг та об'єм вибірки.

## TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

**Висновки відповідно до статті.** За результатами математичного моделювання встановлено, що відомі критерії в тій самій вибірці відмічають різні значення значної систематичної похибки геодезичних вимірів. Деякі з них взагалі не вказують на наявність навіть великої за значенням систематичної похибки у вибірці, оскільки залежать від співвідношення таких параметрів вибірки, як сума ваг та коефіцієнт Стюдента. За результатами теоретичних досліджень було отримано новий критерій для виявлення залишкових систематичних похибок у різницях подвійних нерівноточних вимірів. Цей критерій, на відміну від існуючих, є стабільним до значення систематичної складової одиниці ваги на рівні 0,2 від загальної СКП одиниці ваги незалежно від параметрів вибірки та закону розподілу різниць подвійних вимірів.

**Список використаних джерел**

1. Шульц Р. В., Терещук О. І., Анненков А. О., Нисторьяк І. О. Практичні дослідження точності визначення координат за супутниковими технологіями у реальному часі. *Інженерна геодезія*. 2014. № 61. С. 58–77.
2. Терещук О. І., Нисторьяк І. О., Шульц Р. В. Відновлення міських полігонометричних мереж сучасними супутниковими технологіями. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*. Львів, 2015. Вип. 82. С. 59–72.
3. Крячок С. Д., Мамонтова Л. С. Побудова полігонометричних мереж зустрічними ходами. *Вісник геодезії та картографії*. 2014. № 5. С. 9–12.
4. Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: Навчальний посібник. Київ: КНУБА, 2003. 216 с.
5. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений: учебник для вузов. Москва: Недра, 1983. 223 с.
6. Рябій В. А., Рябій В. В. Математичне опрацювання результатів подвійних нерівноточних вимірів. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*. 2015. Вип. I (29). С. 33–38.
7. Зозуляк М. П., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: Навчальний посібник. Львів: Растр 7, 2007. 408 с.
8. Гайдаев П. А., Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений: учебник для вузов. Москва: Недра, 1969. 400 с.
9. Видуев Н. Г., Кондра Г. С. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений. Москва: Недра, 1969. 320 с.
10. Рябій В. А., Рябій В. В. Математичне опрацювання результатів подвійних рівноточних вимірів. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*. 2015. Вип. 81. С. 74–81.
11. Жученко А. І., Ярощук Л. Д. Опрацювання параметрів та перевірка статистичних гіпотез. Теорія та практика роботи з MathCAD, MatLab, MS Excel: навч. посіб. Київ: НТУУ «КПІ», 2012. 156 с.

**References**

1. Shults, R. V., Tereshchuk, O. I., Annenkov, & A. O., Nystoriak, I. O. (2014). Praktychni doslidzhennia tochnosti vyznachennia koordynat za suputnykovymy tekhnolohiiamy u realnomu chasi [Practical studies of the accuracy of coordinate determination by satellite technology in real time]. *Inzhenerna heodeziia – Engineering geodesy*, 61, 58–77 [in Ukrainian].
2. Tereshchuk, O. I., Nystoriak, I. O., & Shults, R. V. (2015). Vidnovlennya mis'kykh polihonometrychnykh merezh suchasnymy suputnykovymy tekhnolohiiamy [Reconstruction of urban polygonometric networks with modern satellite technologies]. *Heodeziya, kartohrafiya ta aro-fotoznimannya - Geodesy, cartography and aerial photography*, 82, 59-72 [in Ukrainian].
3. Kryachok, S. D., & Mamontova, L. S. (2014). Pobudova polihonometrychnykh merezh зустрічними khodamy [Construction of polygonometric networks with counter moves]. *Visnyk heodeziyi ta kartohrafiyi - Herald of Geodesy and Cartography*, 5, 9–12 [in Ukrainian].
4. Voytenko, S. P. (2003). *Matematychna obrobka heodezychnykh vymiriv. Teoriya pokhybok vymiriv [Mathematical processing of geodetic measurements. Theory of measurement errors]*. Kyiv: KNUBA [in Ukrainian].
5. Bol'shakov, V.D. (1983). *Teoriya oshibok nablyudeniya [Theory of observation errors]*. Moscow: Nedra [in Russian].
6. Ryabiy, V.A., & Ryabiy, V.V. (2015). Matematychnе opratsyuvannya rezul'tativ podviynykh nerivnotochnykh vymiriv [Mathematical analysis of the results of double non-uniform measurements]



*Cuchasni dosyahnennya heodezychnoyi nauky ta vyrobnytstva – Contemporary achievements in geodetic science and production*, 1 (29), 33-38 [in Ukrainian].

7. Zazulyak, P.M. (2007). *Osnovy matematychnoho opratsyuvannya heodezychnykh vymiryuvan [Fundamentals of mathematical processing of geodetic measurements]*. Lviv: Rastr [in Ukrainian].

8. Gaydaev, P.A. & Bol'shakov V.D. (1969). *Teoriya matematicheskoy obrabotki geodezicheskikh izmereniy [The theory of mathematical processing of geodetic measurements]*. Moscow: Nedra [in Russian].

9. Viduyev, N.G., & Kondra, G.S. (1969). *Veroyatnostno-statisticheskii analiz pogreshnostey izmereniy [Probabilistic-statistical analysis of measurement errors]*. Moscow: Nedra [in Russian].

10. Ryabiy, V.A., & Ryabiy, V.V. (2015). *Matematychna obrobka rezul'tativ podviynykh rivnotochnykh vymiriv [Mathematical treatment of the results of double homogeneous measurements]*. *Heodeziya, kartohrafiya i aerofotoznmannya – Geodesy, cartography and aerial photography*, 81, 74-81 [in Ukrainian].

11. Zhuchenko A.I., & Yaroshchuk, L. D. (2012). *Opratsyuvannya parametriv ta perevirka statystychnykh hipotez. Teoriya ta praktyka roboty z MathCAD, MatLab, MS Excel [Working out parameters and checking statistical hypotheses. The theory and practice of working with MathCAD, MatLab, MS Excel]*. Kyiv: NTUU "KPI" [in Ukrainian].

UDC 528.1

Serhiy Kryachok

## RESEARCHES OF CRITERIA FOR DETERMINATION OF RESIDUAL SYSTEMATIC ERRORS IN THE RESULTS OF DOUBLE GEODETIC MEASUREMENTS UNEQUAL ACCURACY

**Urgency of the research.** In order to obtain reliable measurement results, it is necessary to use not only modern automated and highly accurate geodetic instruments, but also to apply mathematical processing methods, which ultimately guarantee the accuracy of measurement results. The main tasks of mathematical processing of geodetic measurements is the calculation of their probable value close to the true, as well as determining the accuracy of the measured values.

**Target setting.** Sometimes in the practice of geodetic works, quantities are measured twice. Thus, a series of double measurements is formed, by which one can determine their differences and perform an accuracy estimate. The systematic errors contained in the differences of double measurements can be partially compensated, but the residual systematic components can be significant. Therefore, to identify residual systematic errors apply various criteria.

**Actual scientific researches and issues analysis.** The latest publicly available publications were reviewed, which provided criteria for identifying residual systematic errors in the differences of double geodetic measurements unequal accuracy.

**The research objective.** The reasons for the disagreement of the criteria in identifying significant systematic errors in the results of double geodetic measurements unequal accuracy in the same sample are not investigated.

**The statement of basic materials.** Theoretical studies have been carried out and a new criterion has been created to identify a significant systematic error in the double unequal dimensions geodetic measurement and its modification. As a source of data for mathematical modeling, have was used a known sample of 9 differences of double measurements unequal accuracy. The systematic error is determined as the average weight and is removed from the differences. By adding a constant value to each corrected difference, residual systematic errors were simulated. The left and right sides of each of the six known criteria and the new criterion with its modification were calculated. Thus, mathematical modeling was performed on a personal computer using MS Excel software.

**Conclusions.** Theoretical studies have been carried out and a new criterion has been created to identify a significant systematic error in the double unequal dimensions geodetic measurement and its modification. Some of them do not even note the existence of a large systematic error because they depend on the ratio of such sampling parameters as the sum of the weights and the Student's coefficient. As a result of theoretical studies, a new criterion was obtained for identifying significant systematic errors in the differences of double measurements unequal accuracy and its modification. This criterion, in contrast to the considered ones, is stable relative to the value of the systematic component of the unit of weight at the level of 0.2 of the total mean square error of the unit of weight. It does not depend on the parameters of the sample and the law of distribution of the differences in double measurements.

**Keywords:** theory of geodetic measurement errors; mean square error; systematic error; double measurements unequal accuracy; math modeling.

Table: 3. References: 11.

**Крячок Сергій Дмитрович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри геодезії, картографії та землеустрою, Чернігівський національний технологічний університет. (вул. Шевченка, 95, м. Чернігів, 14035, Україна).  
**Kryachok Serhiy** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of geodesy, cartography and land management, Chernihiv national University of Technology. (95 Shevchenko Str., 14035, Chernihiv, Ukraine).  
**E-mail:** geodesist2015@gmail.com  
**ORCID:** <http://orcid.org/0000-0001-5633-1501>  
**ResearcherID:** N-3061-2016