

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

А. Сінчук

Рівненський державний гуманітарний університет

КОМПЛЕКСНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ З УРАХУВАННЯМ ВКЛЮЧЕНЬ

Резюме. Комплексний підхід дослідження нелінійних процесів витіснення флюїдів узагальнено на випадок урахування збурень фільтраційної течії включеннями скінченної проникності (призупиненими свердловинами та тріщинами гідравлічного розриву пласта). На основі відповідних алгоритмів, що базуються на ідеях числових методів квазиконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу, проведено розрахунки перерозподілу квазіпотенціалу швидкості у пласті з паралельним встановленням інших характеристик: витрат, величин перетоків, положення границі розділу різнокольорових рідин у характерні моменти часу, часу повного заводнення експлуатаційної свердловини.

Ключові слова: квазиконформні відображення, нелінійні процеси витіснення, тріщини гідравлічного розриву, числові методи.

A. Sinchuk

COMPLEX MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR DISPLACEMENT PROCESSES CONSIDERING INCLUSIONS

Summary. Complex approach to the research of nonlinear fluid displacement processes is generalized for the case when filtration flow indignation by the eventual permeability includings (halted mining holes and hydraulic layer break cracks) are taken into account. On the basis of the known algorithms, which are based on quasi-conformal mappings ideas and step-by-step fixation of process and environment characteristics, the corresponding computations of redistribution of quasi-potential of the velocity in the layer with parallel calculation of other characteristics (consumption, cross-flow, etc.) were carried out. Peculiarities of the process running to be controlled by its parameters optimization were found. The position of the division line of manycoloured liquids in different moments of time, the part of displacing liquid in the general filtration consumption (the time of full water flooding of a production well in particular under) given conditions and without nonoperating wells, different filtration characteristics, such as: velocity field, points of flux suspensions, etc., were calculated. The results of this investigation testified that the presence of nonoperating wells in the layer makes displacement process faster. Special schemes of the wells location in the horizontal layers taking into account hydraulic fracturing, restricted by an impenetrable external contour and by contours of input and production wells, allocated row upon row (without cross-flow between the rows) were introduced. Flow formation and the change of the corresponing domain of complex quasi-potential depending of quantity of the rows and the wells were analysed. Unified procedure of the inverse boundary-value problems discretization on the quasiconformal mappings particularly, for the case, when the domain of quasi-complex potential is multi-sheeted, and its sheets are constructed from glued together interiors of rectangles, in particular, which takes into account the peculiarities of the construction of local computational schemes along lines of bifurcation and in the points of "suspension", were proposed.

Key words: quasi-conformal mappings, nonlinear processes of expulsing, cracks of hydraulic break, numerical methods.

Вступ. На сучасному етапі, коли більшість продуктивних родовищ нафти й газу вичерпали свої можливості, вводяться нові моделі їх розроблення, до яких, зазвичай, застосовують такий метод інтенсифікації притоку рідини, як гідравлічний розрив пласта (ГРП), у результаті чого значно підвищуються дебіти експлуатаційних

свердловин за рахунок зниження гідравлічного опору в привибійних зонах [1]. Ефективність роботи тріщин вимагає підбору адекватних параметрів їх геометрії, аналізу взаємодії між собою, визначення впливу розмірів тріщини на фільтраційний процес та значення дебіту свердловин. Досить часто буває, що у досліджуваному пласті існують ще й так звані недіючі свердловини (призупинені, «закинені»; потоки через контури яких дорівнюють нулю).

Необхідним етапом будь-якої сучасної технології проектування нафтових і газових родовищ є комп'ютерний експеримент з використанням математичних моделей процесів і об'єктів моделювання, який передбачає проведення багатоваріантних розрахунків для вибору оптимальних сценаріїв розроблення продуктивних площ [2]. До кожної математичної моделі встановлюються особливі вимоги, підпорядкування яким, зокрема, дозволяє обґрунтувати адекватність її використання для опису того чи іншого процесу. Одними з вимог, що відповідають комп'ютерній моделі процесу розроблення з використанням ГРП, є: адекватне відображення фізичних процесів, що відбуваються в пласті та тріщині; швидкодія, порівняно з аналогічними показниками традиційних моделей; можливість коректного співставлення варіантів розроблення з використанням ГРП й інших технологій тощо.

Для підтвердження підпорядкованості комп'ютерної моделі кожній із цих вимог існують різні підходи. Наприклад, для обґрунтування адекватності опису фізичних процесів згідно з вибраною моделлю, зазвичай використовують точні аналітичні розв'язки задач у спрощених випадках (підбирають простіші області фільтрації або ж спрощують процес, який потрібно описати, тощо).

Метою роботи є узагальнення розробленого комплексного підходу дослідження нелінійних процесів витіснення флюїдів [3–5,7] на випадок урахування збурень фільтраційної течії включеннями скінченної проникності (призупиненими свердловинами та тріщинами гідравлічного розриву пласта) і, на цій основі, проведення відповідних комп'ютерних експериментів.

Постановка задачі. Розглянемо модельну задачу на відшукування фільтраційних характеристик (перерозподілу квазіпотенціалу швидкості, точок «призупинки» течії) та дослідження еволюції границі розділу G_l двох різнокольорових рідин [4, 5] у пласті (області G_z , $z = x + iy$), обмеженому контуром живлення L_* та контуром експлуатаційної свердловини L^* за наявності включень скінченної проникності, утворених тріщинами ГРП та призупиненими свердловинами (рис. 1). Закон руху (Дарсі) фільтрації рідин у пористому середовищі та рівняння нерозривності відносно квазіпотенціалу $\varphi = \varphi(x, y)$ швидкості $\vec{v} = v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y)$ запишемо у вигляді (див., напр., [5]) $div \vec{v} = 0$, $\vec{v} = k \cdot grad \varphi$, $(x, y) \in G_z$, $k = k(x, y)$ – коефіцієнт проникності у відповідних під-областях,

$$k(x, y) = \begin{cases} k_l, & (x, y) \in G_z^l; \\ \tilde{k}_p, & (x, y) \in \tilde{G}_z^p; \\ k_*, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_l G_z^l \setminus \bigcup_p \tilde{G}_z^p, \quad l, p = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1)$$

де G_z^l і \tilde{G}_z^p – відповідно включення типу тріщин ГРП (на практиці їх часто моделюють

ділянками еліпсів $G_z^l = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x - \tilde{x}_l}{a_l} \right)^2 + \left(\frac{y - \tilde{y}_l}{b_l} \right)^2 \leq 1 \right\}$) і призупинених свердловин

$(\tilde{G}_z^p = \{(x, y) : (x - \tilde{x}_p)^2 + (y - \tilde{y}_p)^2 \leq r_p^2\})$, $\tilde{k}_p(x, y)$, $k_l(x, y)$, $k_*(x, y)$ – деякі задані достатньо гладкі й певним чином узгоджені між собою функції. Фільтраційна течія відбувається за рахунок різниці потенціалів $\varphi^* - \varphi_*$, заданих відповідно на L^* та L_* .

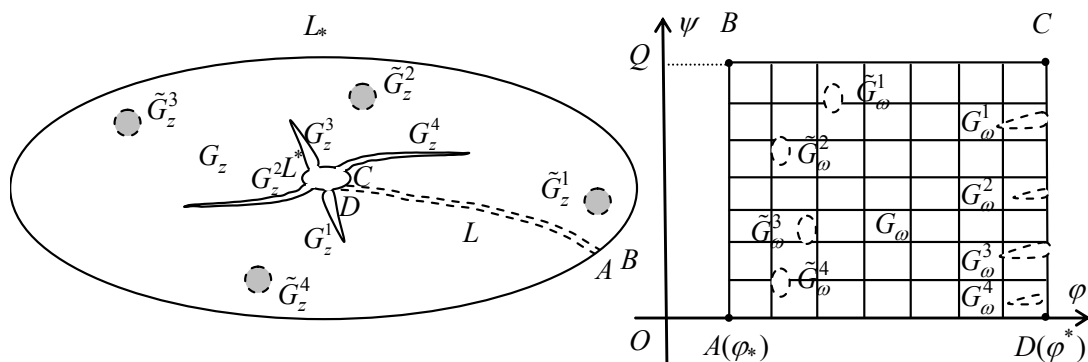


Рисунок 1. Фізична область із включеннями типу призупинених свердловин і тріщин ГРП та відповідна їй область комплексного квазіпотенціалу

Figure 1. Physical area, with inclusions of the suspended wells type and cracks of hydraulic break and corresponding it region of the complex quasipotentials

Аналогічно до [4 – 5], поставлена задача зводиться до задачі на квазіконформне (кусково-конформне) відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus L$, де $l = 1, 2, 3, \dots$, L – умовний розріз уздовж відповідної її лінії течії (через AD та BC на рис. 1 позначено відповідно верхній та нижній його береги), на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \quad (2)$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q,$$

$$[\varphi]_{\partial G_z^l, \partial \tilde{G}_z^p} = 0, \quad [\nu_n]_{\partial G_z^l, \partial \tilde{G}_z^p} = 0,$$

де $\nu(x, y) = \sqrt{\nu_x^2(x, y) + \nu_y^2(x, y)}$, $[\bullet]_{\partial G_z^l}$, $[\bullet]_{\partial \tilde{G}_z^p}$ – стрибок заданої функції на ∂G_z^l , $\partial \tilde{G}_z^p$ відповідно, $Q = \iint_{L_*} -\nu_y dx + \nu_x dy$ – невідома витрата.

Через геометричну складність області G_z^0 (що, зокрема, породжує проблему автоматизації побудови гідродинамічної сітки) й тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω , ми розглядатимемо замість прямої задачі на квазіконформне відображення $G_z^0 \rightarrow G_\omega$ обернену до неї ($G_\omega \rightarrow G_z^0$). Обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та відповідні рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ й уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин (виконання

яких вимагатимемо і на розрізі для врахування його «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω) характеристичної функції течії при невідомій Q запишемо у вигляді

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (4)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad (5)$$

$$\left[\frac{k}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2} \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right]_{\partial G_\omega^l, \partial \bar{G}_\omega^p} = 0, \quad \text{ä ä } l, p = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (7)$$

де f_* , f^* – задані функції, що апроксимують отримані в результаті сейсмічних знімків масиви точок контурів L_* , L^* пласта G_z відповідно (при цьому використовуємо представлення даних контурів як у параметричній так і неявній формах: $L_* = \{z: x = x_*(t), y = y_*(t), \alpha_* \leq t \leq \beta_*\} = \{z: f_*(x, y) = 0\}$, $L^* = \{z: x = x^*(t), y = y^*(t), \alpha^* \leq t \leq \beta^*\} = \{z: f^*(x, y) = 0\}$).

Функція $\zeta = \zeta(x, y, t)$, що описує границю Γ_t (рівняння лінії розділу в неявній формі $\zeta(x, y, t) = 0$), визначається таким рівнянням з відповідними умовами [4]:

$$\sigma \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \zeta = 0, \quad \zeta_{L_*} = 1, \quad \zeta(x, y, t)|_{t=t_0} = 0. \quad (8)$$

Маючи характеристичну функцію течії $z = z(\omega)$ та виділивши її дійсну і уявну частини $x = \text{Re } z(\omega)$, $y = \text{Im } z(\omega)$, знаходимо поле швидкості, компоненти якої

визначаємо такими співвідношеннями: $v_x = \frac{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi}$, $v_y = -\frac{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi}$, де $J(\varphi, \psi) = x'_\varphi y'_\psi - x'_\psi y'_\varphi$. Задачу (8) перепишемо так:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \quad (9)$$

$\zeta(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = 1$, $\zeta(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t_0) = 0$, $0 \leq \psi \leq Q$, $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$, (10) де отримане диференціальне рівняння в частинних похідних є фактично просторовоодновимірним, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Інтегруючи відповідне (9) характеристичне диференціальне рівняння $\frac{dt}{\sigma k} = \frac{d\varphi}{v^2}$, знайдемо час t проходження частинкою шляху від точки $(\varphi_*, \bar{\psi}_0)$ до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi}_0)$ уздовж відповідної лінії течії $\psi(x, y) = \bar{\psi}_0$:

$$t = \Phi(\varphi, \bar{\psi}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma k v^{-2}(x(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0), y(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0)) d\tilde{\varphi}, \quad (11)$$

де $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$, σ – пористість ґрунту (вважатимемо, що $\sigma = ak$, де a – деяке додатне дійсне число). Використовуючи (11), знаходимо положення лінії розділу $\Phi(\varphi, \psi) = \bar{t}$ різнокольорових рідин у довільний фіксований момент часу $t = \bar{t}$, зокрема, час початку та повного заводнення експлуатаційної свердловини, відповідно, $\Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) = \min_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi)$ та $\Phi(\varphi^*, \bar{\psi}) = \max_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi)$.

Алгоритм числового розв’язання задачі. Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в область G_ω рівномірну ортогональну сітку $G_\omega^l = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi, \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}$ при $i = \overline{0, n}$; $\psi_j = j\Delta\psi, \Delta\psi = \frac{Q}{m}, j = \overline{0, m}\}$, де $n, m \in \mathbb{N}$ – параметри розбиття цієї області.

Рівняння (7) у сітковій області G_ω та на розрізі L , крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів (умовами ортогональності) апроксимуємо так [8]:

$$\begin{cases} \gamma^2 (k_{i,j+1/2}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2}(x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \\ \gamma^2 (k_{i,j+1/2}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2}(y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, y_{i,0} = y_{i,m}, i = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, \end{cases} \quad (14)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), k_{i,j\pm 1/2} = k\left(\frac{x_{i,j\pm 1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j\pm 1} + y_{i,j}}{2}\right),$

$k_{i\pm 1/2,j} = k\left(\frac{x_{i\pm 1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i\pm 1,j} + y_{i,j}}{2}\right); \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}$ – квазіконформний інваріант.

Невідому витрату Q шукаємо за формулою $Q = \frac{m\Delta\varphi}{\gamma}$, величину γ отримуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{1}{k_{i+1/2,j+1/2}} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad (15)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad \beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Згідно з (11) маємо формулу для наближеного розрахунку часу проходження частинкою шляху вздовж j -тої лінії течії від i_* -ї до i^* -ї еквіпотенціалей:

$$t_{j(i_*, i^*)} = \sum_{i=i_*}^{i^*} \frac{\sigma k_{i,j} \Delta \varphi}{v^2(x(\varphi_i, \psi_j), y(\varphi_i, \psi_j))}, \quad j = \overline{0, m}, \quad (i_*, i^*) = \overline{0, n}.$$

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (3)–(7) різницевою задачею в загальному випадку побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних і внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації для аналітичного обґрунтування його збіжності, а задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 та рівень квазіконформності δ_* відображення. Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів так, щоб виконувалися умови (13), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (15), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанта $\gamma^{(0)}$ та невідому величину витрати

$$Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{n\gamma^{(0)}}.$$

Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за

формулами, отриманими шляхом розв'язання (12) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу й економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (14). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (15), знаходимо нове наближення величини Q .

Якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ – зміщення вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію. Якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізом уздовж лінії течії, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (3):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|.$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю. Формули для розрахунку швидкості у внутрішніх вузлах сітки запишемо так:

$$(v_x, v_y)_{i,j} = \frac{k(x_{i,j}, y_{i,j})}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$J_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi} ((x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})).$$

Значення швидкості у вузлах розрізу L та границі області, а також вузлові точки лінії розділу різнокольорових рідин знаходимо аналогічно [4 – 5].

Результати й аналіз числових розрахунків фільтраційних характеристик процесу витіснення:

1. а). З метою підтвердження адекватності запропонованої математичної моделі, розглянемо процес стаціонарної фільтрації однорідної рідини для випадку, коли $x_*(t) = R_c \cos(t)$, $y_*(t) = R_c \sin(t)$, $x^*(t) = r_w \cos(t)$, $y^*(t) = r_w \sin(t)$, $0 \leq t < 2\pi$, $R_c = 2$,

$$r_w = 0.1, \quad \varphi_* = 0, \quad \varphi^* = 1, \quad n \times m = 38 \times 80; \quad k(x, y) = \begin{cases} k_l, & (x, y) \in G_z^1, \\ k_*, & (x, y) \in G_z \setminus G_z^1, \end{cases}$$

де $G_z^1 \cup G_z^2 = \left\{ (x, y) : \left[\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} \leq 1 \right] \setminus \left[x^2 + y^2 \leq 0,01 \right] \right\}$ – ділянка пласта (товщиною

$h = 1$), що моделює тріщину ГРП, $a_1 = 1$, $b_1 = 0.05$, $k_1 = 10$, $k_* = 1$ (рис. 2а). На рис. 2б зображено відповідну гідродинамічну сітку, розраховану за описаним вище алгоритмом з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

Для такого конфокального взаємного розміщення тріщини ГРП і свердловини [5, 6] існують аналітичні формули розрахунку характерних фільтраційних параметрів, зокрема комплексного потенціалу $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ відповідного фільтраційного поля та значення витрати Q :

$$\omega_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln z + k_1 \sum_{n=0}^{+\infty} D_n z^{2n}, \quad (16)$$

$$\omega_2(z) = \varphi_2(x, y) + i\psi_2(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln z + k_* \sum_{n=0}^{+\infty} B_n z^{-2n}, \quad (17)$$

$$Q = Q_0 \frac{\ln R_c - \ln r_w}{\ln(R_c/r_w) + S}, \quad (18)$$

де $Q_0 = \frac{2\pi k_1 h (\varphi_* - \varphi^*)}{\mu \ln(R_c/r_w)}$ – дебіт свердловини без тріщини ГРП;

$S = -\frac{2\lambda}{1+\lambda} \left(\ln \frac{l+b_1}{2r_w} - (1-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{4n}}{n(1-\lambda q^{4n})} \right)$ – скін-фактор (характерний параметр, що

відображає вплив тріщини ГРП на продуктивність свердловини), $\lambda = \frac{k_1 - k_*}{k_1 + k_*}$,

$q = \sqrt{\frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}}$; D_n, B_n – сталі й знаходяться з відповідних умов на контурах тріщини та

фільтраційної області (при цьому знаходження поля швидкості фільтрації в пласті та тріщині є можливим шляхом диференціювання комплексного потенціалу (16) – (17)) [6]. На рис 2в побудовано відповідну гідродинамічну сітку. Порівняння числових значень характеристик фільтраційної течії у відповідних вузлах сітки підтверджує адекватність запропонованої нами математичної моделі та ефективність методу. Крім цього, формули (16) – (18) доцільно використовувати для контролю точності та вибору початкового наближення параметрів.

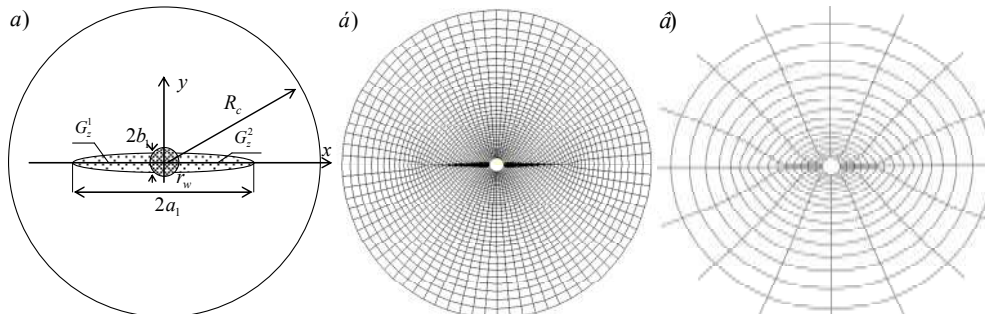


Рисунок 2. Круговий пласт із тріщинами гідророзриву (а) й відповідні йому гідродинамічні сітки, розраховані за допомогою розробленого алгоритму (б) та аналітичних формул (в)

Figure 2. Circular layer with hydraulic break cracks (a) and the hydrodynamic grids corresponding to it calculated by means of the developed algorithm (b) and analytical formulae (c)

б). У процесі розрахунку (із вказаною вище точністю) встановлено значення фільтраційної витрати у випадку існування та відсутності тріщин ГРП, відповідно $Q = 2.899$ і $Q_0 = 2.097$. Що, у свою чергу, підтверджує доцільність застосування тріщин ГРП для інтенсифікації притоку рідини до нафтогазових свердловин у слабопроникних пластах.

2. На рис. 3 представлено при $k_l = 10$, $\tilde{k}_p = 1000$, $k_* = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $R_c = 2$, $r_w = 0.1$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0.05$, $n \times m = 38 \times 80$ ситуаційні стани формування течії (гідродинамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин \tilde{A}_t у моменти часу $t = 0.5, 1.4, 1.8, 2.1, 2.8, 3.1$) у випадках наявності у пласті: \hat{a}) включень типу призупинених свердловин і тріщин ГРП; \hat{a}) лише тріщин ГРП; \hat{a}) лише включень типу призупинених свердловин (для спрощення обчислень вибрана спеціальна центральна симетрія).

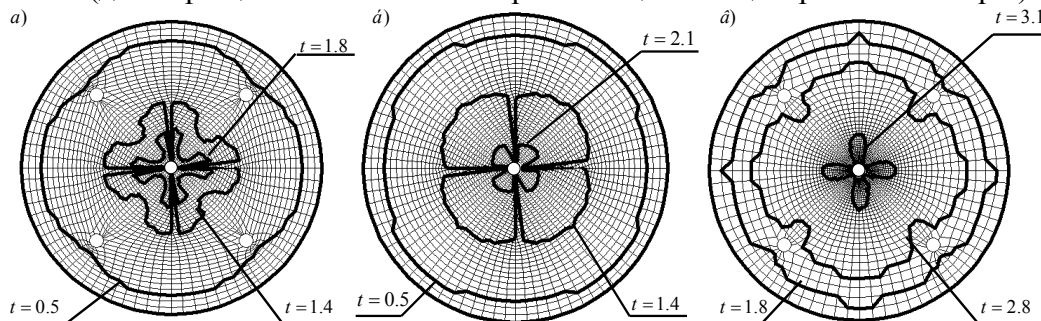


Рисунок 3. Гідродинамічні сітки пласта з усіма включеннями (а), тільки з тріщинами ГРП (б), тільки з включеннями типу призупинених свердловин (в)

Figure 3. Hydrodynamic grids of the layer with all inclusions (a), only with cracks of hydraulic break (b), only with inclusions of the suspended wells type (c)

Таблиця 1.

Значення Q , t_{\min} та t_{\max}

	Q	t_{\min}	t_{\max}
а)	3,305	1,425	1,884
а)	3,306	1,483	2,213
а)	2,086	2,55	3,247

У таблиці 1 представлені значення фільтраційної витрати Q , часу прориву t_{\min} витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини та часу повного її заводнення – t_{\max} у кожному із описаних вище випадків.

Бачимо, що наявність недіючих свердловин у досліджуваному пласті значно пришвидшує процес витіснення, проте при цьому фільтраційна витрата суттєво не змінюється, а тріщини ГРП суттєво збільшують і час витіснення, і витрату.

3. На рис. 4 зображено ситуаційні стани формування течії у випадках, близьких до критичних ($\tilde{k}_p=0$ та $\tilde{k}_p=\infty$), а саме, коли $\tilde{k}_p=0,1$ (а) та $\tilde{k}_p=100$ (б), згідно з даними із попередньої задачі.

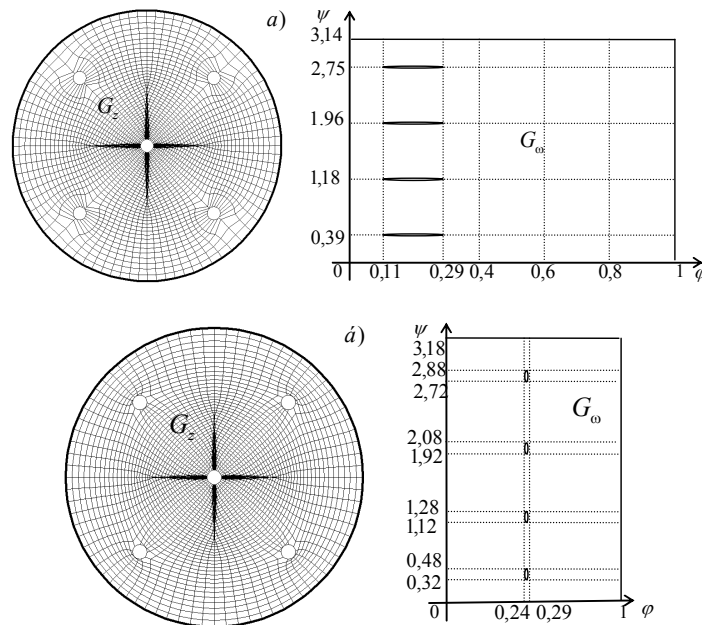


Рисунок 4. Фізична область G_z , із включеннями типу призупинених свердловин і тріщин ГРП, та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω при $\tilde{k}_p=0,1$ (а) та $\tilde{k}_p=100$ (б)

Figure 4. Physical area G_z , with inclusions of the suspended wells type and cracks of hydraulic break and the corresponding region of the complex quasipotentials G_ω at $\tilde{k}_p=0,1$ (a) and $\tilde{k}_p=100$ (б)

Як відомо, підобласті \tilde{G}_ω^p (образи \tilde{G}_z^p) при $\tilde{k}_p \rightarrow 0$ вироджуються в горизонтальні відрізки, або вертикальні, якщо $\tilde{k}_p \rightarrow \infty$. Отже, маємо: по-перше, ще один варіант перевірки адекватності моделі та ефективності методу і, по-друге, наближений розв’язок відповідних задач: обтікання непроникних включень; перетікання через включення з нескінченно великою проникністю (обмеженими екіпотенціальними лініями).

Висновок. Розроблений в роботах [4–5] комплексний підхід дослідження нелінійних процесів витіснення флюїдів узагальнено на випадок урахування збурень фільтраційної течії включеннями скінченної проникності (призупиненими свердловинами та тріщинами ГРП). На основі відповідних алгоритмів, що базуються на ідеях числових методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу, проведено розрахунки перерозподілу квазіпотенціалу швидкості у пласті з паралельним встановленням інших характеристик: витрат, величин перетоків, положення лінії розділу різнокольорових рідин у характерні моменти часу, часу повного обводнення експлуатаційної свердловини тощо. У результаті проведених досліджень підтверджено сприятливий вплив тріщин гідророзриву і на час витіснення, і на повну фільтраційну витрату. При цьому зазначимо, що запропонований комплексний підхід автоматично вирішує проблему вибору вузлів, розрахунку ліній роздвоєння течії, застійних ділянок. **У перспективі** досліджень – перенесення розробленої методології на випадок розв'язання задач багатозафазної фільтрації за умов оптимізації параметрів (величин перетоків, координат і радіусів свердловин, характеристик гідророзривів тощо) та керування процесом.

Conclusions. Complex approach to the research of nonlinear processes of fluids displacement is generalized in works [4–5] in the case of taking into account the indignations of lauter flow by the inclusions of eventual permeability (halted mining holes and cracks of hydraulic layer break). On the basis of the proper algorithms which are based on the ideas of numerical method of quasi-conformal mappings and stage-by-stage fixing of characteristics of the environment and the process, the numerical calculations of redistribution of quasi-potential of the speed in the layer are conducted. The other characteristics are found: wastes, sizes of displacement, position of manycoloured liquids decision line in certain moments of time, time of complete irrigation of operating mining hole, etc. As a result of the conducted researches favourable influence of cracks of hydraulic break is confirmed and on both time of expulsing and on a complete lauter expense. Complex approach which is proposed solves the problem of knots choice, calculation of lines of flow split stagnant areas automatically. The application of the developed methodology in the case of the solution of the multiphase filtration problems in the conditions of optimization of parameters (sizes of displacement, coordinates and radiuses of wells, characteristics of a hydrogap) and the process control is to be carried out in future.

Список використаної літератури

1. Каневская, Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта [Текст] / Р.Д. Каневская. – М.: ООО "Недра-Бизнесцентр", 1999. – 212 с.
2. Методические указания по созданию постоянно действующих геолого-технологических моделей нефтяных и газонефтяных месторождений (Часть 2. Фильтрационные модели). – М.: ОАО «ВНИИОЭНГ», – 2003. – 228 с.
3. Бомба, А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки [Текст] / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопечський – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
4. Бомба, А.Я. Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації [Текст] / А.Я. Бомба, С.В. Ярошак // Обчислювальна та прикладна математика. – 2010. – №2. – С. 3 – 13.
5. Бомба, А.Я. Метод квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин гідророзриву пласта [Текст] / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярошак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2011. – № 3(40). – С. 32–36.

6. Астафьев, В.И. Моделирование фильтрации жидкости при наличии трещины гидравлического разрыва пласта [Текст] / В.И. Астафьев, Г.Д. Федорченко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 128 – 132.
7. Zhangxin, C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. – 531 pp.
8. Versteeg, H.K. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / H. K. Versteeg, W. Malalasekera. Longman Scientific & Technical. New York, 1995. – 267 pp.

Отримано 12.11.2012