

УДК 539.3

Г. Сулим<sup>1</sup>, докт. фіз.-мат. наук; Я. Пастернак<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка

<sup>2</sup>Луцький національний технічний університет

## ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ПРУЖНИХ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА ЧИСЛОВИМ РОЗВ'ЯЗКОМ ЗАДАЧІ

У роботі запропоновано ефективний алгоритм визначення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень за числовим розв'язком задачі на основі апроксимації полів напружень методом найменших квадратів. Обґрунтовано необхідність утримання не одного, а декількох членів асимптотичного розвинення для апроксимації відповідних полів біля вістря пружного включення. Подано низку числових прикладів, де шляхом порівняння із аналітичними розв'язками для тріщини та жорсткого включення, а також числовими на основі  $J$ -інтеграла доведено ефективність запропонованого підходу.

**Ключові слова:** тонке включення, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень, апроксимація, числовий розв'язок, метод найменших квадратів

H. Sulym, Ia. Pasternak

## DETERMINATION OF LIMIT STATE PARAMETERS OF ELASTIC SOLIDS CONTAINING THIN INCLUSIONS BASING ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM

*This paper presents the effective algorithm for determination of generalized stress intensity factors using the numerical solution and least-square approximations basing on the multinomial asymptotic series. Presented numerical examples affirm the efficiency of the proposed algorithm.*

**Key words:** thin inclusion, generalized stress intensity factors, approximation, numerical solution, least square method

**Вступ.** Дослідження граничного стану тіл із тріщиноподібними дефектами за допомогою прямих числових методів на цей час є вже усталеною інженерною практикою. Найширшого застосування набули методи скінченних (МСЕ) [1] та граничних елементів (МГЕ) [2]. Зокрема, для дослідження тріщин у МСЕ запропоновано використовувати спеціальні сингулярні елементи [3], що моделюють кореневу особливість у відповідному розв'язку, а для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень – методи екстраполяції [3],  $J$ -інтеграла, інтеграла взаємодії [4], найменших квадратів [5] та ін. Зокрема, метод екстраполяції застосовується в комерційному програмному МСЕ-комплексі ANSYS [6], а інтеграла взаємодії – у ABAQUS [7]. Подібні підходи застосовуються також у МГЕ [2].

Проте тріщини є лише складовою значно ширшого класу дефектів типу тонких пружних включень [8]. Останні доволі докладно вивчено за допомогою методу функцій стрибка та узагальнено отримані результати у монографії [8]. За допомогою прямих числових методів тонкі включення у межах плоскої задачі теорії пружності досліджувалися у роботах [9–11]. Зокрема, у праці [9] зіставлено контактні напруження на межі включення із відповідними значеннями, отриманими на основі методу функцій стрибка; в [10] розпочато дослідження узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН) методом екстраполяції для одночленних асимптотичних розвинень і подано конкретні результати для тріщиноподібних дефектів. Робота [11] започаткувала визначення УКІН за числовим розв'язком задачі з використанням обчислення  $J$ -інтеграла.

У даній статті пропонується спосіб визначення УКІН за числовим розв'язком задачі із використанням декількох членів асимптотичного розвинення та апроксимацій методом найменших квадратів.

**1. Формулювання та аналіз задачі.** Розглянемо плоску задачу теорії пружності для ізотропного тіла (матриці) з тонким пружним включенням із іншого матеріалу. Між включенням та матрицею виконуються умови ідеального механічного контакту. Нехай межа включення є гладкою кривою без кутових точок та точок звороту. Радіус заокруглення кінців включення набагато менший від його головного розміру (для прямолінійного включення – довжини). Подальші результати можуть бути легко перенесені на випадок систем тонких включень.

Відповідно до методу функцій стрибка [8], тонке включення замінюється математичним розрізом у матриці в місці серединної поверхні включення. На берегах розрізу задаються умови контактної взаємодії. За такої заміни, що нехтує формою межі тонкого дефекту, задача зводиться до визначення напружено-деформованого стану матриці за певних наперед невідомих стрибків переміщень та напружень на поверхні математичного розрізу. Відповідно до [8], напружений стан в околі вершини дефекту в полярній системі описується таким асимптотичним розвиненням:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{ijk}(\theta) r^{(k-2)/2}, \quad (1)$$

головний член якого дорівнює

$$\begin{pmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ K_{11} \begin{pmatrix} 5 \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \\ -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \end{pmatrix} + K_{21} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 + \sin \theta_5 \\ -7 \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \kappa_* K_{12} \begin{pmatrix} (2\kappa - 3) \cos \theta_1 + \cos \theta_5 \\ -(2\kappa + 5) \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \\ -(2\kappa + 1) \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \end{pmatrix} + \kappa_* K_{22} \begin{pmatrix} (2\kappa + 3) \sin \theta_1 - \sin \theta_5 \\ -(2\kappa - 5) \sin \theta_1 + \sin \theta_5 \\ (2\kappa - 1) \cos \theta_1 - \cos \theta_5 \end{pmatrix} \right]. \quad (2)$$

Тут  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень у прямокутній системі координат;  $r$  – відстань до вістря включення;  $\phi_{ijk}(\theta)$  – певні функції полярного кута  $\theta$ ;  $\kappa$  – стала Мусхелішвілі;  $\kappa_* = 2/(\kappa - 1)$ ,  $\theta_j = j\theta/2$ ;  $K_{ij}$  – УКІН. У випадку тріщини  $K_{12} = 0$ ,  $K_{22} = 0$ ,  $K_{11} \square K_I$ ,  $K_{21} \square K_{II}$ , де  $K_I$ ,  $K_{II}$  – класичні КІН теорії тріщин.

Для реальних тонких включень (не з модельною, а дійсною товщиною) розподіл напружень (1) узгоджується із дійсним лише починаючи з деякої відстані від вістря дефекту, де вплив реальної товщини і форми останнього перестають відігравати особливу роль. Відповідно до [12], ця відстань більша  $r > \rho/2$ , де  $\rho$  – радіус заокруглення вершини тонкого концентратора напружень. Область, обмежена таким умовним кругом, називається зоною концентрації напружень (область внутрішнього асимптотичного розвинення – зона I на рис. 1).

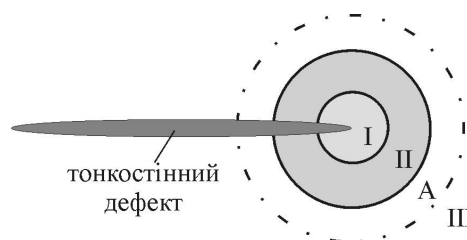


Рисунок 1 - Области асимптотичних розвинень та розв'язку

Безпосередньо із зоною концентрації напружень межує зона інтенсивності напружень (область II, рис. 1), де відповідні поля описуються одночленним асимптотичним розвиненням (2). Область III є зоною віддаленого поля, де асимптотика (2) перестає бути достатньо точною і з віддаленням від вістря включення слід враховувати наступні члени розвинення (1) чи брати повний розв'язок методу функцій стрибка.

Якщо відносна жорсткість включення прямує до нуля, тобто включення перетворюється на тріщиноподібний дефект, то зона інтенсивності напружень, де числовий розв'язок найкраще апроксимується асимптотичним (2), відповідно до числових досліджень [2, 10], перебуває в кільці  $10\rho < r < 15\rho$ . Для цієї зони КІН отримані з похибкою, що не перевищує 5% [10]. Для абсолютно жорстких включень розмір зони інтенсивності напружень дещо менший, ніж для відповідної тріщини.

Розглянемо тепер мало вивчений випадок, коли жорсткість включення близька до жорсткості матриці. За таких умов збурення поля напружень тонким включенням є невеликим, отже, в сенсі апроксимації числового розв'язку полем (2), зона інтенсивності напружень зменшується. Для випадку однакових жорсткостей (однорідна матриця), коли УКІН мають дорівнювати нулю, член (2) розвинення (1) поступово взагалі втрачає сенс свого існування, і основна інформація про локальне поле напружень міститься у другому та подальшому членах розвинення (1).

Таким чином, для числового визначення УКІН методом апроксимацій одночленного розвинення (2) недостатньо і необхідно брати до відома більше членів розвинення (1). Це дало би змогу здійснювати апроксимацію у ширшій за зону інтенсивності напружень області (зоні апроксимації А, рис. 1). Крім того, на цей час для тріщин другий (сталій) член асимптотичного розвинення (1) (так званий T-stress) вже визнаний одним із параметрів граничного стану тіл із дефектами [13]. Тобто його додаткове визначення може часто виявитися навіть необхідним. Для тріщин та абсолютно жорстких включень він просто окреслюється однорідним полем напружень [8].

Для практичної реалізації алгоритму зручно взяти два-три перші члени асимптотичного розвинення (1).

**2. Алгоритм визначення параметрів граничного стану.** Відповідно до [8], розв'язок задачі про тонке включення в околі його вершини можна записати за допомогою комплексних потенціалів Колосова-Мухелішвілі [14] у формі

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_1^k + a_3^k + i(a_2^k + a_4^k) \right] z_k, \quad \Omega(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\kappa a_1^k + a_3^k + i(-\kappa a_2^k + a_4^k) \right] z_k, \quad (3)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ ;  $z_k = z^{(k-2)/2}$ ;  $a_j^k$  – дійсні сталі, причому

$$a_1^1 = -\kappa K_{12}/\sqrt{8\pi}, \quad a_2^1 = \kappa K_{22}/\sqrt{8\pi}, \quad a_3^1 = K_{11}/\sqrt{8\pi}, \quad a_4^1 = K_{21}/\sqrt{8\pi}. \quad (4)$$

Увівши позначення  $\Xi(z) = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}$ , отримаємо

$$\Xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j^k a_j^k, \quad (5)$$

де  $A_1^k = z_k - \kappa \bar{z}_k + C_k$ ;  $A_2^k = i(z_k - \kappa \bar{z}_k - C_k)$ ;  $A_3^k = z_k + \bar{z}_k + C_k$ ;  $A_4^k = i(z_k + \bar{z}_k - C_k)$ ;  $C_k = 0,5(k-2)(z - \bar{z})\bar{z}_{k-2}$ .

Відповідно до [14], напруження та деформації визначаються через комплексні потенціали так:

$$\begin{aligned} s_1 \equiv \sigma_{11} &= \operatorname{Re}\{4\Phi(z) - \Xi(z)\}, \quad s_2 \equiv \sigma_{12} = -\operatorname{Im}\{\Xi(z)\}, \\ s_3 \equiv \sigma_{22} &= \operatorname{Re}\{\Xi(z)\}, \quad s_4 \equiv \omega = (\kappa + 1)/(2\mu) \operatorname{Im}\{\Phi(z)\}, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\omega(z)$  – малий поворот пружного середовища в точці  $z$ ;  $\mu$  – модуль зсуву.

Таким чином, підставляючи (3) та (5) в (6) та беручи до відома позначення

$$\mathbf{y} = \left[ a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, \dots, a_1^k, a_2^k, a_3^k, a_4^k, \dots \right], \quad (7)$$

отримаємо таке подання асимптотичного розподілу (1):

$$s_j = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jk} y_k. \quad (8)$$

Тут  $f_{1,4(k-1)+j} = \operatorname{Re}\{4B_j^k - A_j^k\}$ ,  $f_{2,4(k-1)+j} = -\operatorname{Im}\{A_j^k\}$ ,  $f_{3,4(k-1)+j} = \operatorname{Re}\{A_j^k\}$ ,  
 $f_{4,4(k-1)+j} = (\kappa + 1)/(2\mu) \operatorname{Im}\{B_j^k\}$ ,  $B_1^k = B_3^k = z_k$ ,  $B_2^k = B_4^k = iz_k$ .

Тепер обмежимося в (1)  $N$  першими членами асимптотичного розвинення. Тоді відповідно до (8) отримаємо

$$s_j \approx \sum_{k=1}^{4N} f_{jk} y_k. \quad (9)$$

Нехай маємо набір  $n > 4N$  значень напружень  $\tilde{s}_j^k$  ( $k=1\dots n$ ), отриманих за числовим розв'язком у різних вузлах  $(r_k, \theta_k)$  зони апроксимації А. Апроксимуємо їх за допомогою методу найменших квадратів функціями  $s_j(r, \theta)$ . Для цього складемо такий функціонал квадратів відхилень

$$\Upsilon = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^4 \left( \tilde{s}_j^k - s_j^k \right)^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^4 \left( \tilde{s}_j^k - \sum_{m=1}^{4N} f_{jm}^k y_m \right)^2, \quad (10)$$

де  $f_{jm}^k = f_{jm}(r_k, \theta_k)$ ;  $s_j^k = s_j(r_k, \theta_k)$ . Мінімізуючи його за параметрами  $y_q$ , отримаємо

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial y_q} = -2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^4 \left( \tilde{s}_j^k - \sum_{m=1}^{4N} f_{jm}^k y_m \right) f_{jq}^k = 0 \quad (q=1\dots 4N). \quad (11)$$

Співвідношення (11) є системою лінійних алгебричних рівнянь для визначення параметрів  $y_q$ . Розв'язок (11) у матричній формі має вигляд

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (12)$$

де  $\mathbf{A} = [a_{qm}]$ ,  $\mathbf{b} = [b_q]$ ,  $a_{qm} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^4 f_{jm}^k f_{jq}^k$ ,  $b_q = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^4 \tilde{s}_j^k f_{jq}^k$ ,  $q=1\dots 4N$ ,  $m=1\dots 4N$ .

Часто легко отримати або задати аналітичними співвідношеннями розв'язок задачі  $s_j^0$ , коли у матриці дефект відсутній. Для його урахування співвідношення (11) модифікуємо так:

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial y_q} = -2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^4 \left( \tilde{s}_j^k - s_j^{0k} - \sum_{m=1}^{4N} f_{jm}^k y_m \right) f_{jq}^k = 0 \quad (q=1\dots 4N). \quad (13)$$

Як видно з (13), матриця  $\mathbf{A}$  не зазнає змін, а  $b_q = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^4 (\tilde{s}_j^k - s_j^{0k}) f_{jq}^k$ .

Значимо, що коли  $s_j^0$  – однорідний напружений стан, то жодної модифікації (11) не потрібно, оскільки  $s_j^0$  будуть враховані у величинах  $a_j^{(2)}$ .

**3. Числовий аналіз задач.** Розглянемо низку задач визначення УКІН за числовим розв'язком. Для отримання останнього використано саморегуляризований МГЕ із урахуванням малої товщини включень, запропонований у роботі [15]. Числові дані зіставлялися із відповідними УКІН, отриманими методом  $J$ -інтеграла [11, 16].

Межа включення описувалася сильно витягнутим еліпсом із відношенням півосей  $a/b=0,01$  (відповідно радіус заокруглення вершини дорівнював  $\rho=b^2/a=10^{-4}a$ ). Зона апроксимації була обмежена кільцем із внутрішнім радіусом  $8\rho$  та зовнішнім –  $100\rho$ . Розподіл вузлів апроксимації  $(r_k, \theta_k)$  зображено на рис. 2. Загальна їхня кількість – 200.

Відносна жорсткість включення характеризувалася параметром  $k = E_i/E_m$ , де  $E_i$ ,  $E_m$  – модулі пружності матеріалів матриці та включення відповідно. Коефіцієнти Пуассона були вибрані однаковими:  $\nu_i = \nu_m = 0,3$ . Задача розглядалася за умов плоскої деформації.

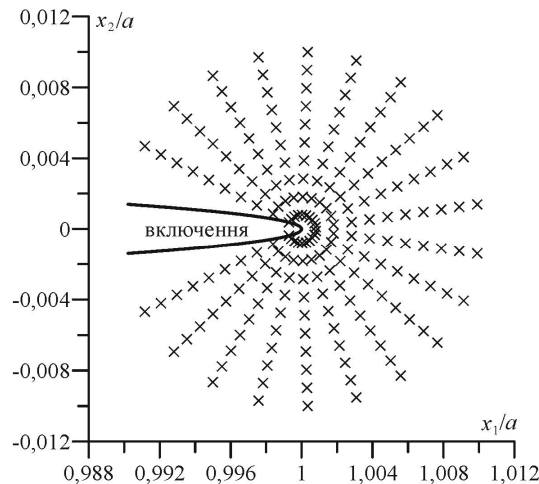


Рисунок 2 - Розподіл вузлів апроксимації на вістрі включення

*Приклад 1.* Нехай тонке включення вставлене без попереднього натягу в необмежену матрицю, що на безмежності навантажена однорідними напруженнями розтягу  $\sigma_{22}^{\infty} = p$ , які діють перпендикулярно до осі включення.

Значення нормованих УКІН  $K_{ij}^* = K_{ij} / [p\sqrt{\pi a}]$ , отриманих запропонованим методом апроксимації, зображено на рис. 3. Суцільні криві відповідають  $N=2$  та  $N=3$ , штрихова –  $N=1$  та підходу (11), а штрихпунктирна –  $N=1$  та (13). Як і очікувалося, використання одного члена розвинення (1) не дає можливості отримати бажаної точності результату для включення з матеріалу матриці (нульові УКІН) за використання рівнянь (11) та для тріщини чи дуже жорсткого включення для рівнянь (13). Лінії при  $N=2$  та  $N=3$  для УКІН  $K_{11}$  фактично зливаються. Стосовно УКІН  $K_{12}$ , то при  $N=3$ , отримується дещо більша похибка апроксимації, що позначається на більшому, ніж для  $N=2$ , його значенні для сильно податних включень. Тому пропонується визначати УКІН за утримання двох членів розвинення (1).

Залежність значень нормованих УКІН, отриманих за  $J$ -інтегралом методами домінуючих УКІН та інтеграла взаємодії, а також методом апроксимації із  $N=2$ , від відносної жорсткості включення зображено на рис. 4. Суцільні криві відповідають методу апроксимації, штрихові – домінуючих УКІН, штрихпунктирні – інтеграла взаємодії.

Для жорсткостей включення  $k < 10^{-5}$  та  $k > 10^5$  усі три методи дають результати, що з похибкою, меншою за 1 %, збігаються із відповідними значеннями для тріщини та абсолютно жорсткого плівкового включення [8]. Помітні відхилення кривих, отриманих різними методами, спостерігається лише для відносних жорсткостей  $10^{-2} < k < 10^2$ . Для методу домінуючих УКІН такі відхилення зрозумілі, оскільки він ґрунтується на нехтуванні деякими УКІН. Крім того, і метод домінуючих

УКІН, і інтеграла взаємодії обчислюють  $J$ -інтеграл не за замкнутим, а за розімкнутим контуром, внаслідок того, що обчислювальна схема передбачає врахування реальної товщини включення. Використання у методі інтеграла взаємодії розв'язку (2) як тестового, зумовлює появу додаткової похибки для жорсткостей включення співмірних із жорсткістю матриці [11]. Запропонований метод апроксимації дає дуже близькі до нуля значення УКІН для  $k=1$ , а тому для сумірних жорсткостей включення і матриці його можна вважати надійнішим за методи на основі  $J$ -інтеграла. Проте якщо цікавитися лише максимальними значеннями відповідних УКІН задачі, то стосовно них розбіжності між трьома методами невеликі.

*Приклад 2.* Як приклад задачі із істотно неоднорідним розподілом поля напружень розглянемо розтяг необмеженої матриці зі включенням двома зосередженими силами  $P$ . Схема такої задачі зображена на врізці до рис. 5. Нормовані значення УКІН  $K_{ij}^* = K_{ij} \sqrt{a} / (P \sqrt{\pi})$  залежно від параметрів  $k$  та  $\lambda = d/a$  зображено на рис. 5. Відповідні криві позначені так само, як і на рис. 4. Варто зазначити, що величини УКІН, отримані методом апроксимації на основі рівнянь (11) та (13), практично однакові і на графіках відповідні криві розрізнити неможливо.

Як і у випадку однорідного розтягу, для  $k < 10^{-5}$  та  $k > 10^5$  результати трьох методів з похибкою, меншою за 1%, збігаються із відповідними значеннями для тріщини та абсолютно жорсткого плівкового включення [8]. Для відносних жорсткостей в діапазоні  $10^{-2} < k < 10^2$  УКІН, отримані різними методами, починають помітно різнитися. Пояснення таких відхилень таке ж, як і для однорідного розтягу.

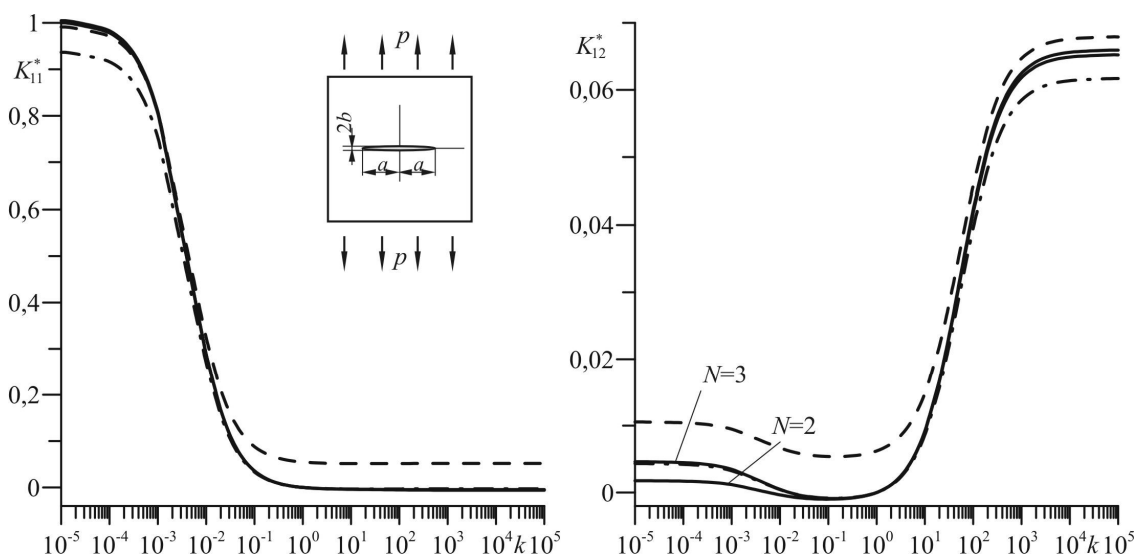


Рисунок 3 - УКІН, отримані за різної кількості врахованих членів розвинення (9)

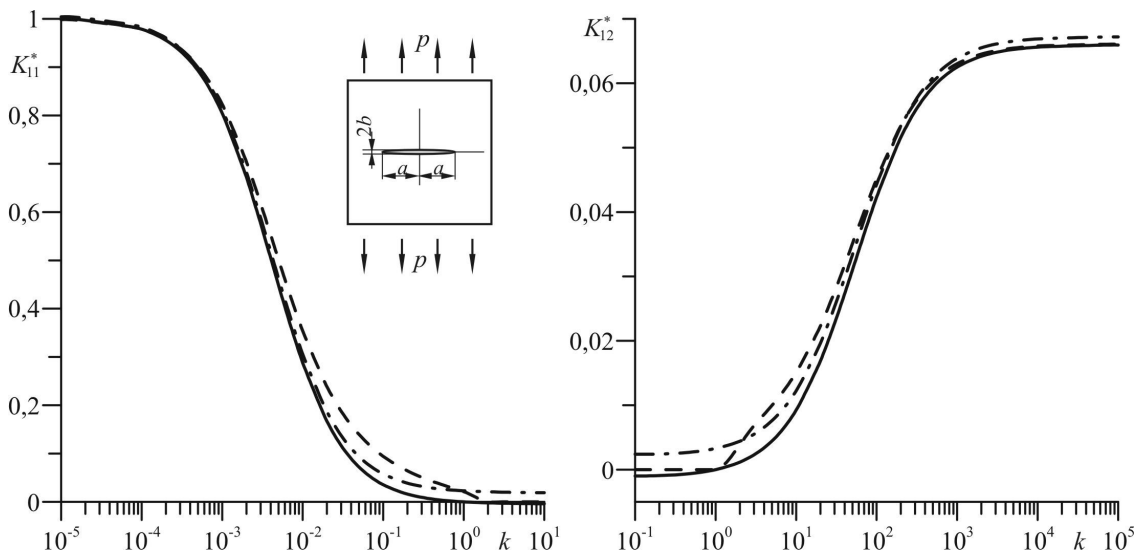


Рисунок 4 - УКІН для пружного включення за однорідного навантаження матриці

Для практичної оцінки граничного стану композиції за сумірних жорсткостей матриці та включення необхідно обирати більше із обчислених значень УКІН для того, щоб гарантувати проектну міцність. З іншого боку, для такого співвідношення жорсткостей з метою оцінки міцності виробу, напевне, зручніше користуватися параметром концентрації напружень, яка, так само, як УКІН, є вже відносно невеликою.

**Висновки.** Запропоновано використовувати багаточленне асимптотичне розвинення для визначення УКІН поблизу тонких пружних включень та обґрунтовано такий вибір. Виходячи із методу найменших квадратів побудовано систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення УКІН за набором значень компонент тензора напружень в точках поблизу вістря дефекту. За допомогою розглянутих числових прикладів доведено ефективність запропонованого підходу.

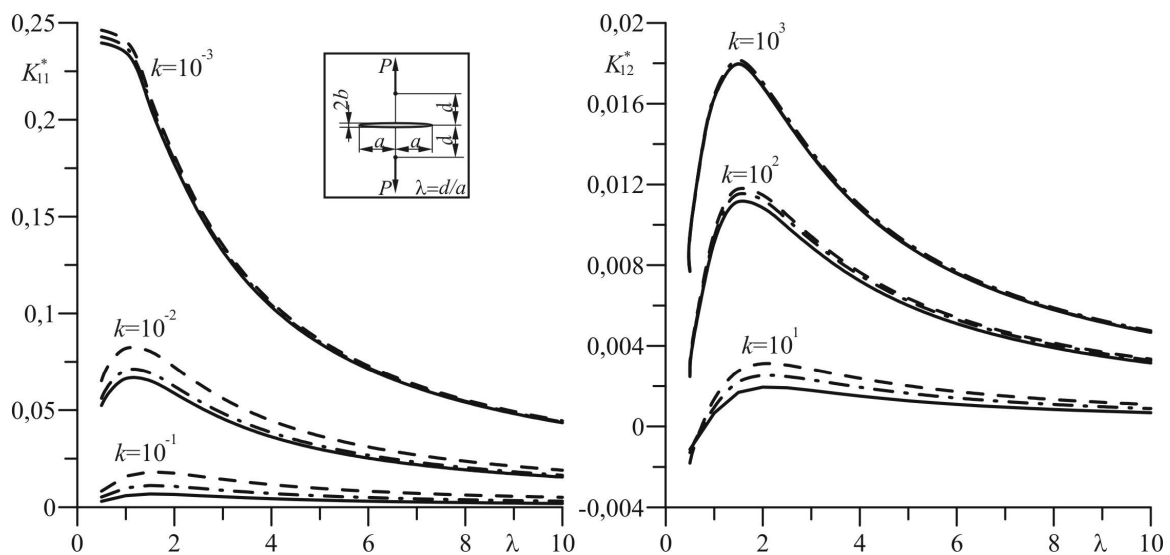


Рисунок 5 - УКІН за розтягу матриці двома зосередженими силами

## Література

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Vol. 2. Solid mechanics. – Oxford: BH, 2000. – 459 p.
2. Becker A.A. The boundary element method in engineering: A complete course. – McGraw-Hill, 1992. – 337 p.
3. Barsoum R.S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1976. – 10. – P. 25–37.
4. Bui H.D. Fracture mechanics: inverse problems and solutions. – Springer, 2006. – 375 p.
5. Ju S.H. Simulating three-dimensional stress intensity factors by the least-square method // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1998. – 43. – P. 1437–1451.
6. Nakasone Y., Yoshimoto S., Stolarski T.A. Engineering Analysis With ANSYS Software. – Elsevier, 2006. – 456 p.
7. Abaqus theory manual. Version 6.8. – Dassault Systemes, 2008. – 1176 p.
8. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. Сулим Г.Т., Рокач И.В. Метод конечных элементов в задаче о тонкостенном включении. – Львов, 1983. 3 с. Материалы 10 Конф. мол. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов (Львов, 12–16 окт., 1981). Деп. в ВИНТИ 12 апр. 1983 г. № 1948-83 Деп.
10. Kuharchuk Yu., Sulym G. Stress intensity factors in plane bodies weakened by crack-type defects // J. Theor. and Appl. Mech., 1998. – 36. – No. 4. – P. 895–903.
11. Сулим Г., Пастернак Я. Використання енергетичних підходів для дослідження тонких пружних включень // Машинознавство. – 2006. – № 9–10. – С. 13–16.
12. Berezhnitskii L.T., Kachur P.S., Mazurak L.P. The theory of stress concentrations with round vertices // Materials Science, 1990 – 25. – No. 5. – P. 465–476.
13. Fett T. Stress intensity factors, T-stresses, weight functions. – Universitätsverlag Karlsruhe, 2008. – 362 p.
14. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
15. Сулим Г., Пастернак Я. Регуляризована тотожність Сомільяни для задач теорії пружності з тонкими структурами // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інф., 2007. – 13. – С. 142–150.
16. Bozhydarnyk V., Pasternak I., Sulym H. Determination of a limit state of elastic solids with thin-walled elastic inclusions using the J-integral // Proc. of 17<sup>th</sup> Eur. Conf. Fract., 2008, Brno, Czech Rep. – P. 1879–1886.

Одержано 14.01.2009 р.