

УДК 539.3

Т. Шопя, канд. фіз.-мат. наук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПАНЕЛІ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ З МНОЖИНОЮ ВКЛЮЧЕНЬ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ З ПРУЖНИМИ ПРОШАРКАМИ

Резюме. В рамках уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з довільною кількістю абсолютно жорстких включень довільної геометричної форми, орієнтації та розташування, які взаємодіють з панеллю через тонкі пружні прошарки типу Вінклера. Границя панелі є довільної геометричної конфігурації. Розглянуто довільні гармонічні в часі граничні умови на зовнішній границі панелі. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів та секвенціального підходу до зображення функції Гріна. Крайову задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: ортотропна панель подвійної кривини, коливання, включення, пружний прошарок типу Вінклера, власні частоти, послідовнісний підхід, функція Гріна, непрямий метод граничних елементів, метод колокації.

T. Shopa

VIBRATION OF ORTHOTROPIC DOUBLY CURVED PANEL WITH A SET OF INCLUSIONS OF ARBITRARY CONFIGURATION WITH THE ELASTIC LAYERS

Summary. Within more exact theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state vibrations of the orthotropic doubly curved panel with the arbitrary number of rigid inclusions of the arbitrary geometrical form, orientation, and location is constructed. Inclusions interact with the panel through the thin elastic layers of the Winkler type. The case of the translational motion of the inclusions along the normal direction to the middle surface of the panel is investigated. The panel of the uniform thickness is considered. External boundary of the panel is of the arbitrary geometrical configuration. This object can be obtained as the result of an arbitrary cut out from the panel of the canonical shape. Arbitrary harmonic in time boundary conditions are considered on the external boundary of the panel. The solution of the system of partial differential equations in the multi-connected domain with the non-homogeneous boundary conditions of different types is built on the basis of the indirect boundary elements method. The Green's functions are found on the base of the sequential approach to the representation of the Dirac delta function (as the sequence of the delta-like functions) and the Fourier series method. The boundary value problem is reduced to the system of the Fredholm type integral equations on the base of indirect boundary element method and is solved by the collocation method. The cases of external boundary of the panel and the contours of the inclusions with the corner points can be analysed within the solution constructed. The solutions for arbitrary mixed cases of the boundary conditions on the external boundary of the panel can be obtained on the base of integral equations constructed in the paper. Different arbitrary mixed boundary conditions on all subsections of the external boundary are also allowed. Some aspects of the efficient numerical schemes of the collocation method in order to obtain the convergent solutions for the ill-posed problems, considering the Fredholm integral equations of the first kind and the cases of non-smooth boundaries, are discussed.

Key words: *orthotropic doubly curved panel, vibration, inclusions, elastic layer of the Winkler type, natural frequencies, sequential approach, Green function, indirect boundary elements method, collocation method.*

Постановка проблеми. В сучасному авіа- та кораблебудуванні широко використовують анізотропні оболонкові елементи з включеннями різної форми та розташування, які працюють за змінних у часі навантажень. Тому виникає зростаюча потреба дослідження динамічної поведінки таких елементів.

Аналіз відомих результатів досліджень. Коливанням суцільних тонкостінних елементів конструкцій багато уваги приділяють чимало фахівців з механіки деформівного твердого тіла [1 – 3]. Однак недостатньо є опублікованих матеріалів, які стосуються динамічної поведінки ортотропних тонкостінних елементів конструкцій з включеннями, зокрема, панелей. В даній роботі узагальнено результати, отримані в роботах [4, 5].

Мета роботи – побудувати розв’язок узагальненої задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною включень довільної форми, орієнтації та розташування, які взаємодіють з панеллю через пружні прошарки типу Вінклера, з довільними гармонічними в часі граничними умовами на зовнішній довільної форми границі панелі ефективним методом у рамках уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви й усі інерційні компоненти.

Постановка задачі. Розглянути задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини. Панель містить N абсолютно жорстких включень довільної форми та розташування, які взаємодіють з панеллю через тонкі пружні прошарки типу Вінклера з коефіцієнтами жорсткості $k^{(j)}(\alpha)$. Коефіцієнт жорсткості прошарку може бути різним для кожного включення, а також може бути змінним уздовж кожного з контурів включень. Товщиною пружних прошарків нехтуємо. Контурами включень є криві $L^{(j)}$, $j = \overline{1, N}$. Нехай на включення маси $\tilde{m}^{(j)}$ діють сили з головним вектором $P^{(j)} = P_0^{(j)} \sin(\omega t)$, який є нормальним до серединної поверхні панелі й діє в точці центра мас включення. Вважаємо, що включення здійснює поступальний рух уздовж нормального напрямку до серединної поверхні панелі. Зовнішня границя панелі є також довільної форми, а її контуром – дві взаємодоповнюючі криві $L^{(0)}$ та $L^{(N+1)}$. Можна уявити таку панель, яка в термінах серединної поверхні займає багатозв’язну область Ω , як результат довільного вирізу з суцільної панелі, яка в термінах серединної поверхні займає однозв’язну область Π канонічної форми (прямокутну в плані). Криволінійну систему координат з метрикою, близькою до евклідової, розміщено в уявно розширеній області. Координатні лінії криволінійної системи координат співпадають із напрямками головних кривин та осями ортотропії матеріалу панелі (рис. 1).

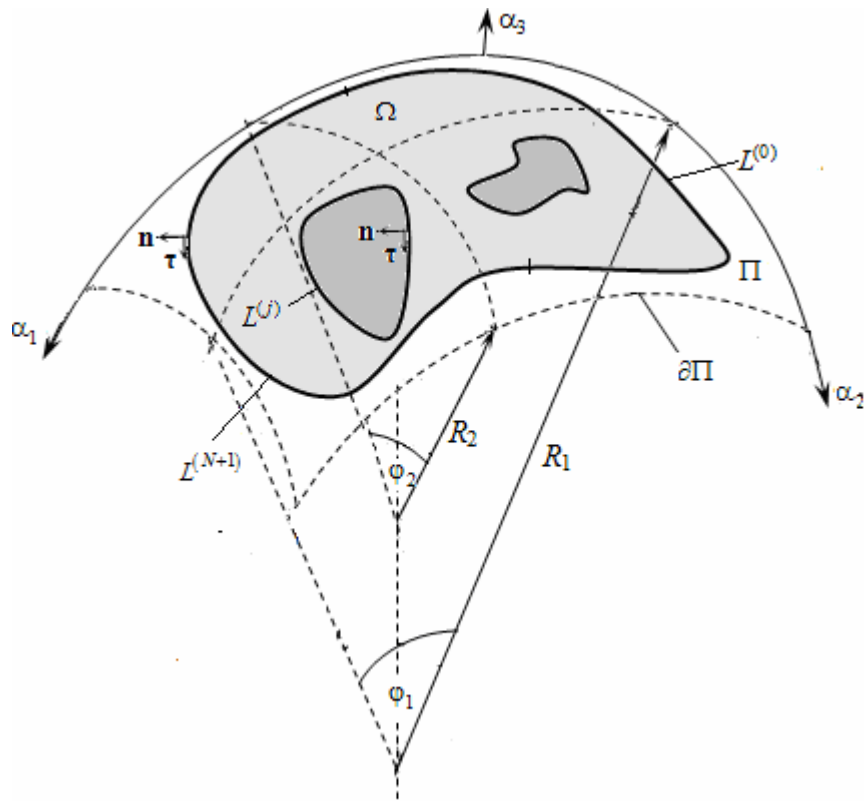


Рисунок 1. Панель подвійної кривини з множиною включень довільної конфігурації та зовнішньою границею довільної форми

Figure 1. Doubly curved panel with a set of inclusions of arbitrary configuration and with external boundary of the arbitrary form

Використано такі позначення: $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ – нормальний і дотичний вектори уздовж деякого напрямку; E_i – модулі Юнга; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву матеріалу; ν_{12}, ν_{21} – коефіцієнти Пуассона; ρ – густина матеріалу; k_1, k_2 – головні кривини панелі; R_1, R_2 – головні радіуси кривини; $2h$ – товщина панелі; ϕ_1, ϕ_2 – кути розхилу панелі; q_i, m_i – компоненти зовнішнього навантаження; w – прогин; u_n, u_τ – нормальні й тангенціальні компоненти переміщень точок серединної поверхні; γ_n, γ_τ – нормальні та тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні; Q_n – нормальна компонента перерізувальних сил; M_n, N_n – нормальні компоненти і M_τ, N_τ – тангенціальні компоненти моментів та мембранних сил.

Нехай на одній частині границі панелі задано розподілені компоненти переміщень

$$w = w_0(\alpha) \sin(\omega t), \quad u_n = u_{n0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_n = \gamma_{n0}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$u_\tau = u_{\tau0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(0)}, \quad (1)$$

а на другій – розподілені компоненти зусиль

$$Q_n = Q_{n0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad N_n = N_{n0}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$N_\tau = N_{\tau0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_\tau = M_{\tau0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(N+1)}. \quad (2)$$

Граничні умови на контурах включень мають вигляд

$$Q_n(\alpha, t) = -p^{(j)}(\alpha, t), \quad M_n(\alpha, t) = 0, \quad N_n(\alpha, t) = 0, \quad M_\tau(\alpha, t) = 0, \quad N_\tau(\alpha, t) = 0, \quad (3)$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = 1, N,$$

де $p^{(j)}(\alpha, t) = k^{(j)}(\alpha) (\tilde{w}^{(j)} - w(\alpha, t))$ – контактні сили взаємодії панелі та включення,

$\tilde{w}^{(j)} = \tilde{w}_0^{(j)} \sin(\omega t)$ – переміщення j -ого включення,

$w(\alpha, t)$ – прогин панелі на межі з прошарком,

$k^{(j)}(\alpha)$ – коефіцієнт пружності прошарку між j -им включенням та панеллю, який є змінним уздовж контуру включення.

Якщо покласти

$$w_0(\alpha) = u_{n0}(\alpha) = \gamma_{n0}(\alpha) = u_{\tau 0}(\alpha) = \gamma_{\tau 0}(\alpha) = 0,$$

$$Q_{n0}(\alpha) = M_{n0}(\alpha) = N_{n0}(\alpha) = N_{\tau 0}(\alpha) = M_{\tau 0}(\alpha) = 0,$$

то матимемо випадок жорсткого закріплення однієї частини границі панелі та вільної від навантаження другої частини панелі.

Розв’язок задачі. Для дослідження використано рівняння оболонок, які враховують поперечні зсуви. Рівняння руху мають вигляд [6]

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i + \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} + k_i Q_i = -q_i + 2h\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i=1,2),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = -q_3 + 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (4)$$

На основі припущень стосовно розподілу напружень і переміщень

$$U_i = u_i + \gamma_i \alpha_3, \quad U_3 = w, \quad \sigma_{33} = \begin{cases} 0, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{33}^\pm, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3} \alpha_3, \quad (-h \leq \alpha_3 \leq h), \quad \sigma_{i3} = \begin{cases} \frac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^\pm, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \quad (5)$$

фізичні співвідношення набудуть вигляду

$$N_{ii} = B_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \nu_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + (k_i + \nu_{ij} k_j) w \right], \quad N_{ij} = N_{ji} = B_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} \right),$$

$$M_{ii} = D_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \nu_{ij} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j} \right), \quad M_{ij} = M_{ji} = D_{ij} \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} \right), \quad Q_i = \Lambda_i \left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i u_i \right),$$

$$D_i = \frac{2h^3 E_i}{3(1 - \nu_{ij} \nu_{ji})}, \quad D_{ij} = \frac{2h^3 G_{ij}}{3}, \quad B_{ij} = 2hG_{ij}, \quad B_i = \frac{2hE_i}{1 - \nu_{ij} \nu_{ji}}, \quad \Lambda_i = 2hG_{i3},$$

$$i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (6)$$

Нормальні та дотичні компоненти переміщень і зусиль визначають за формулами

$$\begin{aligned} M_n &= M_{11}n_1^2 + 2M_{12}n_1n_2 + M_{22}n_2^2, \quad N_n = N_{11}n_1^2 + 2N_{12}n_1n_2 + N_{22}n_2^2, \quad Q_n = Q_1n_1 + Q_2n_2, \\ M_\tau &= (M_{11}n_1 + M_{12}n_2)\tau_1 + (M_{21}n_1 + M_{22}n_2)\tau_2, \\ N_\tau &= (N_{11}n_1 + N_{12}n_2)\tau_1 + (N_{21}n_1 + N_{22}n_2)\tau_2, \end{aligned}$$

$$\gamma_n = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2, \quad \gamma_\tau = \tau_1\gamma_1 + \tau_2\gamma_2, \quad u_n = n_1u_1 + n_2u_2, \quad u_\tau = \tau_1u_1 + \tau_2u_2. \quad (7)$$

Унаслідок підстановки фізичних співвідношень (6) у рівняння руху (4) отримуємо такі ключові рівняння:

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}]\mathbf{U} &= -\mathbf{P}, \quad \mathbf{U} = \{u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2\}^T, \quad \mathbf{P} = \{q_1, q_2, q_3, m_1, m_2\}^T, \\ \mathbf{L}_{11} &= B_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_1^2 \Lambda_1 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{22} = B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_2^2 \Lambda_2 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathbf{L}_{33} &= \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - [k_1 B_1 (k_1 + \nu_{12} k_2) + k_2 B_2 (k_2 + \nu_{21} k_1)] - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathbf{L}_{44} &= D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{55} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathbf{L}_{14} &= \mathbf{L}_{41} = k_1 \Lambda_1, \quad \mathbf{L}_{12} = (B_1 \nu_{12} + B_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{21} = (B_{12} + B_2 \nu_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ \mathbf{L}_{25} &= \mathbf{L}_{52} = k_2 \Lambda_2, \quad \mathbf{L}_{45} = (D_1 \nu_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{54} = (D_{12} + D_2 \nu_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ \mathbf{L}_{34} &= -\mathbf{L}_{43} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \mathbf{L}_{35} = -\mathbf{L}_{53} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{24} = \mathbf{L}_{42} = 0, \quad \mathbf{L}_{15} = \mathbf{L}_{51} = 0, \\ \mathbf{L}_{13} &= (k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_1 k_2 \nu_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \mathbf{L}_{31} = -(k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_2 k_2 \nu_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \\ \mathbf{L}_{23} &= (k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_2 k_2 \nu_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{32} = -(k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_1 k_1 \nu_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Рівняння руху включень матимуть вигляд

$$\tilde{m}^{(j)} \frac{\partial^2 \tilde{w}^{(j)}(\alpha, t)}{\partial t^2} = P^{(j)} - \int_{L^{(j)}} p^{(j)}(\xi, t) dl(\xi), \quad j = \overline{1, N}. \quad (9)$$

У результаті маємо крайову задачу (1), (2), (3), (8), (9).

Для розв'язання крайової задачі використовуємо непрямий метод граничних елементів. Функції Гріна знаходимо методом Фур'є за використання секвенціального підходу до представлення дельта-функції Дірака (як границю послідовності дельтаподібних функцій [6–8]). Звідси крайова задача для знаходження функції Гріна складається з рівнянь (8), у яких

$$\begin{aligned} q_s &= T_s^r \delta_{\varepsilon_1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon_2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\omega t), \quad s = \overline{1, 3}, \\ m_p &= T_{3+p}^r \delta_{\varepsilon_1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon_2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\omega t), \quad p = 1, 2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\delta_{\varepsilon_1}(\alpha_1, \alpha_1^r) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon_1} g_1 \left(\frac{|\alpha_1 - \alpha_1^r|}{\varepsilon_1} \right), & |\alpha_1 - \alpha_1^r| \leq \varepsilon_1, \\ 0, & |\alpha_1 - \alpha_1^r| > \varepsilon_1, \end{cases}$$

$$\delta_{\varepsilon_2}(\alpha_2, \alpha_2^r) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon_2} g_2 \left(\frac{|\alpha_2 - \alpha_2^r|}{\varepsilon_2} \right), & |\alpha_2 - \alpha_2^r| \leq \varepsilon_2, \\ 0, & |\alpha_2 - \alpha_2^r| > \varepsilon_2, \end{cases}$$

в уявно побудованій області $\Pi: 0 \leq \alpha_1 \leq l_1, 0 \leq \alpha_2 \leq l_2, \Omega \in \Pi$ і однорідних крайових умов на її границі $\partial\Pi$ [9, 10]

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad u_\tau = 0, \quad \gamma_\tau = 0. \quad (11)$$

Згідно з методом Фур'є функції Гріна шукаємо в такій формі:

$$w^G(\alpha, \alpha^r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{\varepsilon km}(\alpha^r) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} u_1^G(\alpha, \alpha^r, t) \\ \gamma_1^G(\alpha, \alpha^r, t) \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} u_{1\varepsilon km}(\alpha^r) \\ \gamma_{1\varepsilon km}(\alpha^r) \end{cases} \Phi_{km}^{cs}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} u_2^G(\alpha, \alpha^r, t) \\ \gamma_2^G(\alpha, \alpha^r, t) \end{cases} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{cases} u_{2\varepsilon km}(\alpha^r) \\ \gamma_{2\varepsilon km}(\alpha^r) \end{cases} \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \sin(\omega t). \quad (12)$$

Функції у виразах (10) розкладаємо в ряди Фур'є:

$$q_3(\alpha, \alpha^r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_3^r C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{ss}(\alpha^r) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} q_1(\alpha, \alpha^r, t) \\ m_1(\alpha, \alpha^r, t) \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} T_1^r \\ T_4^r \end{cases} C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) \Phi_{km}^{cs}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} q_2(\alpha, \alpha^r, t) \\ m_2(\alpha, \alpha^r, t) \end{cases} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{cases} T_2^r \\ T_5^r \end{cases} C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{sc}(\alpha^r) \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \sin(\omega t), \quad (13)$$

$$C_{km}(\varepsilon) = \mu_{km} \frac{4}{l_1 l_2} \varphi_1(\lambda_{1k} \varepsilon_1) \varphi_2(\lambda_{2m} \varepsilon_2),$$

$$\lambda_{1k} = \frac{k\pi}{l_1}, \lambda_{2m} = \frac{m\pi}{l_2}, l_1 = R_1\varphi_1, l_2 = R_2\varphi_2,$$

$$\Phi_{km}^{cs}(\alpha) = \cos(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2),$$

$$\Phi_{km}^{sc}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\cos(\lambda_{2m}\alpha_2),$$

$$\Phi_{km}^{ss}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2),$$

$$\Phi_{km}^{cc}(\alpha) = \cos(\lambda_{1k}\alpha_1)\cos(\lambda_{2m}\alpha_2),$$

$$\mu_{km} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \neq 0, m \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } k = 0, m \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } k \neq 0, m = 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{якщо } k = 0, m = 0. \end{cases}$$

$\varphi_1(\lambda_{1k}\varepsilon_1)$, $\varphi_2(\lambda_{2m}\varepsilon_2)$ – вагові функції, які визначають тип узагальненого підсумовування. Для простоти можна брати $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Після підстановки співвідношень (12), (13) у розв'язувальну систему рівнянь (8) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Часова координата відокремлюється у випадку усталених гармонічних коливань. У результаті отримаємо функцію Гріна в аналітичному вигляді

$$\mathbf{U}^G(\alpha, \alpha^r, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{U}^G(\alpha, \alpha^r, \varepsilon, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{E}_{km}(\alpha)] [\mathbf{U}_{km}] [\mathbf{E}_{km}(\alpha^r)] \mathbf{T}^r \sin(\omega t),$$

$$\mathbf{U}^G(\alpha, \alpha^r, t) = \{u_1^G(\alpha, \alpha^r, t), u_2^G(\alpha, \alpha^r, t), w^G(\alpha, \alpha^r, t), \gamma_1^G(\alpha, \alpha^r, t), \gamma_2^G(\alpha, \alpha^r, t)\}^T, \quad (14)$$

$$\mathbf{T}^r = \{T_1^r, T_2^r, T_3^r, T_4^r, T_5^r\}^T,$$

$$[\mathbf{E}_{km}(\alpha)] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{cs}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cs}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{E}_{km}(\alpha^r)] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha^r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss}(\alpha^r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha^r) \end{bmatrix},$$

На основі знайденої функції Гріна (12) розв'язок шукаємо у вигляді потенціалу простого шару

$$\mathbf{U}(\alpha, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{E}_{km}(\alpha)] [\mathbf{U}_{km}] [\mathbf{E}_{km}(\xi)] \mathbf{T}(\xi) dl(\xi) \sin(\omega t), \quad (15)$$

$$\mathbf{U}(\alpha, t) = \{u_1(\alpha, t), u_2(\alpha, t), w(\alpha, t), \gamma_1(\alpha, t), \gamma_2(\alpha, t)\}^T.$$

Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі використовуємо представлення розв'язку (15), крайові умови (1), (2), (3) та співвідношення (7). У випадку крайових умов, коли на контурах задано компоненти зусиль, використовуємо метод фіктивного контуру для уникнення стрибка похідної від потенціалу простого шару на границі, який полягає в тому, що крайові умови задовольняємо не на реальній границі, а на границі, фіктивно зміщеній всередину розглядуваної області на малу відстань ε . Криві зміщених контурів позначатимемо $L^{\varepsilon(j)}$. Тоді система $5(N+2)+N$ інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій густин $\mathbf{T}(\xi)$ та відносно невідомих переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \left\{ u_{n0}(\alpha), u_{\tau0}(\alpha), w_0(\alpha), \gamma_{n0}(\alpha), \gamma_{\tau0}(\alpha) \right\}^T = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha)] [\mathbf{E}_{km}(\xi)] \mathbf{T}(\xi) dl(\xi), \quad \alpha \in L^{(0)} \\ & \left\{ 0, 0, k^{(j)}(\alpha) (w(\alpha) - \tilde{w}_0^{(j)}), 0, 0 \right\}^T = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha)] [\mathbf{E}_{km}(\xi)] \mathbf{T}(\xi) dl(\xi), \quad \alpha \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = \overline{1, N}, \\ & \left\{ N_{n0}(\alpha), N_{\tau0}(\alpha), Q_{n0}(\alpha), M_{n0}(\alpha), M_{\tau0}(\alpha) \right\}^T = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha)] [\mathbf{E}_{km}(\xi)] \mathbf{T}(\xi) dl(\xi), \quad \alpha \in L^{\varepsilon(N+1)}, \\ & -\omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)} = P_0^{(j)} - \int_{L^{(j)}} k^{(j)}(\zeta) (\tilde{w}_0^{(j)} - w(\zeta)) dl(\zeta), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (w_{km}^1 \Phi_{km}^{cs}(\xi) T_1(\xi) + w_{km}^2 \Phi_{km}^{sc}(\xi) T_2(\xi) + \\ & + w_{km}^3 \Phi_{km}^{ss}(\xi) T_3(\xi) + w_{km}^4 \Phi_{km}^{cs}(\xi) T_4(\xi) + w_{km}^5 \Phi_{km}^{sc}(\xi) T_5(\xi)) dl(\xi), \\ w(\zeta) &= \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{ss}(\zeta) (w_{km}^1 \Phi_{km}^{cs}(\xi) T_1(\xi) + w_{km}^2 \Phi_{km}^{sc}(\xi) T_2(\xi) + \\ & + w_{km}^3 \Phi_{km}^{ss}(\xi) T_3(\xi) + w_{km}^4 \Phi_{km}^{cs}(\xi) T_4(\xi) + w_{km}^5 \Phi_{km}^{sc}(\xi) T_5(\xi)) dl(\xi), \end{aligned}$$

$$\left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha) \right] = \begin{bmatrix} u_{1n}(\alpha) & u_{2n}(\alpha) & u_{3n}(\alpha) & u_{4n}(\alpha) & u_{5n}(\alpha) \\ u_{1\tau}(\alpha) & u_{2\tau}(\alpha) & u_{3\tau}(\alpha) & u_{4\tau}(\alpha) & u_{5\tau}(\alpha) \\ w_1(\alpha) & w_2(\alpha) & w_3(\alpha) & w_4(\alpha) & w_5(\alpha) \\ \gamma_{1n}(\alpha) & \gamma_{2n}(\alpha) & \gamma_{3n}(\alpha) & \gamma_{4n}(\alpha) & \gamma_{5n}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}(\alpha) & \gamma_{2\tau}(\alpha) & \gamma_{3\tau}(\alpha) & \gamma_{4\tau}(\alpha) & \gamma_{5\tau}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$u_{jn}(\alpha) = n_1(\alpha)u_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha)u_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$u_{j\tau}(\alpha) = \tau_1(\alpha)u_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha)u_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$\gamma_{jn}(\alpha) = n_1(\alpha)\gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha)\gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$\gamma_{j\tau}(\alpha) = \tau_1(\alpha)\gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha)\gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$w_j(\alpha) = w_{km}^j \Phi_{km}^{ss}(\alpha), \quad j = \overline{1,5},$$

$$\left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha) \right] = \begin{bmatrix} N_{1n}(\alpha) & N_{2n}(\alpha) & N_{3n}(\alpha) & N_{4n}(\alpha) & N_{5n}(\alpha) \\ N_{1\tau}(\alpha) & N_{2\tau}(\alpha) & N_{3\tau}(\alpha) & N_{4\tau}(\alpha) & N_{5\tau}(\alpha) \\ Q_{1n}(\alpha) & Q_{2n}(\alpha) & Q_{3n}(\alpha) & Q_{4n}(\alpha) & Q_{5n}(\alpha) \\ M_{1n}(\alpha) & M_{2n}(\alpha) & M_{3n}(\alpha) & M_{4n}(\alpha) & M_{5n}(\alpha) \\ M_{1\tau}(\alpha) & M_{2\tau}(\alpha) & M_{3\tau}(\alpha) & M_{4\tau}(\alpha) & M_{5\tau}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$N_{jn}(\alpha) = B_1 n_1^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left[-\lambda_{1k} u_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} u_{2km}^j + (k_1 + \nu_{12} k_2) w_{km}^j \right] +$$

$$+ 2B_{12} n_1 n_2 \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} u_{1km}^j + \lambda_{1k} u_{2km}^j) +$$

$$+ B_2 n_2^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left[-\lambda_{2m} u_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} u_{1km}^j + (k_2 + \nu_{21} k_1) w_{km}^j \right],$$

$$N_{j\tau}(\alpha) = B_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left[-\lambda_{1k} u_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} u_{2km}^j + (k_1 + \nu_{12} k_2) w_{km}^j \right] +$$

$$+ B_{12} (n_1 \tau_2 + n_2 \tau_1) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} u_{1km}^j + \lambda_{1k} u_{2km}^j) +$$

$$+ B_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left[-\lambda_{2m} u_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} u_{1km}^j + (k_2 + \nu_{21} k_1) w_{km}^j \right],$$

$$M_{jn}(\alpha) = D_1 n_1^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left(-\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j \right) + 2D_{12} n_1 n_2 \Phi_{km}^{cc}(\alpha) \times$$

$$\times (\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j) + D_2 n_2^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left(-\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j \right),$$

$$M_{j\tau}(\alpha) = D_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left(-\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j \right) + D_{12} (n_1 \tau_2 + n_2 \tau_1) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) \times$$

$$\times (\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j) + D_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left(-\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j \right),$$

$$Q_{jn}(\alpha) = \Lambda_1 n_1 \Phi_{km}^{cs}(\alpha) (\gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} w_{km}^j - k_1 u_{1km}^j) + \Lambda_2 n_2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha) (\gamma_{2km}^j + \lambda_{2m} w_{km}^j - k_2 u_{2km}^j), \quad j = \overline{1,5}.$$

Розв'язок систем інтегральних рівнянь можна знайти на основі різних схем методу колокацій. Для відшукування розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду необхідно використовувати регуляризовані алгоритми, оскільки це є традиційно некоректна задача. Для контурів з кутовими точками необхідно використовувати нерівномірну сітку з достатньо сильним ущільненням біля кутів з метою отримання збіжних розв'язків. Для прикладу, досить добрі результати дає метод колокацій, коли контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ – кількість відрізків розбиття j -ого контуру, $\alpha^{(j)r}$ – середини відрізків розбиття j -ого контуру, $l^{(j)r}$ – довжини відрізків розбиття $L^{(j)r}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$), а на кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо розподіл невідомих густин $\mathbf{T}^{(j)}(\xi) = \mathbf{T}^{(j)r} \delta(\alpha^{(j)r}, \xi)$. Мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій $\alpha^{(j)q}$, які вибираємо серединами відрізків розбиття контурів або точками, які є на відстані ε від них з боку розглядуваної області. При інтегруванні в останніх співвідношеннях системи (16) можна вибирати спосіб розбиття контурів включень незалежно від способу розбиття контурів за використання методу колокацій для апроксимації невідомих густин.

Звідси система $5 \sum_{j=0}^{N+1} S^{(j)} + N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих

$\tilde{w}_0^{(j)}$, $j = \overline{1, N}$ та $\mathbf{T}^{(j)r}$, $j = \overline{0, N+1}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$ набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \left\{ u_{n0}(\alpha^{(0)q}), u_{\tau 0}(\alpha^{(0)q}), w_0(\alpha^{(0)q}), \gamma_{n0}(\alpha^{(0)q}), \gamma_{\tau 0}(\alpha^{(0)q}) \right\}^T = \\ & = \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha^{(0)q}) \right] \left[\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \mathbf{T}^{(j)r}, \\ & \alpha^{(0)q} \in L^{(0)}, q = \overline{1, S^{(0)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ 0, 0, k^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \left(w(\alpha^{(j)q}) - \tilde{w}_0^{(j)} \right), 0, 0 \right\}^T = \\ & \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \mathbf{T}^{(j)r}, \\ & \alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, q = \overline{1, S^{(j)}}, j = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ N_{n0}(\alpha^{(N+1)q}), N_{\tau 0}(\alpha^{(N+1)q}), Q_{n0}(\alpha^{(N+1)q}), M_{n0}(\alpha^{(N+1)q}), M_{\tau 0}(\alpha^{(N+1)q}) \right\}^T = \\ & \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha^{(N+1)q}) \right] \left[\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \mathbf{T}^{(j)r}, \\ & \alpha^{(N+1)q} \in L^{\varepsilon(N+1)}, q = \overline{1, S^{(N+1)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_0^{(s)} = & \sum_{p=1}^{S^{(s)}} \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \left\{ -C_{km}(\varepsilon) \Psi_{km}^{ss}(\alpha^{(s)p}) \left[w_{km}^{(1)1} \Phi_{km}^{sc}(\alpha^{(j)r}) T_1^{(j)r} + \right. \right. \\
 & + w_{km}^{(1)2} \Phi_{km}^{cs}(\alpha^{(j)r}) T_2^{(j)r} + w_{km}^{(1)3} \Phi_{km}^{ss}(\alpha^{(j)r}) T_3^{(j)r} + w_{km}^{(1)4} \Phi_{km}^{cs}(\alpha^{(j)r}) T_4^{(j)r} + \\
 & \left. \left. + w_{km}^{(1)5} \Phi_{km}^{sc}(\alpha^{(j)r}) T_5^{(j)r} \right] \right\} + \tilde{w}_0^{(s)} \left(\sum_{p=1}^{S^{(s)}} \Theta(\alpha^{(s)p}) - \omega^2 \tilde{m}^{(s)} \right), \quad s = \overline{1, N}. \\
 \Psi_{km}^{ss}(\alpha^{(s)p}) = & \int_{L^{(s)p}} k^{(s)}(\zeta) \Phi_{km}^{ss}(\zeta) dl(\zeta), \\
 \Theta(\alpha^{(s)p}) = & \int_{L^{(s)p}} k^{(s)}(\zeta) dl(\zeta), \quad s = \overline{1, N}.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідної системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $\mathbf{n}(\alpha) = \{n_1(\alpha), n_2(\alpha)\}$ та дотичною $\boldsymbol{\tau}(\alpha) = \{\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha)\}$ можна отримати на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на зовнішніх контурах та контурі включень, використовуючи формули

$$\begin{cases} u_n(\alpha, t) \\ u_\tau(\alpha, t) \\ w(\alpha, t) \\ \gamma_n(\alpha, t) \\ \gamma_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha) \right] \left[\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \Gamma^{(j)r} \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} N_n(\alpha, t) \\ N_\tau(\alpha, t) \\ Q_n(\alpha, t) \\ M_n(\alpha, t) \\ M_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \left[\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \Gamma^{(j)r} \sin(\omega t). \tag{18}$$

Висновки. Використовуючи побудовані в роботі інтегральні рівняння, можна отримати розв'язки для довільних мішаних випадків крайових умов на зовнішній границі панелі, розглядаючи довільні комбінації амплітуд $w(\alpha), u_n(\alpha), \gamma_n(\alpha), u_\tau(\alpha), \gamma_\tau(\alpha), Q_n(\alpha), M_n(\alpha), N_n(\alpha), M_\tau(\alpha), N_\tau(\alpha)$. Також дозволяються довільні різні мішані крайові умови на всіх складових частинах зовнішньої границі. Тому в рамках поставленої задачі не обов'язково, щоб цілий зовнішній контур панелі був закріплений. Одна або кілька складових зовнішнього контуру можна розглядати якимось чином закріпленим. Ключові рівняння враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання. Це дозволяє досліджувати у кращій якості різні типи коливань, спричинених різним характером збурення зовнішньої границі у випадку анізотропних матеріалів. У рамках побудованого розв'язку можна розглядати випадки зовнішньої границі панелі та контурів включень з

кутовими точками. Однак у випадку контурів з кутовими точками необхідно розглядати нерівномірне розбиття в схемі методу колокацій з досить сильним ущільненням біля кутів з метою отримання збіжних розв'язків. А для розв'язку рівнянь Фредгольма першого роду необхідно використовувати стабілізовані алгоритми, оскільки це є традиційно некоректна задача. На етапі числового розрахунку необхідним є дослідження збіжності й оптимального вибору значень параметрів апроксимації $S^{(j)}, K, M, \varepsilon$ у рамках кожного конкретного випадку для отримання досить точних числових результатів. Запропонована в статті схема дає розв'язки, які добре узгоджуються з відомими результатами для часткових граничних випадків, отриманими іншими методами.

Conclusions. Using integral equations constructed in the paper, the solutions for arbitrary mixed cases of the boundary conditions on the external boundary of the panel can be obtained considering arbitrary combinations of the magnitudes $w(\alpha)$, $u_n(\alpha)$, $\gamma_n(\alpha)$, $u_\tau(\alpha)$, $\gamma_\tau(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$, $M_n(\alpha)$, $N_n(\alpha)$, $M_\tau(\alpha)$, $N_\tau(\alpha)$. Different arbitrary mixed boundary conditions on all subsections of the external boundary are also allowed. Such that it is not mandatory within the problem statement that the whole external contour of the panel is fixed. One or several subsections of the external contour can be considered somehow fixed. The key equations take into account transverse shear deformation and all inertial components including rotary inertia. This allows to investigate different types of vibrations caused by different character of external boundary excitation in case of anisotropic materials in the higher quality. The cases of external boundary of the panel and the contours of the inclusions with the corner points can be analysed within the solution constructed. However, non-uniform meshes with the strong mesh refinements near the corners in the collocation scheme must be considered for the cases of the contours with corner points in order to obtain the convergent solutions. And the stabilized procedures must be used for the solution of the system of the Fredholm equations of the first kind, because this is conventionally ill-posed problem. It is indispensable to investigate the convergence and optimal choice of the values of the approximation parameters $S^{(j)}, K, M, \varepsilon$ on the stage of numerical computation within each particular case in order to get the numerical results efficient enough. The scheme proposed in the paper provides the solutions which are in reasonable agreement with the known results for the partial limiting cases obtained by the other methods.

Список використаної літератури

1. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х томах; под. ред. А.Н. Гузя. – Киев. – Т. 1. Механика материалов. – 1082. – 368 с.; Т.2. Механика элементов конструкций – 1083. – 464 с.; Т.3. Прикладные исследования. – 1083. – 262 с.
2. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций [Текст] / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
3. Григоренко, Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей [Текст] / Я.М. Григоренко, Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко. – Киев: Издательский дом «Академперіодика», 2006. – 472 с.
4. Шопа, Т. Коливання пластини з масивним включенням через пружний прошарок типу Вінклера [Текст] / Т. Шопа // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача: Тези доповідей. – Львів, 2009. – С. 102 – 103.
5. Шопа, Т. До побудови розв'язку задачі про коливання ортотропної непологої циліндричної панелі з включенням довільної конфігурації [Текст] / Т. Шопа // Машинознавство. – 2010. – № 7 – С. 38 – 42.

6. Бурак, Я.Й. Аналітична механіка локально навантажених оболонок [Текст] / Я.Й. Бурак, Ю.К. Рудавський, М.А. Сухорольський. – Львів: Інтелект-Захід, 2007. – 240 с.
7. Lighthill, J. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions / J. Lighthill. – Cambridge University Press, 1958. – 79 p.
8. Сухорольський, М.А. Послідовності і ряди [Текст] / М.А. Сухорольський. – Львів: Растр-7, 2010. – 346 с.
9. Shopa, T. Vibration of orthotropic double curvature panel with a set of cutouts of arbitrary configuration / T. Shopa // Proceedings of the Nineteenth International Congress on Sound and Vibration (ICSV19). – Vilnius (Lithuania), 2012.
10. Шопя, Т. Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації [Текст] / Т. Шопя // Вісник ТНТУ. – 2013. – № 3(67). – С. 63 – 74.

Отримано 10.01.2013